Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

В. М. Нежинский

СИНГУЛЯРНЫЕ ЗАЦЕПЛЕНИЯ ПОЧТИ МЕТАСТАБИЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

§1. Введение

1.1. Формулировка задачи. *Сингулярным зацеплением типа* $(k_1, \dots, k_s)$ в S^n называется последовательность непрерывных отображений

$$f_1 : S^{k_1} \to S^n, \dots, f_s : S^{k_s} \to S^n$$

с попарно непересекающимися образами. Сингулярные зацепления $(f_1, \dots, f_s)$ и $(f_1', \dots, f_s')$ типа $(k_1, \dots, k_s)$ в S^n называются *псевдогомотопными*, если существует последовательность непрерывных отображений

$$F_i : S^{k_i} \times I \to S^n \times I, \quad i = 1, \dots, s,$$

с попарно непересекающимися образами, такая, что

$$F_i(x, 0) = (f_i(x), 0) \quad \text{и} \quad F_i(x, 1) = (f_i'(x), 1)$$

для $x \in S^{k_i}$ и $1 \leqslant i \leqslant s$. Обозначим через $M^n_{k_1,\dots,k_s}$ множество псевдогомотопических классов сингулярных зацеплений типа $(k_1, \dots, k_s)$ в S^n. Наша задача – изучить эти множества при условии, что $k_1, \dots, k_{s-1} \leqslant n - 3$.

1.2. Схема решения. Решение подчинено схеме, которая использовалась в [10–12] для изучения множества $M^{2k+1}_{k,\dots,k,p}$ с $k > 1$. Именно, сначала общая задача сводится к (трем) ее частным случаям, а затем каждый частный случай сводится, насколько это оказывается возможным, к стандартной гомотопической или алгебро-гомотопической задаче.

1.3. Благодарности. Часть этой работы была выполнена во время визитов в Институт математики им. М. Планка (г. Бонн,

---

Работа частично поддержана грантом немецкого математического общества DFG и грантом РФФИ 01-01-01014.

Германия) и в университет г. Зигена (Германия). Автор благодарит профессора Г. Й. Бауэса, профессора У. Кошорке и профессора У. Кайзера за приглашения и интерес к работе. Автор выражает благодарность Институту математики им. М. Планка и Университету г. Зигена за гостеприимство.

§2. Редукция общей задачи к ее частным случаям

Пусть $n, r, p_1, \ldots, p_r, p$ – натуральные числа, такие что $p_1, \ldots, p_r \leqslant n-3$.

Сингулярное зацепление $(f_1, \ldots, f_r, f)$ типа $(p_1, \ldots, p_r, p)$ в S^n называется *простым*, если для любого натурального $i \leqslant r$ сингулярное зацепление (f_i, f) псевдогомотопно стандартному тривиальному сингулярному зацеплению. Множество псевдогомотопических классов простых сингулярных зацеплений типа $(p_1, \ldots, p_r, p)$ в S^n будем обозначать через $\widetilde{M}^n_{p_1,\ldots,p_r,p}$.

Теорема. (a) *Существует каноническая биекция*

$$M^n_{p_1,\ldots,p_r,p} \to \widetilde{M}^n_{p_1,\ldots,p_r,p} \times M^n_{p_1,p} \times \cdots \times M^n_{p_r,p}.$$

(b) *Отображение "забывания"*

$$\delta(n, r, p_1, \ldots, p_r, p) : \widetilde{M}^n_{p_1,\ldots,p_r,p} \to M^n_{p_1,\ldots,p_r}$$

является сюрьекцией.

В случае $p_1 = \cdots = p_r$ и $n = 2p_1 + 1$ это доказано в [11, п. 2.2]. В общем случае доказательство аналогично.

Таким образом, для решения нашей задачи (см. 1.1) достаточно изучить множества $M^n_{p_i,p}$, $M^n_{p_1,\ldots p_r}$ и $(\delta(n, r, p_1, \ldots, p_r, p))^{-1}(u)$ для $u \in M^n_{p_1,\ldots,p_r}$.

