Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

В. И. Субботин

СИЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Введение

В настоящей работе рассматриваются геометрические свойства выпуклых многогранников в трехмерном евклидовом пространстве, связанные с симметрией некоторых элементов многогранника.

Если для любых двух вершин существует самосовмещение многогранника, совмещающее их между собой, и грани многогранника – правильные (не обязательно равные) многоугольники, то многогранник называется *изогоном*. Изогоны исчерпываются двумя бесконечными сериями изогональных призм и антипризм и известными с древности 13 архимедовыми телами. Двойственные к изогонам называются *изоэдрами*. Они были рассмотрены И. Ф. Х. Гесселем в 1830 г. У изоэдров любые две грани совмещаются самосовмещением многраника, а все многограннные углы – правильные. Среди изоэдров двойственными к призмам и антипризмам являются бипирамиды и *дельтоэдры*.

Звездой вершины A многогранника называется совокупность граней, инцидентных A.

Реберной звездой вершины многогранника называется фигура, состоящая из ребер, инцидентных этой вершине.

Требование *локальной однотипности* всех вершин, т.е. изоморфности их звезд, приводит к 14 топологически различным многогранникам [1, 2]. Их называют *топологически равноугольно полуправильными*. Каждый тип равноугольно полуправильных многогранников единственным с точностью до подобия образом реализуется выпуклым многогранником с равными многогранными углами и правильными, но не обязательно равными гранями. *Топологически равногранно полуправильными* называются многогранники, двойственные к топологически равноугольно полуправильным.

Плоскими аналогами упомянутых классов многогранников являются, в известном смысле, равноугольно полуправильные и равносторонне полуправильные многоугольники.

Выпуклый плоский многоугольник с четным числом сторон называется *равноугольно полуправильным*, если все его углы равны между собой, а стороны равны через одну [3, ч. 1, с. 39]. Этот класс многоугольников характеризуется тем, что ось симметрии любых двух его соседних вершин является осью симметрии всего многоугольника. *Равносторонне полуправильным* называется плоский выпуклый многоугольник с четным числом сторон, все стороны которого равны между собой, а углы равны через один [3, ч. 1, с. 40]. Равносторонне полуправильный многоугольник характеризуется также тем, что биссектриса каждого его внутреннего угла является осью симметрии всего многоугольника.

Целью работы является перенос указанных свойств симметрии равноугольно полуправильных и равносторонне полуправильных многоугольников на пространственный случай. Это приводит к классам многогранников, отличным от классов изогонов и изоэдров. Определим эти классы.

Определение 1. Выпуклый многогранник называется *сильно симметричным многогранником* I *класса*, если плоскость симметрии любых двух его соседних вершин является плоскостью симметрии их реберных звезд.

Определение 2. Если плоскость симметрии любого плоского угла выпуклого многогранника (т.е. биссекторная плоскость этого угла, ортогональная грани, содержащей этот угол) является плоскостью симметрии реберных звезд двух вершин, инцидентных сторонам этого угла, то такой многогранник назовем *сильно симметричным многогранником* II *класса*.

Основное содержание работы составляют следующие классификационные теоремы.

Теорема 1. I *класс сильно симметричных многогранников помимо* 5 *правильных содержит* 11 *полуправильных (архимедовых) многогранников, бесконечную серию прямых призм с правильными основаниями и квадратными боковыми гранями, а также* 11 *групп многогранников, имеющих равноугольно полуправильные грани.*

Теорема 2. *Не считая правильных, существует только* 4 *сильно симметричных многогранника* II *класса: кубооктаэдр, икосододекаэдр, ромбический додекаэдр и ромбический триаконтаэдр.*

Замечание. Определения 1 и 2 имеют локальный характер.

Следующие утверждения $1'$ и $2'$ показывают, что локальные условия симметрии этих определений продолжаются на весь многогранник, т.е. определения $1'$ и $2'$ эквивалентны определениям 1 и 2.

Утверждение $1'$. *Для того, чтобы выпуклый многогранник был сильно симметричным многогранником* I *класса, необходимо и достаточно, чтобы плоскость симметрии любых двух его соседних вершин являлась плоскостью симметрии всего многогранника.*

Утверждение $2'$. *Для того, чтобы выпуклый многогранник был сильно симметричным многогранником* II *класса, необходимо и достаточно, чтобы плоскость симметрии любого его плоского угла была плоскостью симметрии всего многогранника.*

Основную идею доказательства эквивалентности определений 1–2 и $1'$–$2'$ покажем на примере 1 и $1'$. Докажем достаточность утверждения $1'$.

