Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

В. В. Макеев

О ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКАХ, ВПИСАННЫХ В ЗАМКНУТУЮ КРИВУЮ, И ЕЕ ВЕРШИНАХ

Овалом будем называть гладкую выпуклую плоскую замкнутую кривую. Хорошо известно [1], что всякий овал класса C^3 имеет $\geqslant 4$ *вершин* – точек, где его кривизна стационарна.

Бляшке доказал, что если овал пересекается с окружностью в k точках, то на нем не менее k вершин.

Обзор результатов, связанных с теоремой о 4 вершинах овала имеется в [2].

В [3] высказана гипотеза, что для всякой гладкой жордановой кривой γ на плоскости и вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ найдется подобное преобразование, вписывающее $ABCD$ в кривую γ.

Шнирельман [4] доказал, что во всякую C^2-гладкую жорданову кривую можно вписать квадрат.

В [3] также доказано, что для всякого простого $p \geqslant 5$ на овале лежат некоторые 4 вершины правильного p-угольника.

В [4] вышесформулированная гипотеза доказана для гладких выпуклых кривых γ, пересекающихся со всякой окружностью не более чем в 4 точках. Фактически там доказана следующая более сильная теорема.

Теорема 1 [4]. *Для всякого овала, пересекающегося со всякой окружностью не более чем в 4 точках, и всякого вписанного в окружность пятиугольника $ABCDE$ найдется такое подобное преобразование φ, что четырехугольник $\varphi(ABCD)$ вписан в овал, а $\varphi(E)$ лежит внутри овала, а также такое подобное преобразование ψ, что четырехугольник $\psi(ABCD)$ вписан в овал, а $\psi(E)$ лежит вне овала.*

По вышеупомянутой теореме Бляшке овал с 4 вершинами пересекается с окружностью не более, чем в 4 точках. Отметим, что овалы, пересекающиеся с окружностью не более чем в 4 точках, уже изучались в [5].

Для овалов с 4 вершинами теорема 1 допускает следующее усиление.

§1. Овалы с 4 вершинами

Теорема 2. *Для вписанного в окружность пятиугольника $ABCDE$ и отрытого плотного в C^4-топологии множества овалов γ с 4 вершинами найдутся 2 подобных преобразования φ таких, что четырехугольник $\varphi(ABCD)$ вписан в γ, а вершина $\varphi(E)$ лежит внутри γ, а также 2 подобных преобразования ψ таких, что четырехугольник $\psi(ABCD)$ вписан в γ, а вершина $\psi(E)$ лежит вне γ.*

Доказательство, как и доказательство теоремы 1 (см. [3]), основано на редукции к задаче о функциях на двумерной сфере.

Доказательство. Подвергнув овал γ малому возмущению, добьемся того, что кривизна k является функцией Морса на γ, кривизна в вершинах принимает различные значения, а также, что в малых окрестностях вершин овал γ симметричен относительно своих нормалей в этих вершинах.

Пусть Π – плоскость, содержащая овал γ, O – его внутренняя точка овала γ, а $\Pi \supset Q$ – круг с центром в точке O, целиком содержащий γ внутри себя.

Построим непрерывную функцию $f : \Pi \to \mathbb{R}$ такую, что на каждом луче OA с $A \in \gamma$ имеем $f(x) = \dfrac{|Ox|}{|OA|}$ для $x \in [O, A]$, а далее вдоль луча OA функция f гладкая, $f' > 0$ и вне Q линии уровня f являются концентрическими с Q окружностями. Очевидно, что при $0 < c < 1$ линии уровня $\{f(x) = c\}$ лежат внутри γ и являются c-гомотетами кривой γ. Очевидно также, что функция f – гладкая на $\Pi \setminus O$.

Рассмотрим сферу S, касающуюся "южным полюсом" плоскости Π в точке O. Пусть $q\colon S \setminus \{P\} \to \Pi$ – стереографическая проекция из точки P, диаметрально противоположной точке O. Пусть радиус сферы S не меньше радиуса круга Q. Определим на "южной" полусфере функцию $\varphi = f \circ q$ и продолжим ее на "северную" полусферу по формуле $\varphi \circ a$, где a – поворот на 180^0 вокруг диаметра сферы S, параллельного плоскости Π.