§3. Редукции к стандартным гомотопическим и алгебро-гомотопическим задачам

В этом параграфе мы будем всюду предполагать, если не оговорено противное, что

$$p_i < \frac{2}{3}n - 1 \quad \text{и} \quad p < 3n - 3p_i - 5$$

для $i = 1, 2, \ldots, r$.

3.1. Множество $M^n_{p_i,p}$. Хорошо известно (см., например, [3] или [7]), что множество $M^n_{p_i,p}$ является абелевой группой относительно покомпонентного связного суммирования. Соответствующие редукции в литературе имеются; см., например, [2, 4, 7, 9].

3.2. Множество $M^n_{p_1,\dots,p_r}$. Простая прямая проверка показывает, что множество $M^n_{p_1,\dots,p_r}$ тоже является абелевой группой относительно покомпонентного связного суммирования. (См. [13] для $r=2$; ср. [5, 6, 8, 11].)

Сингулярное зацепление, составленное только из *гладких вложений*, называется *классическим зацеплением.*

Лемма. *Любое сингулярное зацепление псевдогомотопно классическому зацеплению.*

(Здесь существенно, что $p_1,\dots,p_r < \frac{2}{3}n-1$.)

Это простое прямое следствие классических теорем теории вложений. Ср. [13].

Положим

$$q_1 = n - p_1 - 1, \dots,\ q_r = n - p_r - 1.$$

Для натуральных $i \neq j$, не превосходящих r, определим отображение

$$\lambda_{i,j} : M^n_{p_1,\dots,p_r} \to \pi_{p_i}(S^{q_j})$$

следующим правилом. Пусть $\alpha \in M^n_{p_1,\dots,p_r}$. Согласно лемме, класс α содержит классическое зацепление $(f_1,\dots,f_r)$. Обозначим через φ_j вложение сферы S^{q_j} в качестве края какого-нибудь слоя трубчатой окрестности подмногообразия $f_i(S^{p_i})$ сферы S^n, такое, что коэффициент зацепления $\mathrm{lk}(\varphi_j, f_i) = +1$. Нетрудно проверить, что φ_j – гомотопическая эквивалентность. Пусть

$$\psi_j : S^n \setminus f_j(S^{p_j}) \to S^{q_j}$$

– какое-нибудь непрерывное отображение, гомотопически обратное отображению φ_i. Определим отображение

$$\chi_i : S^{p_i} \to S^{q_j}, \quad x \mapsto \psi_j(f_i(x)).$$

Мы определяем $\lambda_{ij}(\alpha)$ как гомотопический класс отображения χ_i.

Несложная прямая проверка показывает, что *отображение λ_{ij} определено корректно и является гомоморфизмом.*

Оказывается, для любых различных натуральных чисел *существует целое число* $d(n,p_i,p_j)$, *такое, что*

$$\lambda_{ij} = (-1)^{d(n,p_i,p_j)}\lambda_{ji}.$$

Это доказано в [1].

Теорема. *Отображение*

$$\lambda : M^n_{p_1,\dots,p_r} \to \bigoplus_{1\leqslant i<j\leqslant r} \pi_{p_i}(S^{q_j}),\ v \mapsto (\lambda_{12}(v), \lambda_{13}(v), \dots, \lambda_{r-1,r}(v)),$$

является изоморфизмом.

В случае $r = 2$ это доказано в [13]. Общий случай следует из этого частного случая и того, что, как нетрудно видеть, при $p_i < \frac{2}{3}n - 1$ имеет место канонический изоморфизм

$$M^n_{p_1,\dots,p_r} \cong \bigoplus_{1\leqslant i<j\leqslant r} M^n_{p_i,p_j}.$$

(В общем случае, т.е. при $p_1, \dots, p_r \leqslant n-3$, группа $M^n_{p_1,\dots,p_r}$ канонически изоморфна группе $\bigoplus M^n_{p_{i_1},\dots,p_{i_t}}$, где суммирование производится по всевозможным подпоследовательностям $i_1, \dots, i_t$ последовательности $1, \dots, r$.)