Пусть плоскость симметрии их любых двух соседних вершин есть плоскость симметрии их реберных звезд. Пусть A и B – две соседние вершины, а вершина C отлична от A и B. Тогда ломаной из ребер многогранника, соединяющей A и C, соответствует симметричная относительно плоскости Π симметрии вершин A и B ломаная, соединяющая B и C', где C' – вершина, симметричная C относительно Π.

Действительно, пусть A_1 – соседняя с A вершина ломаной $A\ldots C$. Тогда среди ребер, исходящих из вершины B, найдется такое ребро BB_1, что ребра AA_1 и BB_1 симметричны относительно Π. Плоскость Π_1, проходящая через середину звена AA_1 ортогонально к нему, и плоскость Π_2, проходящая через середину ребра BB_1 ортогонально к нему, будут, очевидно, симметричны относительно Π. Заметим, что если A и B симметричны относительно Π и плоскости Π_1 и Π_2 симметричны относительно Π, то точки, симметричные A и B относительно Π_1 и Π_2, также будут симметричны относительно Π. Поэтому A_1 и A_2 симметричны относительно Π. Следовательно, звену A_1A_2 ломаной $A\ldots C$ соответствует некоторое симметричное относительно Π ребро B_1B_2 и т.д. И, наконец, вершине C соответствует симметричная относительно Π вершина C'.

Ввиду произвольности C и того, что выпуклый многогранник определяется заданием его вершин, достаточность $1'$ доказана. Необходимость очевидна. Аналогично доказывается эквивалентность 2 и $2'$.

§1. Многогранники I класса: доказательство теоремы 1

Из определения 1 следует, что все многогранники I класса имеют равные звезды вершин. Таким образом, все звезды вершин изоморфны между собой. Поэтому комбинаторный тип многогранника I класса принадлежит к одному из 14 комбинаторных типов топологически равноугольно-полуправильных многогранников (см. введение). Следовательно, комбинаторный тип многогранников I класса такой же, как у правильных и равноугольно-полуправильных многогранников.

Условие симметрии определения 1 не исключает того, что многогранник I класса может иметь вместо правильных четноугольных граней равноугольно-полуправильные; однако в силу того же условия все нечетноугольные грани должны быть правильными.

Таким образом, для того, чтобы перечислить все многогранники I класса, не являющиеся правильными, достаточно:

1) среди всех равноугольно-полуправильных выпуклых многогранников найти те, которые удовлетворяют условию симметрии реберных звезд любых двух соседних вершин;

2) перечислить многогранники, которые комбинаторно эквивалентны соответствующему равноугольно-полуправильному, удовлетворяют условию симметрии определения 1, но вместо всех или некоторых правильных четноугольных граней имеют равноугольно-полуправильные грани.

Прямой проверкой убеждаемся, что из равноугольно-полуправильных многогранников определению 1 удовлетворяют 11 многогранников; не удовлетворяют: плосконосый куб, скошенный ромбокубооктаэдр и плосконосый додекадр, см. [1, рис. 14, 13 и 23].

Перечислим теперь многогранники I класса, *среди граней которых имеются равноугольно-полуправильные*, построив эти многогранники. При этом их принадлежность I классу будет видна из самого способа построения.

1.1. Призмы. Очевидно, что призмы, среди граней которых имеются равноугольно полуправильные, исчерпываются следующими: бесконечная серия прямых призм с равноугольно полуправильными основаниями и квадратными или прямоугольными боковыми гранями, а также бесконечная серия прямых призм с правильными основаниями и прямоугольными боковыми гранями.

Заметим, что здесь и в дальнейшем удобно различать квадрат и прямоугольник, ромб и квадрат.

1.2. "Кубооктаэдр". Он же – *расширенный тетраэдр* с треугольными и прямоугольными гранями. Здесь и в дальнейшем названия многогранников взяты в кавычки, так как одноименные с ними равноугольно-полуправильные многогранники имеют лишь тот же самый комбинаторный тип.