Пусть $ABCDE$ – подобная копия данного в условии теоремы 2 пятиугольника на сфере S. Определим непрерывное отображение

$$g\colon SO(3) \mapsto \mathbb{R}^5,$$

где $SO(3)$ – группа сохраняющих ориентацию поворотов вокруг центра сферы S, положив для $a \in SO(3)$

$$g(a)\colon = \big(\varphi(a(A)), \varphi(a(B)), \varphi(a(C)), \varphi(a(D)), \varphi(a(E))\big).$$

Пусть прямая l задана уравнениями $x_1 = x_2 = \ldots = x_5$, а

$$h\colon \mathbb{R}^5 \setminus l \to S^3$$

– отображение в сферу

$$S^3 := \Big\{ \sum_{i=1}^{5} x_i = 0,\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1 \Big\} \subset \mathbb{R}^5,$$

сводящееся к ортогональной проекции в плоскости $\Big\{ \sum\limits_{i=1}^{5} x_i = 0 \Big\}$, задаваемой формулой

$$\mathrm{pr}\,(x_1, \ldots, x_5) = (x_1 - s, \ldots, x_5 - s),$$

где $s = (x_1 + \cdots + x_5)/5$, с последующим проектированием на сферу S^3 вдоль исходящих из нуля лучей.

Окружности S^1 достаточно малого радиуса на сфере S не могут пересекаться с линиями уровня функции φ более, чем в 4 точках. Действительно, в силу малости радиуса S^1 могла бы пересекать уровень функции φ более чем в 4 (и даже более чем в 2!) точках лишь вблизи “полюсов” сферы S, но тогда стереографическая проекция $q(S^1)$ пересекала бы гомотет овала γ более чем в 4 точках, что противоречит условию теоремы 2, так как стереографическая проекция переводит окружности из $S \setminus P$ в окружности на плоскости Π.

В дальнейшем мы выбираем конгруэнтные копии пятиугольника $ABCDE$ на сфере настолько малыми, что они и подобные копии меньшего размера не помещаются в один уровень функции φ.

В таком случае $g(SO(3))$ не задевает вышеописанную прямую $l = \{x_1 = \cdots = x_5\} \subset \mathbb{R}^5$, и определено отображение

$$h \circ g\colon SO(3) \to S^3.$$

Покажем, что его степень равна ± 4.

В [3] доказано, что степень этого отображения не делится на 5 и, следовательно, $\neq 0$. Степень $h \circ g$ не зависит от выбора вписанного пятиугольника $ABCDE$, так как они все деформируются друг в друга, а поскольку все 5 вершин не могут попасть в один уровень функции φ, то $g(SO(3))$ не задевает прямую l. Таким образом, двигая пятиугольник $ABCDE$ по сфере (при определении g) мы можем одновременно непрерывно двигать его вершины по его описанной окружности и, если радиус последней равномерно ограничен сверху, это не меняет степени отображения $h \circ g$.

В дальнейшем, перемещая пятиугольник $ABCDE$ по сфере S в малой окрестности точки O, будем его подобно деформировать таким образом, чтобы радиус окружности, описанной вокруг его проекции $q(ABCDE)$, был постоянным.

Рассмотрим две точки

$$x_\pm := \Big(\pm \frac{1}{\sqrt{20}}, \pm \frac{1}{\sqrt{20}}, \pm \frac{1}{\sqrt{20}}, \pm \frac{1}{\sqrt{20}}, \mp \frac{4}{\sqrt{20}} \Big) \in S^3.$$

Покажем, что их прообразы при отображении $h \circ g$ состоят из 4 точек. Так как по построению вклады северной и южной полусферы в степень отображения $h \circ g$ одинаковы, а эта степень не равна 0 (см. [3]), то она может быть лишь ± 4.

Заметим, что прообразам точки X_+ (соотв. X_-) соответствуют такие положения пятиугольника $ABCDE$ на сфере, что четырехугольник $ABCD$ вписан в уровень функции вблизи полюсов сферы S, а вершина E лежит внутри (соответственно, вне) этого уровня (т.е. в одной (в разных) компоненте с ближайшим полюсом).

Для нахождения положений пятиугольника $ABCDE$, когда четырехугольник $ABCD$ вписан в уровень функции $f \circ q$ вблизи южного полюса O сферы, мы можем перейти на плоскость Π и искать такие положения пятиугольника $q(ABCDE)$, когда четырехугольник $q(ABCD)$ вписан в уровень функции f, т.е. в гомотет овала γ.

