Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 301, 2003 г.

С. В. Керов

МНОГОМЕРНОЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ХАРАКТЕРЫ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ

Предисловие (Г. И. Ольшанский). Настоящая работа была выполнена Сергеем Васильевичем Керовым (1946–2000) в 1993 г., но ее публикация по разным причинам откладывалась. Работа посвящена некоторым комбинаторным аспектам задачи гармонического анализа на бесконечномерной унитарной группе. Хотя за истекшие 10 лет появилось много статей, так или иначе связанных с этой работой Сергея Васильевича, она, на мой взгляд, ничуть не устарела. Более того, мне кажется, что содержащиеся в ней идеи и наблюдения сегодня могут быть лучше поняты и успешно использованы.

Публикуемый текст скомпонован мною из трех файлов, хранящихся в архиве автора: основная часть ("Элементарное введение в z-меры для унитарной группы", ноябрь 1993); дополнения к ней (декабрь 1993); новое введение (февраль 1995) с измененным названием, которое и использовано в этой публикации. Я не считал возможным вторгаться в авторский материал и ограничился лишь минимально необходимой технической правкой. Но читатель должен иметь в виду, что текст не является законченной статьей, отредактированной самим автором, и должен восприниматься как рабочие заметки.

Все сноски сделаны мной, авторских примечаний в тексте нет. Последний раздел (§13) написан мной, он содержит комментарии к тексту. Библиография существенно расширена.

Я признателен В. Н. Иванову за помощь.

Введение. Классическое гипергеометрическое распределение определяется формулой

$$M(k)=\binom{a}{k}\binom{b}{m-k}\Big/\binom{a+b}{m};\quad k=0,1,\dots,m, \tag{0.1}$$

где a,b,m — натуральные параметры. В элементарных курсах теории вероятностей число $M(k)$ интерпретируется как вероятность иметь ровно k выигрышных лотерейных билетов среди m купленных, если всего в лотерее участвует a выигрышных и b невыигрышных билетов.

В этой интерпретации для нас существенно, что гипергеометрическое распределение возникает как проекция равномерного распределения на вспомогательном множестве (на совокупности всех наборов по m купленных билетов из общего числа $a+b$).

В этой статье вводится многомерный аналог распределения (0.1). Случайными объектами для него служат всевозможные диаграммы Юнга λ в прямоугольнике $\Pi(n,m)$ с n строками и m столбцами. В простейшем случае $n=1$ диаграмма λ сводится к одной строке случайной длины k, распределенной по формуле (0.1).

Наиболее очевидное определение многомерного гипергеометрического распределения состоит в использовании формулы

$$M_n(\lambda)=\binom{a}{\lambda}\binom{b}{\tilde\lambda}\Big/\binom{a+b}{\pi};\qquad \lambda\subset\pi=\Pi(n,m), \tag{0.2}$$

вполне аналогичной стандартному определению (0.1). Единственное нововведение состоит в замене обычных биномиальных коэффициентов на обобщенные биномиальные коэффициенты

$$\binom{a}{\lambda}=\prod_{x\in\lambda}\frac{a-c(x)}{h(x)}, \tag{0.3}$$

хорошо известные в комбинаторике диаграмм Юнга [16]. Здесь x пробегает клетки диаграммы λ, $c(x)$ — содержание клетки x, а $h(x)$ — ее длина крюка. Многомерное распределение (0.2) по-прежнему зависит от трех натуральных параметров a,b,m. Через $\tilde\lambda$ мы обозначаем диаграмму Юнга, дополнительную к λ в прямоугольнике $\Pi(n,m)$; это аналог разности $m-k$ в формуле (0.1).

Как и в одномерном случае, распределение M_n возникает как проекция равномерного распределения на вспомогательном множестве. Например, выберем случайно одну из полустандартных таблиц Юнга прямоугольной формы $\pi=\Pi(n,m)$ с натуральными элементами из множества $\{1,2,\dots,a+b\}$. (Нам удобно считать, что числа, составляющие таблицу, строго возрастают по строкам и не убывают вдоль столбцов). Клетки, содержащие младшие символы $\{1,2,\dots,a\}$, образуют случайную диаграмму Юнга

$\lambda \subset \pi$. Мы покажем, что равновероятному выбору таблицы Юнга отвечает гипергеометрическое распределение (0.2) диаграммы λ.

Распределения M_n с фиксированными параметрами a, b, m определенным образом согласованы и задают единый вероятностный объект — центральную марковскую цепь в пространстве $\mathcal{Y}(m)$ диаграмм Юнга со строчками длины m или короче.

Опишем это соответствие подробнее.

