Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

В. В. Макеев

ОБ АФФИННЫХ ДИАМЕТРАХ И ХОРДАХ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ

Всюду далее под *выпуклым телом* $K \subset \mathbb{R}^n$ (*выпуклой фигурой* при $n = 2$) понимаем компактное выпуклое множество с непустой внутренностью. *Хордой* выпуклого тела называем отрезок, соединяющий две его граничные точки. Хорда тела K называется *аффинным диаметром*, если ее концы принадлежат параллельным опорным гиперплоскостям тела K.

Главное внимание в данной работе уделяется аффинным диаметрам выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$, а также хордам выпуклой фигуры $K \subset \mathbb{R}^2$, делящим ее площадь $S(K)$ в заданном отношении.

§1. Об аффинных диаметрах выпуклого тела

Хорошо известно [1, 2], что через всякую внутреннюю точку выпуклого тела K проходит его аффинный диаметр, а также, что тело K имеет аффинный диаметр любого наперед заданного направления (единственный в случае строго выпуклого тела). Через всякую граничную точку гладкого строго выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ проходит ровно один его аффинный диаметр. Таким образом, пространство $p(K)$ аффинных диаметров гладкого строго выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфно вещественному проективному пространству $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Известно, что аффинные диаметры выпуклого тела K имеют много взаимных пересечений. В [3] доказано, что любой аффинный диаметр выпуклого тела K пересекается с каким-либо другим, а в [5] доказано, что он пересекается с континуумом других аффинных диаметров тела K. Нижеследующая теорема является многомерным обобщением утверждения о том, что для любых двух аффинных диаметров трехмерного выпуклого тела найдется аффинный диаметр тела, который их пересекает [5].

Теорема 1. *Пусть $L_1, L_0 \subset \mathbb{R}^n$ – линейные подпространства с $\dim L_1 + \dim L_2 \geqslant n - 1$ и $K \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное выпуклое тело. Тогда найдется аффинный диаметр d тела K, пересекающий для*

$i = 1, 2$ некоторый аффинный диаметр d_i тела K, параллельный подпространству L_i.

Доказательство. Теорему достаточно доказать для тела K с C^2-гладкой границей положительной гауссовой кривизны. (Для остальных тел $K \subset \mathbb{R}^n$ теорема получается предельным переходом.) Множество $p(K)$ аффинных диаметров тела $K \subset \mathbb{R}^n$ рассматриваемого класса гомеоморфно $\mathbb{RP}^{n-1}$.

Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ линейное подпространство размерности $k \geqslant 1$. Тогда для типичного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ с C^2-гладкой границей положительной гауссовой кривизны множество $m(L)$ аффинных диаметров K, пересекающих параллельные подпространству L аффинные диаметры тела K является компактным гладким k-мерным подмногообразием пространства $p(K)$. $\bullet$

Лемма. *Многообразие $m(L)$ реализует образующую группы $H_k(p(K); \mathbb{Z}_2)$.*

Утверждение леммы следует из того, что индекс пересечения в $p(K)$ многообразия $m(L)$ и многообразия аффинных диаметров, параллельных ортогональному дополнению $L^\perp$, равен 1 по модулю 2. Последнее утверждение следует из того, что легко построить близкое к шару тело K, для которого $m(L)$ содержит ровно один перпендикулярный L аффинный диаметр тела K. $\bullet$

Теперь утверждение теоремы 1 следует из того факта, что для типичного тела K циклы $m(L_1)$ и $m(L_2)$ имеют ненулевой индекс пересечения в $p(K) \cong \mathbb{RP}^{n-1}$. $\bullet$

В [6] доказано, что у всякого выпуклого трехмерного тела имеются 3 взаимно перпендикулярных диаметра, пересекающихся в одной точке. Каково наибольшее число $k(n)$ такое, что у всякого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ найдутся $k(n)$ взаимно перпендикулярных диаметров, пересекающихся в одной точке? Из [6] следует, что $k(3) = 3$. Имеется простое ограничение на $k(n)$. Размерность пространства наборов k прямых k заданных направлений равна $k \cdot (n-1)$, и среди них лишь подмножество размерности n состоит из наборов прямых, имеющих общую точку. Поскольку размерность пространства наборов из k взаимно ортогональных направлений равна $\frac{2n-k-1}{2} \cdot k$, то получается ограничение $k(n)(n-1) \leqslant n + \frac{2n-k(n)-1}{2} \cdot k(n)$ или

$$k^2(n) - k(n) \leqslant 2n.$$

Из полученного неравенства следует, что $k(4) \leqslant 3$ и $k(5) \leqslant 3$. Если верно, что $k(n) \geqslant 3$ при $n \geqslant 3$, то $k(4) = k(5) = 3$, однако доказательство этого автору не известно.