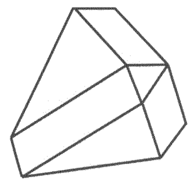

Рис. 1

Этот многогранник можно получить следующим образом: сдвинем параллельно грани правильного тетраэдра в направлении от центра на одно и то же расстояние так, чтобы ось симметрии, перпендикулярная грани, оставалась проходящей через центр соответствующей грани. Выпуклая оболочка полученной фигуры представляет собой многогранник, у которого помимо старых граней появляются правильные треугольные и, в общем случае, прямоугольные грани.

В дальнейшем такое преобразование многогранника будем называть *равномерным расширением многогранника*.

Из определения равномерного расширения видно, что это преобразование сохраняет условие симметрии реберных звезд любых двух соседних вершин многогранника.

1.3. "Ромбокубооктаэдры". Они же – расширенные кубы с треугольными, прямоугольными и квадратными гранями.

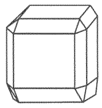 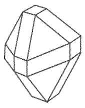

Рис. 2 Рис. 3

Эти два многогранника получаются равномерным расширением куба. В одном из них прямоугольные грани примыкают к квадратным граням своими большими сторонами, а в другом – меньшими.

1.4. "Усеченный тетраэдр" с полуправильными 6-угольными и 3-угольными гранями.

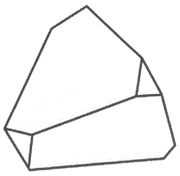

Рис. 4

1.5. "Усеченный куб" с полуправильными 8-угольными и 3-угольными гранями.

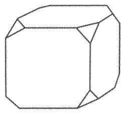

Рис. 5

1.6. "Усеченный додекаэдр" с полуправильными 10-угольными и 3-угольными гранями.

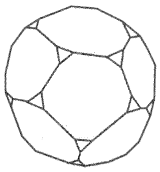

Рис. 6

1.7. "Усеченные октаэдры". Они же – *расширенные усеченные тетраэдры* с полуправильными и правильными 6-угольными и прямоугольными гранями (рис. 7), либо с полуправильными 6-угольными и квадратными гранями (рис. 8), либо полуправильными 6-угольными и прямоугольными гранями (рис. 9).

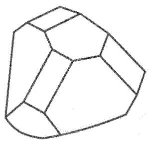
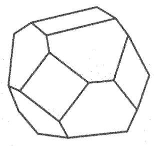
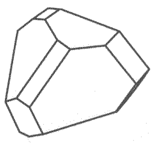

Рис. 7 Рис. 8 Рис. 9

Последние два многогранника получаются в результате равномерного расширения усеченного тетраэдра.

1.8. "Усеченный икосаэдр" с полуправильными 6- и 5-угольными гранями.

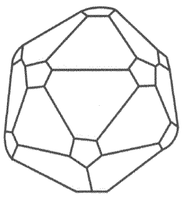

Рис. 10

1.9. "Ромбоикосододекаэдры". Они же – расширенные додекаэдры с прямоугольными, 5- и 3-угольными гранями.

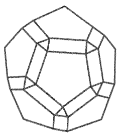
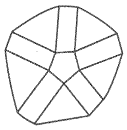

Рис. 11 Рис. 12

Эти два многогранника получаются из додекаэдра равномерным расширением. В одном из них прямоугольные грани примыкают к 3-угольным граням своими бо́льшими сторонами, а в другом – меньшими.

1.10. "Усеченные кубооктаэдры". Они же – расширенные усеченные кубы с правильными 6-угольными, полуправильными 8-угольными и прямоугольными гранями (рис. 13), либо с квадратными и полуправильными 8- и 6-угольными (рис. 14), либо с полуправильными 6-угольными, правильными 8-угольными и прямоугольными гранями (рис. 15), либо с полуправильными 6- и 8-угольными и прямоугольными гранями (рис. 16).

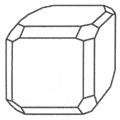
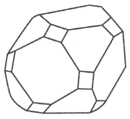
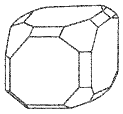
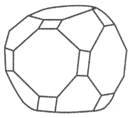

Рис. 13 Рис. 14 Рис. 15 Рис. 16

Эти многогранники можно получить равномерным расширением усеченного куба. Причем при достаточно большом расширении прямоугольные грани “усеченных кубооктаэдров” могут примыкать к 8-угольным граням своими меньшими сторонами.