По сделанному выше предположению радиус описанной окружности пятиугольника $q(ABCDE)$ постоянен. Подвергнув деформации пятиугольник $ABCDE$, мы также считаем, что точки $q(A)$, $q(B)$, $q(C)$, $q(D)$ и $q(E)$ лежат на окружности на равных малых угловых расстояниях между соседними точками.

В силу сделанных предположений четырехугольник $q(ABCD)$ может быть вписан в гомотет овала γ лишь вблизи его вершин, причем в силу локальной зеркальной симметрии овала γ в вершинах четыреугольник $q(ABCD)$ будет иметь ту же ось симметрии, а вершина $q(E)$ лежит внутри овала для локального максимума кривизны (рис. 1) и соответственно вне овала для локального минимума кривизны (рис. 2).

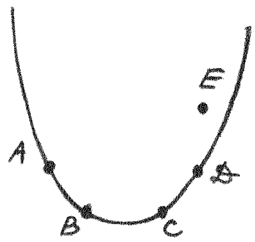

Рис. 1

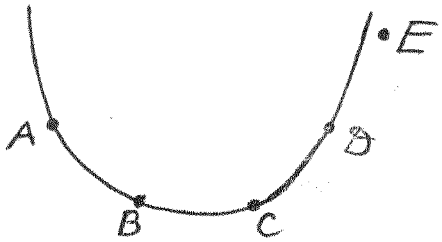

Рис. 2.

Таким образом, в окрестности точки O на плоскости Π имеется 4 копии пятиугольника $q(ABCDE)$, для которых $q(ABCD)$ вписан в гомотет γ, причем вершины $q(A)$, $q(B)$ и $q(C)$, $q(D)$ расположены симметрично относительно вершины овала, при этом для локальных максимумов кривизны вершина $q(E)$ лежит внутри овала и соответственно вне овала для локальных минимумов кривизны. Таким образом, $\deg(h \circ g) = \pm 4$.

Следовательно в окрестности полюса O для пятиугольника $ABCDE$, вписанного в окружность достаточно малого радиуса r, имеется 4 искомых его копии a_1, a_2, a_2, a_4 таких, что четырехугольник $ABCD$ вписан в один уровень функции $f \circ q$. Тогда первые 4 вершины каждого из пятиугольников $q(a_1)$, $q(a_2)$, $q(a_3)$, $q(a_4)$ лежат на гомотете овала γ, при этом при $r \to 0$ проективное преобразование q, переводящее a_i в $q(a_i)$, стремится к тождественному. Переход к пределу при $r \to 0$ завершает доказательство теоремы 2. $\square$

Из [3] и проведенных выше рассуждений следует, что для типичной гладкой звездной жордановой кривой γ на плоскости и правильного пятиугольника $ABCDE$ найдутся 2 подобных преобразования φ таких, что четырехугольник $\varphi(ABCD)$ вписан в γ, а $\varphi(E)$ лежит вне γ, и соответственно 2 подобных преобразования ψ таких, что четырехугольник $\psi(ABCD)$ вписан в γ, а $\psi(E)$

лежит внутри γ.

§2. Возможные обобщения

Фактически нами доказано более общее утверждение: в теореме 2 в качестве γ можно выбирать гладкий овал, пересекающийся с окружностью не более, чем в 4 точках, и тогда число требуемых подобных копий вписанного пятиугольника $ABCDE$ того или другого типа будет соответственно не менее m, где m – число локальных минимумов (и максимумов) функции кривизны k овала γ, при условии, что последняя является функцией Морса.

Возможно, что теорема 2 верна для произвольного гладкого овала γ (или даже гладкой жорданово кривой). В этом случае она является далеко идущим обобщением теоремы о 4 вершинах овала, так как последняя получается из нее предельным переходом при сближении 4 вершин A, B, C и D пятиугольника.

Рассмотрим еще один вариант обобщения теоремы о 4 вершинах овала.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – гладкое выпуклое тело с внутренней точкой O. Верно ли, что найдется такая проходящая через точку O двумерная плоскость Π, что овал $K \cap \Pi$ имеет $\geqslant 2n$ вершин?