3.3. Множество $(\delta(n,p_1,\dots,p_r,p))^{-1}(u)$**.** Для любого натурального $i < r$ определим отображение

$$\rho_i : M^n_{p_1,\dots,p_r,p} \to \pi_p(S^{n-2})$$

следующим правилом. Пусть $v \in M^n_{p_1,\dots,p_r,p}$. Пусть, далее, $(f_1, \dots, f_r, f)$ – какое-нибудь сингулярное зацепление из класса v. Выберем какие-нибудь точки $\mathrm{pt}_i \in S^{p_i}$, $\mathrm{pt}_r \in S^{p_r}$ и какое-нибудь сохраняющее ориентацию гладкое вложение

$$\varphi : D^n \to S^n,$$

такое, что $\varphi(0) = f_r(\mathrm{pt}_r)$ и $\varphi(D^n) \not\ni f_i(\mathrm{pt}_i)$. Ясно, что отображение

$$\psi : S^{n-1} \to S^n \setminus (f_i(\mathrm{pt}_i) \cup f_r(\mathrm{pt}_r)), \quad x \mapsto \varphi(x)$$

является гомотопической эквивалентностью. Пусть

$$\chi : S^n \setminus \{f_i(\mathrm{pt}_i), f_r(\mathrm{pt}_r)\} \to S^{n-1}$$

– какое-нибудь непрерывное отображение, гомотопически обратное отображению ψ. Рассмотрим отображение

$$S^p \to S^{n-1}, \quad x \mapsto \chi(f(x)).$$

Гомотопический класс этого отображения и есть $\rho_i(\alpha)$.

Что это определение корректно – проверяется простыми стандартными рассуждениями.

Всюду в дальнейшем будем считать фиксированным класс $u \in M^n_{p_1,\dots,p_r}$.

Определим отображение

$$\rho(u) : (\delta(n, p_1, \dots, p_r, p))^{-1}(u) \to \bigoplus^{r-1} \pi_p(S^{n-1}),$$

$$\alpha \mapsto (\rho_1(\alpha), \dots, \rho_{r-1}(\alpha)).$$

Лемма 1. *Существует гомоморфизм*

$$\varkappa_2(u) : \bigoplus^{r-1} \pi_p(S^{n-1}) \to \bigoplus_{1 \leqslant i < j \leqslant r} \pi_p(S^{q_i+q_j}),$$

задаваемый формулой вида

$$\begin{aligned}
&(v_1, \dots, v_{r-1}) \mapsto \\
&(E^{q_1}\lambda_{12}(u) \circ (\pm v_1 \pm v_2), \dots, E^{q_1}\lambda_{1,r-1}(u) \circ (\pm v_1 \pm v_{r-1}), \\
&E^{q_1}\lambda_{1r}(u) \circ (\pm v_1), \\
&E^{q_2}\lambda_{23}(u) \circ (\pm v_2 \pm v_3), \dots, E^{q_2}\lambda_{2,r-1}(u) \circ (\pm v_2 \pm v_{r-1}), \\
&E^{q_2}\lambda_{2,r}(u) \circ (\pm v_2), \\
&\dots\dots\dots \\
&E^{q_{r-1}}\lambda_{r-1,r}(u) \circ (\pm v_{r-1})),
\end{aligned}$$

где E – гомоморфизм надстройки, такой, что

$$\operatorname{Im} \rho(u) = \operatorname{Ker} \varkappa_2(u).$$

(Напомню, что числа $q_1, \dots, q_{r-1}$ были определены в п. 3.2.)