Пусть $G_k(\mathbb{R}^n)$ – грассманиан неориентированных k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$ и

$$\gamma_k^n : E_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$$

– тавтологическое расслоение. Нам понадобится тот факт, что индекс пересечения $n-k+1$ образующих старшей нетривиальной группы гомологий $H_{n(n-k)}(E_k(\mathbb{R}^n);\mathbb{Z}_2)$ равен 1 по модулю 2 (см. [4]). Такие циклы можно представлять как пересекающиеся с типичным слоем расслоения γ_k^n в нечетном числе точек.

Теорема 2. 1. *Вокруг всякого гладкого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ можно описать прямоугольный параллелепипед такой, что три аффинные диаметра тела K с концами на противоположных гранях этого параллелепипеда пересекаются в одной точке.*

2. *У всякого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^4$ имеется 4 взаимно ортогональных аффинных диаметра, один из которых пересекается с тремя остальными.*

3. *Вокруг всякого гладкого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^4$ можно описать прямоугольный параллелепипед такой, что один из четырех аффинных диаметров K с концами на противоположных гранях параллелепипеда пересекается с тремя остальными.*

Доказательство. 1) Докажем, что для типичного гладкого строго выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ имеется нечетное число параллелепипедов с указанным в п. 1 свойством. Четность числа таких параллелепипедов не зависит от выбора тела K. Если в качестве $K \subset \mathbb{R}^3$ выбрать строго выпуклое тело постоянной ширины, то искомые тройки аффинных диаметров превращаются в тройки взаимно ортогональных диаметров тела K. В [6] показано, что типичное тело постоянной ширины в $\mathbb{R}^3$ имеет нечетное число троек пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных диаметров.

2) Покажем, что для типичного гладкого строго выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^4$ имеется нечетное число указанных в п. 2 четверок аффинных диаметров и нечетное число указанных в п. 3 прямоугольных параллелепипедов.

В качестве K возьмем гладкое тело постоянной ширины. Для таких тел вышесформулированные утверждения (и утверждения 2 и 3 теоремы) совпадают.

Пусть $P \subset \mathbb{R}^4$ – произвольная гиперплоскость, проходящая через некоторую точку $O \in \mathbb{R}^4$, и $\pi_P : \mathbb{R}^4 \to P$ – ортогональное проектирование на плоскость P. Очевидно, что $\pi_P(K)$ – гладкое тело постоянной ширины в P и в типичном случае в нем имеется нечетное число точек A_P, в которых пересекаются 3 взаимно перпендикулярных диаметра тела $\pi_P(K)$ (см. [6]). Обозначим через $G_3(\mathbb{R}^4)$ грассманиан неориентированных 3-плоскостей P, проходящих через O, и пусть $E_3(\mathbb{R}^4) \to G_3(\mathbb{R}^4)$ – тавтологическое расслоение. Множество

$$\bigcup_{P \in G_3(\mathbb{R}^4)} A_P \subset E_3(\mathbb{R}^4)$$

является носителем трехмерного $\mathbb{Z}_2$-цикла C_1, пересекающего типичный слой в нечетном числе точек.

В каждой из рассматриваемых плоскостей P отметим ее точку пересечения с прямой, на которой лежит перпендикулярный P диаметр тела K. Выбранные точки образуют в $E_3(\mathbb{R}^4)$ трехмерный $\mathbb{Z}_2$-цикл C_2, пересекающий трансверсально и однократно все слои расслоения.

Из вышесказанного очевидно, что циклы C_1 и C_2 имеют единичный индекс пересечения по модулю 2. Следовательно, пересечение их носителей в типичной ситуации состоит из нечетного числа точек и соответственно в такой ситуации имеется нечетное число требуемых четверок аффинных диаметров тела K. $\bullet$

§2. Две теоремы о хордах выпуклых компактов

Нижеследующая теорема является топологическим обобщением свойств аффинных диаметров выпуклого тела K, сформулированных в первом абзаце §1.