1.11. “Усеченные икосододекаэдры”. Они же – расширенные усеченные икосаэдры с полуправильными 6- и 10-угольными и квадратными гранями (рис. 17), либо с полуправильными 6-угольными, правильными 10-угольными и прямоугольными гранями (рис. 18), либо с полуправильными 6- и 10-угольными и прямоугольными гранями (рис. 19), либо с правильными 6-угольными, полуправильными 10-угольными и прямоугольными гранями (рис. 20).

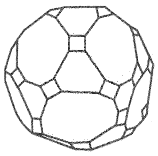
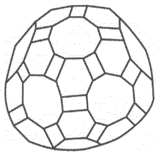
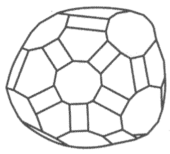
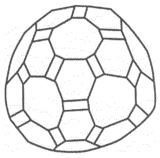

Рис. 17 Рис. 18 Рис. 19 Рис. 20

Эти многогранники получаются равномерным расширением из усеченного икосаэдра или из “ромбоикосододекаэдров”. Заметим, что здесь, как и в п. 1.10, возможно примыкание прямоугольных граней к 10-угольным своими большими сторонами. Итак, все возможные разновидности равноугольно полуправильных четноугольных граней оказываются реализованными в соответствующем выпуклом многограннике. Теорема 1 доказана. ●

Замечания. 1. Все многогранники I класса принадлежат классу многогранников с равными многогранными углами; однако не каждый многогранник с равными многогранными углами является многогранником I класса. Примером может служить многогранник, который получается из ромбокубооктаэдра равномерным растяжением в направлении параллельных ребер одного из поясов квадратов. Это растяжение преобразует ромбокубооктаэдр в многогранник, отличающийся от ромбокубооктаэдра только одним поясом, который состоит из равных прямоугольников.

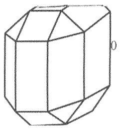

Рис. 21

Этот пример показывает также, что в определении 1 локальное условие симметрии реберных звезд вершин для многогранника I класса нельзя заменить на локальное условие симметрии многогранных углов в этих вершинах.

2. Двойственным к I классу является класс, определяемый следующим утверждением: если биссекторная плоскость каждого двугранного угла выпуклого многогранника P является плоскостью симметрии всего P, то P будет двойственным к одному из сильно симметричных многогранников I класса.

Для того, чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно рассмотреть фиксированный многогранный угол и все биссекторные плоскости двугранных углов, проходящие через вершину этого угла.

§2. Многогранники II класса: доказательство теоремы 2

Пусть P – многогранник II класса. Возможны два случая: либо P имеет хотя бы одну нечетноугольную грань, либо не имеет ни одной.

Рассмотрим два случая:

1. У P имеется нечетноугольная грань.
2. P не имеет нечетноугольной грани.

2.1. Итак, пусть у P найдется нечетноугольная грань. Здесь тоже рассмотрим 2 случая:

а) когда степени вершин многогранника P – нечетные (эти степени равны для всех вершин в силу определения 2).

б) когда эти степени – четные.

Утверждение. *Если степени вершин многогранника P – нечетные, то в силу определения 2 многогранник P является правильным и составлен из равных нечетноугольников.*

Доказательство. Действительно, ввиду нечетности степени вершины A нечетноугольной грани можно последовательным отражением относительно биссекторных плоскостей, проходящих через A, убедиться в том, что все грани многогранного угла с вершиной A представляют собой правильные многоугольники, конгруэнтные рассматриваемой нечетноугольной грани. •

В этом случае, учитывая требования симметричности многогранника относительно биссекторных плоскостей плоских углов граней, получаем три правильных многогранника: тетраэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Теперь рассмотрим случай б).

Пусть степени вершин многогранника P, содержащего нечетноугольную грань, – четные. Тогда у P найдется треугольная грань F.

(Это следует из того, что, как легко видеть, всякий выпуклый многогранник содержит либо треугольную грань, либо трехгранный угол.)