Процесс начинается при $n = 0$ с пустой диаграммы Юнга. Рассмотрим марковскую цепь, состояния которой в момент времени n берутся из множества $\mathcal{Y}_n(m)$ диаграмм Юнга в прямоугольнике $\Pi(n, m)$. Допустимые переходы состоят в добавлении к текущей диаграмме $\lambda \in \mathcal{Y}_n(m)$ произвольной горизонтальной полосы. Иначе говоря, переход к диаграмме $\Lambda \in \mathcal{Y}_{n+1}(m)$ допустим, если выполнено условие интерполяции

$$\Lambda_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \Lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \Lambda_n \geqslant \lambda_n \geqslant \Lambda_{n+1}. \tag{0.4}$$

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — длины столбцов исходной диаграммы λ, а $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — длины столбцов для Λ. Согласно (0.4), допустимый переход определяется множеством $\mathrm{I} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ реально возрастающих столбцов:

$$C_k = \begin{cases} c_k + 1, & \text{если } k \in \mathrm{I}; \\ c_k, & \text{если } k \notin \mathrm{I}. \end{cases} \tag{0.5}$$

Определим переходные вероятности марковской цепи по формуле[1]

$$\begin{gathered} p(\lambda, \Lambda) = \sum_{I \subset [m]} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \left(\frac{C_i - C_j + j - i}{c_i - c_j + j - i} \right) \times \\ \times \prod_{k \in I} \frac{(c_k - k + a + 1)}{(a + b - m + n + k)} \prod_{k \notin I} \frac{(b - m + n - c_k + k)}{(a + b - m + n + k)}. \end{gathered} \tag{0.6}$$

Мы покажем, что это определение корректно: $\sum_\Lambda p(\lambda, \Lambda) = 1$.

Связь построенной выше марковской цепи с многомерными гипергеометрическими распределениями состоит в следующем.

[1] Ниже $[m]$ означает $\{1, \ldots, m\}$.

Теорема.

(1) *Распределение состояний* $\lambda \in \mathcal{Y}_n(m)$ *на* n*-м шаге марковской цепи* (0.6) *определяется формулой* (0.2).

(2) *Марковская цепь* (0.6) *центральна, т.е. вероятности переходов за* n *шагов от пустой диаграммы к заданной диаграмме* $\lambda \in \mathcal{Y}_n(m)$ *одинаковы и не зависят от истории этих переходов.*

(3) *Условия* (1) *и* (2) *однозначно характеризуют переходные вероятности* (0.6).

Как известно, центральные марковские цепи на графе ветвления сигнатур параметризуют характеры бесконечномерной унитарной группы $U(\infty) = \varinjlim U(n)$.[2] Наш интерес к гипергеометрическим распределениям мотивирован именно задачами гармонического анализа на группе $U(\infty)$. Характеры псевдорегулярных представлений этой группы определяются центральными марковскими цепями в пространстве сигнатур, зависящими от комплексного параметра z.[3] При целом значении параметра $z = m$ эта цепь совпадает с марковской цепью (0.6) с параметрами $a = m$, $b = m$. Случай нецелых z значительно сложнее. Вероятностные свойства соответствующих марковских цепей изучены пока недостаточно. Одна из целей данной статьи — популяризация трудной общей задачи о z-мерах на примере сравнительно простого частного случая целого параметра z.

Интересно, что связь общих z-мер и гипергеометрических распределений нетривиальна уже в классическом одномерном случае.

Рассмотрим стандартное гипергеометрическое распределение (0.1) с параметрами $a = 2u$, $b = 2v$, $m = u+v$ и запишем случайное число k в виде $k = u + f$, где f — новая случайная величина. Биномиальное тождество

$$\sum_{f=-u}^{u} \binom{2u}{u+f}\binom{2v}{v-f} = \binom{2u+2v}{u+v} \tag{0.7}$$

[2] В контексте теории характеров бесконечной симметрической группы $S(\infty) = \varinjlim S(n)$ понятие центральной марковской цепи было введено А. М. Вершиком и С. В. Керовым, см. [24, 13]. По поводу группы $U(\infty)$ см. [17, 4].

[3] В [17, 4] используется термин “обобщенные регулярные представления”. Они зависят от двух комплексных параметров, z и w. Представления, которые были известны в 1993 г., отвечают случаю $z = w$. См. также §13.

можно переписать в форме

$$\sum_{f\in\mathbb{Z}} \frac{u\,(u-1)\ldots(u-|f|+1)}{(u+1)\,(u+2)\ldots(u+|f|)}\;\frac{v\,(v-1)\ldots(v-|f|+1)}{(v+1)\,(v+2)\ldots(v+|f|)} = \\ = \frac{\Gamma(2(u+v)+1)}{\Gamma^2(u+v+1)}\;\frac{\Gamma^2(u+1)}{\Gamma(2u+1)}\;\frac{\Gamma^2(v+1)}{\Gamma(2v+1)}. \tag{0.8}$$