Теорема 3. *Пусть $K \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ – топологически вложенный n-мерный шар с границей ∂K, и пусть $f : \partial K \to \partial K$ – непрерывная инволюция без неподвижных точек. Тогда:*

1) *для всякой внутренней точки $O \in K$ найдется точка $x \in \partial K$ такая, что $O \in [x, f(x)]$;*

2) *для произвольной прямой* $l \subset \mathbb{R}^n$ *найдется точка* $x \in \partial K$ *такая, что отрезок* $[x, f(x)]$ *параллелен* l.

Доказательство. Сопоставим с парой (K, f) два многообразия: $L(K)$ и $M(K)$.

Многообразие $L(K)$ получается из ∂K попарным отождествлением точек x и $f(x)$ для $x \in \partial K$. Очевидно, что $L(K)$ – компактное $(n-1)$-мерное многообразие.

Положим

$$M(K) := \bigcup_{y=\{x,f(x)\}\in L(K)} [x, f(x)] \times \{y\} \subset \mathbb{R}^n \times L(K).$$

Очевидно, что $M(K)$ – компактное n-мерное многообразие с краем, гомеоморфным ∂K.

1) Естественное отображение $p\colon M(K) \to \mathbb{R}^n$ дает "пленку", затягивающую ∂K. Поскольку ∂K не ограничивает в дополнении любой точки из K, то $K \subset p(M(K))$.

2) Заметим, что имеет место изоморфизм колец $H^*(L(K);\mathbb{Z}_2) \cong H^*(\mathbb{R}P^{n-1};\mathbb{Z}_2)$. (В действительности, $L(K)$ и $\mathbb{R}P^{n-1}$ даже гомотопически эквивалентны.) Действительно, до размерности $n-2$ включительно это так потому, что $L(K)$ можно превратить в пространство $K(\mathbb{Z}_2, 1)$, приклеивая клетки размерности $\geqslant n$. Произведения нетривиальных элементов $H^*(L(K);\mathbb{Z}_2)$, имеющие размерность $n-1$, также нетривиальны по двойственности Пуанкаре.

Рассмотрим непрерывное отображение $g\colon L(K) \to \mathbb{RP}^{n-1}$, сопоставляющее с парой точек $x, f(x) \in \partial K$ проходящую через точку $O \in \mathbb{R}^n$ прямую, параллельную отрезку $[x, f(x)]$. Тогда g – сюръекция, поскольку имеет степень $1 \bmod 2$. Последнее условие выполняется, так как g по построению накрывается $\mathbb{Z}_2$-эквивариантным отображением сфер. Следовательно, индуцированный гомоморфизм

$$g^*\colon H^1(\mathbb{RP}^{n-1};\mathbb{Z}_2) \to H^1(L(K);\mathbb{Z}_2)$$

нетривиален, а потому нетривиален элемент

$$g^*(\alpha^{n-1}) = (g^*(\alpha))^{n-1} \in H^{n-1}(L(K);\mathbb{Z}_2),$$

где $\alpha \in H^1(\mathbb{RP}^{n-1};\mathbb{Z}_2)$ – образующая. Теорема 3 доказана. $\bullet$

Следствие. *Пусть* $K \subset \mathbb{R}^2$ *– выпуклая фигура с границей* ∂K *и* $f\colon \partial K \to \partial K$ *– инволюция без неподвижных точек. Тогда найдется единственная хорда фигуры* K*, соединяющая некоторые точки* x *и* $f(x)$ *границы* ∂K*, имеющая наперед заданное направление.*

Доказательство. Существование такой хорды следует из теоремы 3. Если бы существовали две параллельные хорды $[x, f(x)]$ и $[y, f(y)]$ для $x, y \in \partial K$, то x и $f(x)$ принадлежали бы одной дуге из пары дуг, на которые ∂K разбивается точками y и $f(y)$. Но тогда эта дуга была бы f-инвариантной, что противоречит отсутствию неподвижных точек у инволюции f. $\bullet$