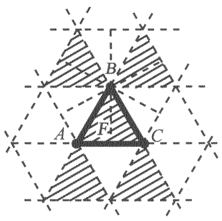

Рис. 22

Покажем, что все степени вершин многогранника P равны 4. Действительно, в противном случае, используя определение 2, получим, что расположение граней в вершинах A, B, C грани F таково, как указано на рисунке (случай степени 6). Таким образом, получаем, что в каждой вершине грани F плоские углы составляют в сумме $\geqslant 2\pi$. Рассмотрим теперь четырехгранные углы с вершинами в вершинах грани F. Эти углы могут иметь следующее строение. Либо в каждой вершине сходится 4 правильных треугольника, либо грани четырехгранных углов чередуются через одну: 2 правильных треугольника и 2 квадрата.

В первом случае, учитывая условия симметричности многогранника относительно биссекторных плоскостей плоских углов, получим правильный октаэдр. Во втором случае, в силу того же условия, получим кубооктаэдр. Третий возможный случай – чередуются 2 правильных пятиугольника и 2 правильных треугольника. В этом случае получаем икосододекаэдр.

2.2. Рассмотрим теперь случай, когда многогранник не содержит нечетноугольных граней и, следовательно, содержит трехгранный угол Ф.

Угол Ф ввиду симметрии его граней образован либо 3 квадратами (случай куба), либо 3 равносторонне полуправильными четноугольниками. Эти равносторонне полуправильные четноугольники необходимо должны быть ромбами, в противном случае либо сам угол Ф, либо смежный с ним будет иметь плоские углы в сумме $\geqslant 2\pi$.

Пусть теперь A, B, C, A', B', C' – вершины ромбов, образующих угол Ф, не совпадающие с вершиной Ф. Очевидно, в силу симметрии, среди этих вершин имеются трехгранные.

Рассмотрим два случая:

1) Все вершины A, B, C, A', B', C' – трехгранные.

2) Среди вершин A, B, C, A', B', C' есть нетрехгранные.

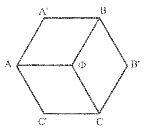

Рис. 23

В случае 1) получаем ромбоэдр, который не принадлежит II классу, поскольку не удовлетворяет лемме 2. В случае 2) в силу определения многогранников II класса среди этих 6 вершин 3 вершины – трехгранные (A', B', C') и 3 – нетрехгранные (A, B, C). Причем все трехгранные вершины имеют одну и ту же степень (и даже симметричные реберные звезды), и вершины A, B, C разделяются вершинами A', B', C', чередуясь между собой.

Степень вершин A, B, C может быть равной 4 или 5. Действительно, 6 ромбов для многогранника II класса не могут сходиться в одной вершине, так как либо в этой вершине, либо в смежной с ней не образуется многогранный угол – сумма плоских углов этого угла будет $\geqslant 2\pi$.

В случае степени 4 для вершин A, B, C, учитывая требование симметричности многогранника относительно биссекторных плоскостей плоских углов в вершинах граней угла Φ, получим ромбический додекаэдр. Аналогично, в случае степени 5 – ромбический триаконтаэдр.

Таким образом, многогранники II класса, среди граней которых имеются равносторонне полуправильные многоугольники, исчерпываются ромбическим додекаэдром и ромбическим триаконтаэдром.

Итак, помимо 5 правильных, II класс содержит еще только кубооктаэдр, икосододекаэдр, ромбический додекаэдр и ромбический триаконтаэдр.

Теорема 2 доказана. •

В заключение отметим, что II класс сильно симметричных многогранников очевидно замкнут относительно преобразования метрической двойственности.

Литература

1. *Многогранники.* — Математическая энциклопедия. Т. 4, М. (1977), 708–711.
2. Л. А. Люстерник, *Выпуклые фигуры и многогранники.* Гостехтеориздат, М. (1956).
3. Д. И. Перепелкин, *Курс элементарной геометрии.* М.-Л., ОГИЗ ГТТЛ, ч. 1, 1948, ч. 2, 1949.
4. H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes.* N.Y., Dover Publ. (1973).
5. В. И. Субботин, *Вполне симметричные многогранники.* — В кн.: Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Ефимова Н. В. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону (1998), 73–74.

Subbotin V. I. Strongly symmetric polyhedra.

Strongly symmetric polyhedra in 3-space are defined and classified.

Новочеркасский
педагогический институт

E-mail: geometry @ mail.ru

Поступило 7 января 2003 г.