Из [6] следует, что $2n$ можно заменить на $p+1$, где p – наибольшее простое число $< 2n$. Действительно, в [6] доказано, что найдется такая плоскость Π, что в $K \cap \Pi$ вписан правильный p-угольник, а значит $K \cap \Pi$ пересекается с окружностью не менее, чем в $p+1$ точках и по теореме Бляшке имеет не менее $p+1$ вершин. Таким образом, сформулированная выше задача решена для простых $2n-1$, а также "решена асимптотически".

Неулучшаема ли оценка $2n$ и верна ли она для невыпуклых гладких K? Верно ли это утверждение, если вместо тела K рассмотреть непрерывное поле гладких овалов в двумерных плоскостях, проходящих через $O \in \mathbb{R}^n$? Верно ли, что если ставить тот же вопрос об аффинных вершинах овала, то ответ будет $2n+2$?

Другое направление обобщения теоремы о 4 вершинах овала состоит в следующем.

Пусть в двумерных плоскостях, проходящих через точку $O \in \mathbb{R}^n$, задано непрерывное поле C^{2n-1}-гладких овалов. Верно ли, что для некоторой точки A одного из овалов этого поля выполняется условие

$$k'(A) = k''(A) = \cdots = k^{(2n-3)}(A) = 0,$$

где k – кривизна овала в точке A?

Отметим также, что последняя гипотеза получится предельным переходом (при сближении вершин $2n$-угольника) из гипотезы о том, что всякий вписанный в окружность $2n$-угольник подобно вписан в некоторый овал из рассматриваемого поля.

§3. О четырехугольниках, вписанных в пространственную кривую

Заданный четырехугольник посредством подобного преобразования нельзя вписать в типичную гладко вложенную в $\mathbb{R}^3$ окружность γ. Действительно, группа подобных преобразований $\mathbb{R}^3$ семимерна, а условие вписанности четырехугольника в γ налагает на него 8 ограничений.

Однако вполне могут существовать однопараметрические семейства четырехугольников, обладающие тем свойством, что во всякую гладко вложенную окружность $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ вписан подобный образ одного из них.

Например, в [7] доказано, что во всякую незаузленную гладко вложенную окружность $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ вписан “скрученный квадрат”, т.е. четырехугольник, полученный из квадрата поворотом одной из его сторон на некоторый угол вокруг средней линии квадрата, проходящей через ее середину.

Стромквист доказал, что на гладко вложенной в $\mathbb{R}^n$ окружности лежат такие четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4, что

$$|A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_3A_4| = |A_4A_1| \quad \text{и} \quad |A_1A_3| = |A_2A_4|.$$

Назовем *k-диагональю* замкнутой ломаной $A_1 \dots A_n$ отрезок с концами в двух ее вершинах, соединяющихся k-звенной частью данной ломаной при некотором ее обходе.

Теорема 3. *Пусть на стандартной окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ задана непрерывная относительно стандартной метрики метрика ρ такая, что существует равномерный по x предел*

$$\lim_{y \to x} \frac{\rho(x, y)}{|x - y|},$$

являющийся положительной непрерывной функцией аргумента x. Пусть $g\colon S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда для любых натуральных m и k таких, что $2 \leqslant k < m$, в S^1 вписана ломаная

$A_1 \ldots A_m$ с

$$\rho(A_1, A_2) = \rho(A_2, A_3) = \ldots = \rho(A_m, A_1),$$

у которой имеются две k-диагонали AB и CD с $g(A, B) = g(C, D)$.

Заданную метрику ρ на окружности можно сколь угодно хорошо приблизить гладкой и положительной вне диагонали функцией на $S^1 \times S^1$ (возможно с потерей неравенства треугольника) с сохранением данного в теореме условия "локального выпрямления" для ρ (с той же предельной функцией). Поэтому в дальнейшем мы считаем $\rho(x, y)$ гладкой функцией своих аргументов при $x \neq y$. В остальных случаях доказательство получается предельным переходом.

Доказательство. Пусть $U \subset (S^1)^m$ – открытое подмножество таких наборов различных точек $(A_1, \ldots, A_m)$ окружности S^1, которые следуют друг за другом на ориентированной окружности S^1 в указанном порядке.

Рассмотрим гладкое отображение

$$F\colon U \to \mathbb{R}^m, \quad (A_1, \ldots, A_m) \mapsto (\rho(A_1, A_2), \rho(A_2, A_3), \ldots, \rho(A_m, A_1)).$$

Положим $M = F^{-1}(l)$, где прямая $l \subset \mathbb{R}^m$ задана уравнениями $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$.