Обозначения. Пусть

$$D(K) := \{x - y \mid x, y \in K\}$$

– разностное множество фигуры K. Обозначим через $d(\phi)$ длину хорды $[x, f(x)]$, составляющей угол ϕ с осью абсцисс для $0 \leqslant \phi < \pi$. Пусть $I(f) := \int_0^\pi d^2(\phi)d\phi$

Теорема 4. *Имеют место неравенства*

$$2S(K) \leqslant I(f) \leqslant S(D(K)),$$

причем правое равенство достигается, если для любого $x \in \partial K$ *точки* x *и* $f(x)$ *являются концами аффинного диаметра фигуры* K*. Левое неравенство также неулучшаемо, поскольку при стремлении длины кратчайшей хорды* $d(\phi)$ *к нулю значение функционала* $I(f)$ *приближается к* $2S(K)$*.*

Доказательство. Доказательство достаточно провести для случая, когда фигура K имеет гладкую строго выпуклую границу ∂K и инволюция f – гладкая. В остальных случаях теорема получается предельным переходом.

Площадь, заметаемая хордой $[x, f(x)]$ при повороте на малый угол $\Delta\phi$, приближенно равна

$$S(\Delta\phi) = \frac{d^2(\phi)}{2}(\lambda^2(\phi) + (1 - \lambda(\phi))^2) \cdot \Delta\phi,$$

где $\lambda(\phi)$ – часть хорды, отсекаемой от нее близкой к ней хордой. Следовательно,

$$S(\Delta\phi) \leqslant \frac{d^2(\phi)}{2}\Delta\phi$$

и потому

$$S(K) \leqslant \int_0^\pi \frac{d^2(\phi)}{2} d\phi,$$

что доказывает левое неравенство.

Если одна из хорд стягивается к точке $A \in \partial K$, то вся конфигурация хорд фигуры сходится к такой, когда все хорды имеют общий конец $A \in \partial K$. В этом случае $\int_0^\pi d^2(\phi)\, d\phi = 2S(K)$.

Очевидно, что $I(f) = \int_0^\pi d^2(\phi) d\phi$ достигает максимума, когда все хорды $xf(x)$ являются аффинными диаметрами, поскольку аффинный диаметр – самая длинная хорда фигуры K заданного направления. Но в этом случае очевидно, что

$$\int_0^\pi d^2(\phi) d\phi = S(D(K)),$$

так как отрезок, соединяющий центр фигуры $D(K)$ с граничной точкой $\partial D(K)$, имеет длину параллельного ему аффинного диаметра фигуры K. $\bullet$

§3. О хордах, делящих площадь выпуклой фигуры в заданном отношении

Следуя [1], обозначим через $f(H)$ не превосходящее единицы отношение площадей двух частей фигуры $K \subset \mathbb{R}^2$, на которые она разделена прямой H. Положим

$$F(K) := \max_{p \in K} \min_{H \ni p} f(H).$$

Нетрудно видеть, что F – непрерывный аффинно-инвариантный функционал, определенный на выпуклых фигурах $K \subset \mathbb{R}^2$, принимающий значения в $[0; 1]$ и равный 1 лишь на центрально-симметричных выпуклых фигурах $K \subset \mathbb{R}^2$. Функционалы с перечисленными свойствами называются в [1] *мерами симметрии*, а функционал F называется *мерой симметрии Винтерница*. Известно, что $F(K) \geqslant 4/5$ (см. [1]).

Теорема 5. *Пусть K – выпуклая фигура. Тогда для всякого числа $\lambda \in [F(K), 1]$ выполняется неравенство $S(K) \leqslant \pi d^2/4$, где d – наибольшая из длин хорд фигуры K, делящих ее площадь в отношении λ.*

Доказательство. Очевидно, что теорему достаточно доказать для фигур K с гладкой границей ∂K и с $F(K) < \lambda \leqslant 1$, что мы и предполагаем в дальнейшем. В остальных случаях теорема получается предельным переходом.

Для всякого $\lambda \in [F(K); 1]$ через каждую точку фигуры K проходит хорда, делящая площадь фигуры K в отношении λ. Для всякой ориентированной проходящей через точку p хорды AB фигуры K обозначим через $\lambda_p(AB)$ отношение площадей частей фигуры K, лежащих справа и слева от AB. Очевидно, что $\lambda_p(AB) = \frac{1}{\lambda_p(BA)}$. Отсюда по соображениям непрерывности следует, что для некоторой проходящей через точку $p \in K$ хорды AB выполняется $\lambda_p(AB) = 1$. Поскольку по определению числа $F(K)$ через всякую точку $p \in K$ проходит хорда AB с $\lambda_p(AB) \leqslant F(K)$, то по соображениям непрерывности функция λ_p принимает все значения из отрезка $[F(K); 1]$.

