Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

В. М. Нежинский, Ю. В. Петрова

СИНГУЛЯРНЫЕ ЗАЦЕПЛЕНИЯ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ И БУКЕТА ОКРУЖНОСТЕЙ В ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

§1. Введение

Для любого $m \in \mathbb{N}$ через $B(m)$ будем обозначать букет m окружностей.

Пусть r, $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$. Назовем *(одномерным) сингулярным зацеплением типа* $(n_1, \dots, n_r)$ набор непрерывных отображений

$$f_1 : B(n_1) \to S^3, \dots, f_r : B(n_r) \to S^3$$

с попарно непересекающимися образами; если $n_1 = \ldots = n_r = 1$ и $f_1, \dots, f_r$ – гладкие вложения, то сингулярное зацепление называется также *классическим зацеплением*. Сингулярные зацепления $(f_1, \dots, f_r)$ и $(g_1, \dots, g_r)$ типа $(n_1, \dots, n_r)$ называются *ℓ-гомотопными*, если существует последовательность непрерывных отображений

$$F_i : B(n_i) \times I \to S^3, \quad i = 1, \dots, r,$$

таких, что (для $1 \leqslant i,\ j \leqslant r$):

(i) $F_i(x, 0) = f_i(x)$ и $F_i(x, 1) = g_i(x)$ при $x \in B(n_i)$;

(ii) $F_i(B(n_i) \times t) \cap F_j(B(n_j) \times t) = \varnothing$ при $t \in I$.

Фундаментальной проблемой теории одномерных сингулярных зацеплений является проблема ℓ-гомотопической классификации сингулярных зацеплений типа $(n_1, \dots, n_r)$ для любых натуральных чисел $r > 1$, $n_1, \dots, n_r$. (Случай $r = 1$ обычно исключают из рассмотрения: (для любого $n_1 \in \mathbb{N}$) любые два сингулярных зацепления типа (n_1) очевидно гомотопны, а потому и ℓ-гомотопны.)

В литературе имеется полное решение этой проблемы при $r = 2$ (см. [2] для $n_1 = n_2 = 1$ и [3, с. 4–5] для произвольных n_1,

Работа частично поддержана грантом Минобразования РФ Е02-1.0-54 и грантом РФФИ 01-01-01014.

$n_2 \in \mathbb{N}$), при $r = 3$ и $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ (см. [2]) и при $r = 4$ и $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$ (см. [1]).

Цель настоящей работы – анонсировать результаты, относящиеся к решению проблемы при $r = 3$ и $n_1 = n_2 = 1$ (натуральное число n_3 – произвольное).

Авторы выражают благодарность С. С. Подкорытову за полезные советы.

§2. Множество $\mathcal{M}$ и отображение λ

Всюду в дальнейшем будем считать фиксированным натуральное число n.

Через $\mathcal{M}$ будем обозначать множество классов ℓ-гомотопных одномерных сингулярных зацеплений типа $(1, 1, n)$. Из §1 ясно, что вычислению именно этого множества посвящена настоящая работа.

Определим следующим образом отображение

$$\lambda\colon \mathcal{M} \to \mathbb{Z}^{2n+1}.$$

Пусть $\alpha \in \mathcal{M}$. Выберем какого-нибудь представителя (f_1, f_2, f_3) класса α и для каждого натурального $i \leqslant n$ обозначим через f_{3i} сужение отображения f_3 на i-ю окружность букета $B(n)$. Мы полагаем

$$\lambda(\alpha) = \Big(\mathrm{lk}\,(f_1, f_2), \mathrm{lk}\,(f_1, f_{31}), \dots, \mathrm{lk}\,(f_1, f_{3n}), \\ \mathrm{lk}\,(f_2, f_{31}), \dots, \mathrm{lk}\,(f_2, f_{3n})\Big),$$

где lk – коэффициент зацепления.

Наш первый основной результат состоит в том, что *отображение λ сюръективно*.

§3. Материал, нужный для §4

Пусть (f_1, f_2) – классическое зацепление (см. §1). Пусть

$$X := S^3 \setminus (f_1(S^1) \cup f_2(S^1))$$

и $x_0 \in X$. Мы полагаем

$$G(f_1, f_2) := \pi_1(X, x_0).$$

Рассмотрим какую-нибудь замкнутую трубчатую окрестность подмногообразия $f_1(S^1) \cup f_2(S^1)$ сферы S^3. Выберем по точке на $f_1(S^1)$ и $f_2(S^1)$ и обозначим через mer_1 и mer_2 слои трубчатой окрестности над первой и второй точками соответственно.

Пусть

$$g_1, g_2 \colon I \to S^3$$

– непрерывные отображения такие, что (для $i = 1, 2$): $g_i(0) = g_i(1) = x_0$; $g_i(t) = g_i(1-t)$ при $t \in [0, \frac{1}{3}]$, $g_i([0, \frac{1}{3}]) \subset X$; сужение отображения g_i на $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ есть (топологическое) вложение, $g_i([\frac{1}{3}, \frac{2}{3})) = \partial(\mathrm{mer}_i)$; $\mathrm{lk}\,(g_i, f_i) = 1$.

Определим элементы

$$\beta_1, \beta_2 \in G(f_1, f_2)$$

как классы отображений g_1, g_2. Заметим, что эти элементы классическим зацеплением (f_1, f_2) и точкой x_0 определяются лишь с точностью до сопряжений элементами группы $G(f_1, f_2)$.