Ясно, что M – компактное подмножество в $(S^1)^m$, так как никакие 2 точки из A_i не могут неограниченно сближаться. (Действительно, по определению M сближаться могут лишь все точки A_i одновременно, но это противоречит наложенному на функцию ρ условию локального выпрямления.)

Для типичной функции ρ отображение F трансверсально к прямой l и множество M является гладким компактным одномерным ориентированным подмногообразием $(S^1)^m$, т.е. конечным набором гладко вложенных в $(S^1)^m$ ориентированных окружностей.

Для $1 \leqslant i \leqslant m$ введем проекции на i-й сомножитель

$$\pi_i\colon (S^1)^m \to S^1, \quad \pi_i(A_1, \ldots, A_m) = A_i.$$

Теми же буквами π_i будем в дальнейшем обозначать сужения $\pi_i\colon M \to S^1$. Заметим, что все отображения $\pi_i\colon M \to S^1$ гомотопны. Покажем, что если функция ρ достаточно хорошо приближает исходную метрику, то $\deg(\pi_i) = 1$. Степень отображения π_i не зависит от выбора типичной функции ρ, так как любые две такие функции гладко гомотопны, поэтому корректно определен класс сингулярного бордизма отображения π_i. Остается заметить, что для метрики ρ, индуцированной стандартным вложением окружности $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, многообразие $M \cong S^1$ и отображение $\pi_i \colon M \to S^1$ является гомеоморфизмом.

В множестве U действует циклическая группа $\mathbb{Z}_m$ циклическими перестановками точек A_i. Очевидно, что многообразие M инвариантно относительно этого действия.

Покажем, что многообразие M содержит связную компоненту M_1, переходящую в себя под действием ненулевого элемента $\mathbb{Z}_m$.

Рассмотрим сначала случай четного m. Покажем, что в этом случае найдется компонента $M_1 \hookrightarrow M$, переходящая в себя под действием нечетной степени образующей группы $\mathbb{Z}_m$.

Группа $\mathbb{Z}_m$ действует в множестве $\pi_0(M)$ компонент связности многообразия M. Требуемое утверждение равносильно тому, что одна из $\mathbb{Z}_m$-орбит в $\pi_0(M)$ состоит из нечетного числа компонент. Это так, потому, что степень сужения проекции π_1 на орбиту, состоящую из четного числа компонент, заведомо четно, а степень отображения $\pi_1 \colon M \to S^1$ равна 1.

Если же m нечетно и нет требуемой инвариантной компоненты $M_1 \hookrightarrow M$, то $\mathbb{Z}_m$-орбиты всех компонент $\pi_0(M)$ состоят из m компонент. При этом действие $\mathbb{Z}_m$ в M сохраняет ориентацию, и степень отображения $\pi_1 \colon M \to S^1$ делится на m.

Пусть компонента $M_1 \hookrightarrow M$ переходит в себя под действием ненулевого элемента $a \in \mathbb{Z}_m$, а l – наименьшее натуральное число такое, что $la = 0$. Определим на M_1 непрерывную функцию

$$f(A_1, \dots, A_m) = g(A_1, A_{l+1}) - g(aA_1, aA_{l+1}).$$

Очевидно, что

$$f(A_1, \dots, A_m) + f(aA_1, \dots, aA_m) + \cdots f((l-1)aA_1, \dots, (l-1)aA_m) = 0,$$

поэтому f обращается в 0 в некоторой точке, что и требовалось. □

Замечания. 1. Если $g(x,y) = \rho(x,y)$, метрика ρ индуцирована гладким вложением $S \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 4$, а $k = 2$, то получается вышеупомянутая теорема Стромквиста, а при других n и k – другие утверждения такого же типа.

2. Условия “локальной выпрямляемости”, налагаемые на метрику ρ, можно заменять на некоторые другие близкие условия. Автору не известно, верна ли теорема 3 для произвольной непрерывной метрики ρ.

