Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

В. В. Макеев

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ ПЕРИМЕТРА НЕСИММЕТРИЧНОГО ЕДИНИЧНОГО КРУГА НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО

Пусть K – *выпуклая фигура* на аффинной плоскости A^2, т.е. компактное выпуклое множество с непустой внутренностью, и O – внутренняя точка фигуры K. Как обычно, точки плоскости A^2 мы отождествляем с их радиус-векторами, отложенными от зафиксированного начала координат $O \in A^2$.

Дистанционной или *калибровочной* функцией Минковского для пары (K, O) [1] называется функция

$$g(\overline{x}) = \inf\left\{t > 0 \mid \ \overline{x} \in tK\right\}.$$

Таким образом на плоскости A^2 фигура K, которую называем *нормирующей*, выполняет роль единичного круга с центром O.

Во всем дальнейшем $S(K)$ обозначает площадь фигуры $K \subset A^2$.

Под *длиной* ломаной $A_1 \ldots A_n$ понимаем

$$l(A_1 \ldots A_n) = \sum_{i=1}^{n-1} g\left(\overline{A_i A}_{i+1}\right).$$

Заметим, что $l(A_1 \ldots A_n)$ и $l(A_n A_{n-1} \ldots A_1)$, вообще говоря, различны и всегда совпадают лишь в случае, когда O – центр симметрии фигуры K.

Определим для выпуклого многоугольника $K \subset A_2$ два периметра: $p_+(K)$ и $p_-(K)$. Под $p_+(K)$ мы понимаем длину границы K, обходимой против часовой стрелки, а под $p_-(K)$ – длину границы K, обходимой по часовой стрелке.

Теперь по непрерывности периметры $p_+(K)$ и $p_-(K)$ могут быть определены для произвольной выпуклой фигуры $K \subset A_2$ (подробности см. [2, 3]).

Решетняк [4] и несколько позднее Лаугвиц [5] установили, что значения периметра центрально симметричного относительно $O \in A^2$ единичного круга $K \subset A^2$ меняются в промежутке

[6; 8], причем значение 6 достигается для аффинно-правильного шестиугольника, а значение 8 – для параллелограма.

В. И. Дискант сформулировал задачу нахождения множества значений для $p_+(K)$ и $p_-(K)$ для несимметричного единичного круга K и высказал предположение, что наименьшее значение этих периметров равно 6, что и доказал А. И. Щерба [2, 3].

Простые примеры показывают, что периметры $p_+(K)$ и $p_-(K)$ могут принимать сколь угодно большие значения. Однако имеет место

Теорема 1. *Точку O можно выбрать внутри выпуклой нормирующей фигуры K так, что $p_+(K) \leqslant 9$ и $p_-(K) \leqslant 9$. Для треугольника K оценка не может быть улучшена.*

Доказательство. Докажем, что в качестве O можно взять центр вписанного в K аффинно-правильного шестиугольника M, существующего по теореме Безиковича [6].

Проведя в вершинах шестиугольника M опорные к K прямые, приходим к случаю, когда K – описанный вокруг M шестиугольник (рис. 1).

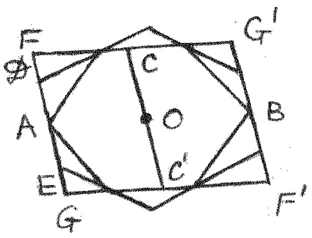

Рис. 1.

Пусть ED – сторона шестиугольника K, проходящая через вершину A шестиугольника M, а CC' – параллельное ей центральное сечение шестиугольника M. Проведем через симметричную вершине A вершину B шестиугольника M прямую, параллельную прямой ED, а также проведем прямые через противоположные стороны шестиугольника M, на которых лежат точки C и C' (рис. 1).

Четыре проведенные прямые ограничивают параллелограмм $FGF'G'$ (рис. 1) и очевидно, что $S(FGF'G') = \frac{4}{3}S(M)$.

Ясно, что

$$\max\left(g(\overline{ED}), g(\overline{DE})\right) \leqslant \frac{ED}{OC} = 8\frac{S(OED)}{S(FGF'G')} = 6\frac{S(EOD)}{S(M)},$$

т.е.

$$\max\left(g(\overline{ED}), g(\overline{DE})\right) \leqslant 6\frac{S(EOD)}{S(M)}.$$

Складывая полученные неравенства для всех сторон шестиугольника K, получим

$$\max\left(p_+(K), p_-(K)\right) \leqslant \frac{S(K)}{S(M)}.$$

Для завершения доказательства воспользуемся известным неравенством $S(K) \leqslant \frac{3}{2}S(M)$ (см. [6]). $\square$

Далее заметим, что для произвольной нормирующей фигуры K существует единственный способ выбрать центр O так, чтобы $p_+(K)$ (соответственно $p_-(K)$) достигал наименьшего значения, поскольку имеет место следующая

Лемма. *Каждый из рассматриваемых периметров $p_\pm(K, O)$ является строго выпуклой функцией своего центра O внутри фигуры K.*

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай, когда K – многоугольник, и пусть $p_+(K, O)$ (соответственно $p_-(K, O)$) обозначает периметр нормирующей фигуры K с центром в O.