Рассмотрим в группе $G(f_1, f_2)$ операцию коммутаторного умножения. Выберем элементы этой группы, получаемые коммутаторным перемножением (в каком-нибудь порядке) не менее, чем 3 сомножителей, каждый из которых равен либо β_1, либо β_2. Обозначим через J наименьшую нормальную подгруппу группы $G(f_1, f_2)$, содержащую эти элементы, и положим

$$g\big((f_1, f_2), \beta_1, \beta_2, x_0\big) = G(f_1, f_2)/J.$$

Из предложения, сформулированного в [1, с. 365] после заголовка Proof of Proposition, и последнего замечания предыдущего абзаца следует, что *эта группа классическим зацеплением* (f_1, f_2) *и точкой* x_0 *определяется однозначно.*

В дальнейшем обозначение $g((f_1, f_2), \beta_1, \beta_2, x_0)$ будем сокращать до $g(f_1, f_2)$.

Лемма. *Если* $\alpha \in g(f_1, f_2)$*, то существуют* k_1*,* $k_2, m \in \mathbb{Z}$ *такие, что*

$$\alpha = \bar\beta_1^{k_1}\,\bar\beta_2^{k_2}\big[\bar\beta_2, \bar\beta_1\big]^m,$$

где $\bar\beta_1$ *и* $\bar\beta_2$ *– образы элементов* β_1 *и* β_2 *группы* $G(f_1, f_2)$ *при проекции* $G(f_1, f_2) \to g(f_1, f_2)$*.*

Это следует из [1, предложение 6].

Заметим, что k_1 и k_2 классическим зацеплением (f_1, f_2) и классом α определяются однозначно. Действительно, нетрудно видеть, что если f – петля в X, представляющая класс α, и $\mathrm{in}\colon X \hookrightarrow S^3$ – включение, то

$$k_i = \mathrm{lk}\,(\mathrm{in} \circ f, f_i) \quad (\text{для} \quad i = 1, 2).$$

§4. Группа $H(\varkappa)$ и отображение $\mu(\varkappa)$

Пусть $k, k_{11}, \dots, k_{1n}, k_{21}, \dots, k_{2n} \in \mathbb{Z}$. Положим

$$\varkappa = (k, k_{11}, \dots, k_{1n}, k_{21}, \dots, k_{2n}).$$

Группу $H(\varkappa)$ определяем как фактор-группу группы

$$\mathbb{Z}^n$$

по подгруппе, порожденной элементами

$$\bigl(k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1n}\bigr), \ \bigl(k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2n}\bigr)$$

и

$$\bigl(0, \dots, 0, \underset{(i)}{k}, 0, \dots, 0\bigr), \quad i = 1, \dots, n.$$

Определим следующим образом отображение

$$\mu(\varkappa)\colon \lambda^{-1}(\varkappa) \to H(\varkappa).$$

Пусть $\alpha \in \lambda^{-1}(\varkappa)$. Простая стандартная проверка показывает, что существует сингулярное зацепление (f_1, f_2, f_3) класса α такое, что (f_1, f_2) – классическое зацепление. Пусть

$$f_3'\colon B(n) \to S^3 \setminus \bigl(f_1(S^1) \cup f_2(S^1)\bigr)$$

– сокращение отображения f_3. Пусть $i \leqslant n$ – натуральное число. Обозначим через f_{3i}' сужение отображения f_3' на i-ю окружность букета $B(n)$ и выберем класс $\alpha_i \in g(f_1, f_2)$ такой, что отображение f_{3i}' гомотопно какой-нибудь петле класса α_i. Пусть $\bar\beta_1$ и $\bar\beta_2$ – какие-нибудь элементы группы $g(f_1, f_2)$, определенные по классическому зацеплению (f_1, f_2) как в §3. Согласно лемме и последнему предложению §3 существуют $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\alpha_i = \bar\beta_1^{k_{1i}}\, \bar\beta_2^{k_{2i}} \bigl[\bar\beta_2, \bar\beta_1\bigr]^{m_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Мы полагаем $\mu(\varkappa)(\alpha)$ равным классу последовательности $(m_1, \ldots, m_n)$.

Наш второй основной результат состоит в том, что (*для любой* $(2n+1)$-*членной последовательности целых чисел* $\varkappa$): *это определение корректно; отображение* $\mu(\varkappa)$ *является биекцией.*

Литература

1. J. P. Levine, *An approach to homotopy classification of links.* — Amer. Math. Soc. **306** (1988), 361–387.
2. J. Milnor, *Link groups.* — Ann. of Math. **(2) 59** (1954), 177–195.
3. A. Skopenkov, *On the generalized Massey–Rolfsen invariant for link maps.* — Fundamenta Math. **165** (2000), 1–15.

Nezhinskij V. M., Petrova Yu. V. Singular links of two circles and a wedge of circles in the 3-sphere.

A homotopy classification of singular links of two circles and a wedge of circles in the 3-sphere is given. This result generalizes Milnor's one on homotopy classification of classical three-component links.

Российский государственный педагогическийуниверситет им. А. И. Герцена

E-mail: nezhin@pdmi.ras.ru

Поступило 12 февраля 2003 г.