Теорема 4. *Пусть на стандартной окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ задана метрика ρ, удовлетворяющая условию теоремы 3, и задано непрерывное отображение $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^n$, где n нечетно. Тогда в окружность S можно вписать ρ-равнозвенную ломаную $A_1, \dots, A_{n+1}$ такую, что точки $f(A_1), \dots, f(A_{n+1})$ лежат в некоторой гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 3, для типичной функции ρ найдем в многообразии равнозвенных вписанных $(n+1)$-звенных замкнутых ломаных $M \hookrightarrow (S^1)^{n+1}$ такую компоненту $M_1 \hookrightarrow M$, которая переходит в себя при перестановке набора точек $(A_1, \dots, A_{n+1})$ на нечетное число позиций.

Рассмотрим на M_1 непрерывную функцию

$$F(A_1, \dots, A_{n+1}) = \left(\overline{f(A_1)f(A_2)}, \overline{f(A_2)f(A_3)}, \dots, \overline{f(A_n)f(A_{n+1})}\right)$$

– ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах, перечисленных в скобках.

Легко видеть, что

$$F(A_2, \dots, A_{n+1}, A_1) = -F(A_1, A_2, \dots, A_{n+1}),$$

т.е. при циклическом сдвиге набора точек $(A_1, \dots, A_{n+1})$ на нечетное число позиций значение функции F меняет знак. Поэтому $F(A_1, \dots, A_{n+1}) = 0$ в некоторой точке из M_1, что и требовалось. $\square$

Замечания. 1. Если n нечетно, отображение f – гладкое вложение, а ρ – индуцированная им метрика, то получается теорема о возможности вписать в гладко вложенную в пространство $\mathbb{R}^n$ нечетной размерности окружность равнозвенную $(n+1)$-звенную замкнутую ломаную, лежащую в некоторой гиперплоскости.

Для $n = 3$ получаем

Следствие. *Во всякую гладко вложенную в $\mathbb{R}^3$ окружность вписан некоторый ромб.*

Автору неизвестно, обобщаются ли эти утверждения на топологически вложенные окружности.

2. Отметим также случай, когда ρ – внутренняя метрика, индуцированная погружением $f\colon \gamma \looparrowright \mathbb{R}^n$.

Из теоремы 4 следует, что всякая регулярная кривая γ в $\mathbb{R}^n$ с нечетным n содержит $n+1$ точек $A_1, \dots, A_{n+1}$, лежащих в одной гиперплоскости и таких, что все дуги $A_1A_2, , A_2, A_3, \dots, A_{n+1}A_1$ кривой γ имеют равную длину. То есть регулярную кривую γ в $\mathbb{R}^n$ при нечетном n можно рассечь гиперплоскостью на $n+1$ частей равной длины.

Литература

1. S. Mukhopadhayaya, *New methods in the geometry of planar arc-I, cyclic, and sextactic points.* — Bull. Calcutta Math. Soc. **1** (1909), 31–37.
2. О. Р. Мусин, *Экстремумы кривизны и теорема о 4 вершинах для многоугольников и многогранников.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **280** (2001), 251–271.
3. В. Макеев, *О четырехугольниках, вписанных в замкнутую кривую.* — Мат. заметки **57**, No. 1 (1995), 129–132.
4. Л. Г. Шнирельман, *О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых.* — Успехи мат. наук **10** (1944), 34–44.
5. R. C. Bose, *On the number of circles of curvature perfectly enclosing or perfectly enclosed by a closed oval.* — Math. Ann. **35** (1932), 16–24.
6. В. Макеев, *Вписанные и описанные многогранники выпуклого тела.* — Мат. заметки **55**, No. 4 (1994), 128–130.
7. H. Griffits, *The topology of square pegs in round holes.* — Proc. London Math. Soc. **363** (1991), 647–672.

Makeev V. V. On quadrangles inscribed in a closed curve and the vertices of the curve.

Let $ADCDE$ be a pentagon inscribed in a circle. It is proved that if γ is a C^4-generic smooth convex planar oval with 4 vertices (stationary points of curvature), then there are 2 similarities φ such that the quadrangle $\varphi(ABCD)$ is inscribed in γ and the point $\psi(E)$ lies inside γ, as well as 2 similarities ψ such that the quadrangle $\psi(ABCD)$ is inscribed in γ and $\psi(E)$ lies outside γ. It is also proved that any circle $\gamma \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ smoothly embedded in the space $\mathbb{R}^n$ of odd dimension contains the vertices of an equilateral $(n+1)$-link polygonal line lying in a hyperplane of $\mathbb{R}^n$.

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Поступило 25 января 2003 г.