Для любого натурального числа $j \leqslant r$ пусть

$$\operatorname{in}_j : S^{q_j} \hookrightarrow S^{q_1} \vee \dots \vee S^{q_r}$$

– стандартное вложение в качестве j-й сферы в букете. Далее, по лемме 3.2 класс u содержит некоторое классическое зацепление $(f_1, \dots, f_r)$. Для любого натурального $j \leqslant r$ положим

$$X_j = S^n \setminus (\operatorname{Im} f_1 \cup \dots \cup \operatorname{Im} f_{j-1} \cup \operatorname{Im} f_{j+1} \cup \dots \cup \operatorname{Im} f_r)$$

и обозначим через in'_j вложение сферы S^{q_j} в X_j в качестве какого-нибудь края слоя некоторой трубчатой окрестности подмногообразия $f_j(S^{p_j})$ многообразия X_j, такое, что $\operatorname{lk}(\operatorname{in}'_j, f_j) = +1$. Наконец, положим

$$X = S^n \setminus (\operatorname{Im} f_1 \cup \dots \cup \operatorname{Im} f_r)$$

и выберем вложение

$$\operatorname{in} : S^{q_1} \vee \dots \vee S^{q_r} \to X,$$

такое, что для любого натурального $j \leqslant r$ отображение $\operatorname{in} \circ \operatorname{in}_j$ гомотопно отображению

$$S^{q_j} \to X, \quad x \mapsto \operatorname{in}'_j(x).$$

Зададим отображение

$$\sigma_1 : \bigoplus_{1 \leqslant i < j \leqslant r} \pi_p(S^{q_i+q_j-1}) \to \pi_p(X)$$

формулой

$$(v_{12}, v_{13}, \dots, v_{r-1,r}) \mapsto \operatorname{in}_* \circ \Big(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant r} [\operatorname{in}_j, \operatorname{in}_i]_*(v_{ij}) \Big),$$

где $v_{ij} \in \pi_p(S^{q_i+q_j-1})$ (для $1 \leqslant i < j \leqslant r$). Ясно, что σ_1 – *гомоморфизм*. Далее, зададим отображение

$$\sigma_2 : \pi_p(X) \to M^n_{p_1, \dots, p_r, p}$$

правилом: если $\alpha \in \pi_p(X)$ и $f : S^p \to X$ – представитель класса α, то $\sigma_2(\alpha)$ есть класс сингулярного зацепления $(f_1, \dots, f_r, f)$. Ясно, что *это определение корректно* и что

$$\operatorname{Im} \sigma_2 \subset (\delta(n, p_1, \dots, p_r, p))^{-1}(u).$$

Наконец, рассмотрим отображение

$$\sigma(u) : \bigoplus_{1 \leqslant i < j \leqslant r} \pi_p(S^{q_i+q_j-1}) \to (\delta(n, p_1, \dots, p_r, p))^{-1}(u),$$

$$x \mapsto \sigma_2(\sigma_1(x)).$$

Несложная проверка показывает, что оно не зависит от выбора классического зацепления $(f_1, \dots, f_r) \in u$.

Лемма 2. *Существует гомоморфизм*

$$\varkappa_1(u) : \bigoplus^{r-1} \pi_p(S^{n-2}) \to \bigoplus_{1 \leqslant i < j \leqslant r} \pi_p(S^{q_i+q_j-1}),$$

задаваемый формулой того же вида, что и в лемме 1 *(в которой, на этот раз,* $v_1, \ldots, v_{r-1} \in \pi_p(S^{n-2})$*), такой, что*

$$(\sigma(u))^{-1}(0) = \operatorname{Im}(\varkappa_1(u)).$$

(Здесь через 0 *обозначен класс сингулярного зацепления* $(f_1, \ldots, f_r, g)$*, где* $(f_1, \ldots, f_r) \in u$ *и* g *– какое-нибудь постоянное отображение* $S^p \to S^n$*.)*