Достаточно доказать неравенство

$$p_-(K, O_3) < \frac{p_-(K, O_1) + p_-(K, O_2)}{2},$$

где O_3 – середина отрезка O_1O_2.

Покажем, что аналогичное неравенство имеет место на уровне вычисления длины каждой стороны многоугольника K.

Действительно, при $i = 1, 2, 3$ длина $l(AB)$ стороны AB многоугольника K при ее вычислении для центра O_i нормирующей фигуры K принимает значение AB/O_iB_i, где O_iB_i – длина отрезка, высекаемого фигурой K на выходящем из точки O_i сонаправленном с $\overline{AB}$ луче (рис. 2)

В силу выпуклости K имеем $O_3B_3 \geqslant \frac{O_2B_2+O_1B_1}{3}$, следовательно

$$\frac{AB}{O_3B_3} \leqslant \frac{2AB}{O_2B_2 + O_1B_1} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{O_2B_2} + \frac{AB}{O_1B_1}\right).$$

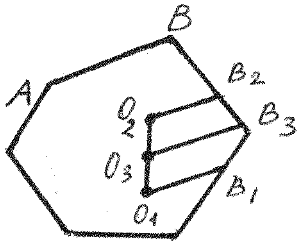

Рис. 2.

Причем равенство возможно лишь когда $O_1B_1 = O_2B_2 = O_3B_3$, что означает, что отрезок O_1O_2 параллелен стороне многоугольника K, на которой лежат точки B_1, B_2 и B_3. Так как отрезок O_1O_2 не может быть параллелен всем сторонам многоугольника K, то часть неравенств будет строгой, что и доказывает лемму. □

Следствием леммы является то, что искомый минимум может достигаться лишь в точках фигуры, инвариантных относительно всех ее аффинных автоморфизмов. Следовательно для треугольника K он может достигаться лишь для его центра тяжести, когда очевидно $p_+(K) = p_-(K) = 9$.

Следствие. *Через всякую внутреннюю точку O выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ проходит такая плоскость Π, что если в ней в качестве нормирующей фигуры выбрать $K_1 = K \cap \Pi$ с центром в точке O, то $\max\bigl(p_+(K), p_-(K)\bigr) \leqslant 9$. Для тетраэдров K данная оценка не может быть улучшена.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться доказательством теоремы 1 и тем, что плоскость Π можно выбрать так, чтобы точка O совпала с центром вписанного в $K_1 = K \cap \Pi$ аффинно-правильного шестиугольника.

Для доказательства неулучшаемости оценки рассмотрим в качестве K правильную пирамиду $ABCD$ с вершиной A, у которой боковые ребра во много раз длиннее ребер основания, и точку O выберем вблизи вершины A.

Тогда проведенные через O пересекающие основание пирамиды четырехугольные сечения очень вытянуты и в силу близости точек O и A имеют большой периметр. Для остальных треугольных сечений пирамиды неулучшаемость оценки доказана в теореме 1. □

Данная работа возникла после прослушивания автором доклада А. И. Щербы на 5-й международной конференции по геометрии и топологии памяти А. В. Погорелова в Черкассах [2] и полезных обсуждений с В. И. Дискантом и А. И. Щербой, которым автор выражает искреннюю благодарность

Литература

1. H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*. Leipzig–Berlin (1910).
2. А. И. Щерба, *Об оценке периметра нормирующей фигуры на плоскости Минковского.* В кн.: Тезисы докладов 5-й международной конференции по геометрии и топологии памяти А. В. Погорелова, Черкассы (2003).
3. А. И. Щерба, *Об оценке периметра единичного круга на плоскости Минковского.* — Тр. Рубцовского индустриального института в. 12 (2003), с. 96–107.
4. Ю. Г. Решетняк, *Одна экстремальная задача из теории выпуклых кривых.* — Успехи мат. наук **8**, No. 6 (1953), 125–126.
5. D. Laugwitz, *Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Raume.* — Math. Z. **61** (1954), 235–244.
6. A. Besicovitch, *Measure of asymmetry of convex curves.* — J. London Math. Soc. **23** (1945), 237–240.
7. В. В. Макеев, *Об аппроксимации плоских сечений выпуклого тела.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 174–183.

Makeev V. V. On estimating from above the perimeter of an asymmetric unit disk in the Minkowski plane.

It is proved that each convex planar fugure $K \subset \mathbb{R}^2$ contains a point O such that the perimeter of K computed with respect to the Minkowski distance function of the pair (K, O) is at most 9. If K is a triangle, then this estimate is sharp.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 25 сентября 2003 г.