Над множеством S^1 ориентированных прямых, проходящих через точку $O \in \mathbb{R}^2$, имеется тавтологическое расслоение $\gamma\colon \mathcal{E} \to S^1$, в котором слоем над прямой является она же, рассматриваемая как подмножество в $\mathbb{R}^2$. Пусть $E \subset \mathcal{E}$ – подмножество, состоящее из единичных отрезков слоев с серединой в $O \in \mathbb{R}^2$. Очевидно, что E гомеоморфно стандартному плоскому кольцу.

Рассмотрим отображение $g_\lambda\colon E \to K$, переводящее рассматриваемый направленный единичный отрезок слоя линейно в сонаправленную с ним хорду AB фигуры K с $\lambda(AB) = \lambda$. Отображение g гладко в силу гладкости K и сюръективно, как показано выше.

По построению $g(\partial E) \subset \partial K$. Покажем, что степень индуцированного отображения $g\colon (E, \partial E) \to (K, \partial K)$ равна нулю. Поскольку все гладкие фигуры K гладко деформируемы друг в друга, то эта степень не зависит от выбора K. Если же K – круг, а $\lambda \neq 1$, то отображение g_λ не сюръективно.

Пусть $K_i \subset K$ – множество точек, через которые проходит ровно i хорд AB фигуры K с $\lambda(A, B) = \lambda$. По определению

$$K_i = \{p \in K \mid \#(g_\lambda^{-1}(p)) = i\}.$$

Так как $\deg(g_\lambda) = 0$, то при нечетном i имеем $K_i \subset \operatorname{Crit}(g_\lambda)$, откуда по лемме Сарда

$$S(K_1) = S(K_3) = \cdots = S(K_\infty) = 0$$

и следовательно

$$S(K_2) + S(K_4) + \cdots = S(K).$$

Очевидно, что две близкие хорды, делящие площадь фигуры K в одинаковом отношении, пересекаются вблизи своих середин. Следовательно такая хорда длины d, повернувшись на маленький угол $\Delta\phi$, заметает площадь $\Delta S \approx \frac{d^2}{4}\Delta\phi$. Поэтому

$$2S(K_2) + 4S(K_4) + \cdots = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d^2(\phi)}{4} d\phi,$$

и тем более

$$2S(K) \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \frac{d^2(\phi)}{4} d\phi,$$

где $d(\phi)$ – длина рассматриваемой ориентированной хорды, составляющей угол ϕ с фиксированным направлением. Из полученного неравенства следует утверждение теоремы. •

Замечание. Случай $\lambda = 1$ был ранее рассмотрен в работе [7].

Литература

1. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* М., 1971.
2. B. Grünbaum, *On some properties of convex sets.* — Colloq. Math. **8** (1961), 39–42.
3. В. Л. Дольников, *Об одном вопросе Грюнбаума.* — В кн.: Исследования по теории функций нескольких вещественных переменных. Ярославль, 1976, с. 34–35.
4. В. Л. Дольников, *Трансверсали семейств множеств в* $\mathbb{R}^n$ *и связи между теоремами Хелли и Борсука.* — Мат. сб. **184**, № 5 (1993), 111–131.
5. В. В. Макеев, *О пересечениях аффинных диаметров выпуклого тела.* — Укр. геом. сб. **33** (1990), 70–73.
6. В. В. Макеев, *Специальные конфигурации плоскостей, связанные с выпуклым компактом.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **252** (1998), 165–174.
7. В. В. Макеев, *Кинематическая формула для аффинных диаметров и аффинных медиан выпуклой фигуры.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **280** (2001), 234–238.

V. V. Makeev. On affine diameters and chords of convex compacta. Existence theorems are proved for collections of affine diameters of a convex body that satisfy various additional conditions.

The area of a convex planar figure is estimated via the maximal length of a chord dividing the area of the figure in a given ratio.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 25 декабря 2001 г.