Теорема. *Для любого* $u \in M^n_{p_1,\ldots,p_r}$ *существует точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{Coker} \varkappa_1(u) \xrightarrow{\mu(u)} (\delta(n, p_1, \ldots, p_r, p))^{-1}(u) \xrightarrow{\nu(u)} \operatorname{Ker} \varkappa_2(u) \to 0,$$

где $\mu(u)$ *и* $\nu(u)$ *– некоторые отображения.*

Следствие. *Существует каноническая биекция*

$$\bar{\mu}(u) : (\delta(n, p_1, p_2, n-2))^{-1}(u) \to \pi_{p_1}(S^{q_2})/(\lambda_{12}(u)),$$

где через $(\lambda_{12}(u))$ *обозначена циклическая подгруппа группы* $\pi_{p_1}(S^{q_2})$*, порожденная элементом* $\lambda_{12}(u) \in \pi_{p_1}(S^{q_2})$*.*

Действительно, достаточно заметить, что при $p = n-2$ группа $\operatorname{Ker} \varkappa_2(u)$ тривиальна (поскольку она является подгруппой тривиальной группы $\bigoplus^{r-1} \pi_{n-2}(S^{n-1})$) и что группа $\pi_{p_1}(S^{q_2})$ стабильна (поскольку $p_i < \frac{2}{3}n-1$), и воспользоваться предыдущей теоремой.

Литература

1. M. A. Kervaire, *An interpretation of G. Whitehead's generalization of H. Hopf's invariant.* — Ann. of Math. **69** (1959), 345–365.
2. P. Kirk, *Link homotopy with one codimension two component.* — Trans. AMS **319** (1990), 663–688.
3. U. Koschorke, *Link maps and the geometry of their invariants.* — Manuscr. Math. **61** (1988), 383–415.
4. U. Koschorke, *On link maps and their homotopy classification.* — Math. Ann. **286** (1990), 753–782.
5. U. Koschorke, *Link homotopy with many components.* — Topology **30** (1991), 267–281.

6. W. S. Massey, D. Rolfsen, *Homotopy classification of higher dimensional links.* — Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), 375–391.
7. В. М. Нежинский, *Группы классов псевдогомотопных сингулярных зацеплений.* I. – Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 114–124.
8. В. М. Нежинский, *Псевдогомотопия зацеплений коразмерностей больших двух.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **208** (1993), 136–151.
9. В. М. Нежинский, *Сингулярные зацепления типа* $(p, 2k{+}1)$ *в* $(4k{+}2)$*-мерной сфере.* — Алгебра и анализ **5**, No. 4 (1993), 170–190.
10. В. М. Нежинский, *Аналог группы Милнора зацепления в теории многомерных зацеплений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998), 175–190.
11. В. М. Нежинский, *Сингулярные зацепления сфер размерностей* $k, \dots k, p$ *в* $(2k+1)$*-мерной сфере.* — Алгебра и анализ **11**, No. 1 (1999), 171–243.
12. В. М. Нежинский, *Псевдогомотопические инварианты сингулярных зацеплений.* — Успехи мат. наук **54**, No. 3 (1999), 175–176.
13. G. P. Scott, *Homotopy links.* — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **32**, Nos. 3/4 (1968), 186–190.

Nezhinskij V. M. Singular links of almost metastable dimensions.

The objects studied are singular links of p_1-,..., p_r-, p-spheres in the n-sphere. A theory of such singular links for $\max\{p_1, \dots, p_r\} < \frac{2}{3}n - 1$ and $p < 3n - 3\max\{p_1, \dots, p_r\} - 5$ is constructed. The theory generalizes (as far as it is possible) the theory of singular links of k-,..., k_i-, p-spheres in the $(2k+1)$-sphere, where $k > 1$, developed in the author's recent papers.

Российский государственный
педагогический университет
им. А. И. Герцена

E-mail: nezhin @ pdmi. ras.ru

Поступило 10 января 2003 г.