Поскольку обе части (0.8) аналитичны по параметрам, формула верна и при комплексных значениях u и v. Если $u = z$ и $v = \bar{z}$ комплексно сопряжены, все слагаемые в левой части (0.8) неотрицательны и мы приходим к *комплексному гипергеометрическому распределению* для f. Например, при $z = i$ получаем распределение с вероятностями

$$M(f) = \frac{\operatorname{th}\pi}{\pi}\frac{1}{(1+f^2)}; \quad f \in \mathbb{Z}. \tag{0.9}$$

Хотя это распределение похоже на дискретное распределение Коши, оно получено аналитическим продолжением из обычного гипергеометрического распределения. Можно ожидать, что различные числовые характеристики распределения (0.9) задаются теми же формулами, что и для более простых стандартных гипергеометрических распределений. Например, для второго момента имеем

$$\mathcal{M}_2 = \frac{uv}{2u+2v-1},$$

при условии …[4]. К сожалению, "лотерейное" описание гипергеометрических распределений обобщить на случай комплексных параметров пока не удается. Имеется в виду любая универсальная конструкция случайной величины f, зависящая от параметров u, v и приводящая, в специальных случаях, как к распределению (0.9), так и к стандартному гипергеометрическому распределению.

План текста следующий.

После демонстрационного примера в §1 я напоминаю в §2 основные факты об обобщенных биномиальных коэффициентах. В §3 вводится основной объект — многомерное гипергеометрическое распределение $M_n(a, b, m)$. На первом этаже (при $n = 1$)

[4] В этом месте в оригинале пропуск. По–видимому, имеется в виду, что момент существует, если $\Re(u) = \Re(v) > -1/4$.

оно совпадает с обычным. В §4 излагается красивая теория биномиальных детерминантов Гесселя–Вьенно. Вместо полустандартных таблиц в ней используются наборы непересекающихся плоских ломаных. Четыре комбинаторных доказательства основного гипергеометрического тождества, приведенные в §§3–4, дают одновременно и варианты получения гипергеометрического распределения из равномерного.

В §§5–6 гипергеометрические веса распределяются по отдельным клеткам диаграмм (условно говоря, получена "формула крюков и содержаний" для весов). В §7 описаны усеченные графы ветвления сигнатур (они имеют конечные этажи) и их центральные меры. Для каждого усеченного графа мы имеем двухпараметрическое семейство разложимых центральных мер. Их переходные вероятности выписаны в §8, а в §9 обоснована формула, отвечающая за центральность этих мер.

В §10 простым предельным переходом по n получены спектральные (разлагающие) распределения для гипергеометрических центральных мер. Процесс получения гипергеометрических распределений из равномерных (§§3–4) естественно распространяется на спектральные распределения, которые могут быть описаны как аффинные проекции лебеговой меры на подходящем многограннике. Это сделано в §11. В §12 вводится комплексное гипергеометрическое распределение.

Закончу введение двумя задачами. Они представляются достаточно решаемыми, а ответы для общих z-мер можно получить аналитическим продолжением по параметру z.

Задача 1. Рассмотрим случайную (равномерно распределенную) строгую по строкам полустандартную таблицу Юнга прямоугольной формы $\Pi(n,m)$ с элементами из множества $\{1,2,\dots,2m\}$, и пусть $c=(c_1,\dots,c_m)$ — длины столбцов диаграммы Юнга, заполненной младшей половиной символов $\{1,2,\dots,m\}$. Требуется найти средний вектор $< c >$.

Задача 2. Пусть случайный вектор $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_m)$ пробегает симплекс Δ_m, определенный неравенствами

$$1 \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_m \geqslant 0,$$

и имеет плотность

$$\prod_{i<j}(\gamma_i-\gamma_j)^2$$

по мере Лебега на Δ_m. Найти центр тяжести $< \gamma >$.

Начнем изложение с хорошо известного примера, демонстрирующего семейство неэргодических центральных мер, весьма близкое к z-мерам.

1. Треугольник Паскаля. В треугольнике Паскаля $\mathcal{P} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ этаж $\mathcal{P}_n$ содержит $n+1$ вершин $(k, n-k)$; $0 \leqslant k \leqslant n$, а из каждой вершины $(k, n-k)$ выходят две дуги, ведущие в вершины $(k, n-k+1)$ и $(k+1, n-k)$.

Соответствуют ли равномерные распределения на этажах

$$M_n(k, n-k) = \frac{1}{n+1} \tag{1.1}$$

какой–либо центральной мере? Положительный ответ на этот вопрос можно подтвердить предъявлением переходных вероятностей

$$\begin{aligned} &\text{Prob } \{(k, n-k) \to (k, n-k+1)\} = \frac{n-k+1}{n+2}; \\ &\text{Prob } \{(k, n-k) \to (k+1, n-k)\} = \frac{k+1}{n+2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Мера M, заданная формулами (1.2), центральна, но не эргодична. Эргодические центральные меры μ_p для треугольника Паскаля зависят от параметра $p \in [0, 1]$: на n-м этаже $\mathcal{P}_n$ мера μ_p имеет распределение Бернулли

$$\mu_{p,n}(k, n-k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}. \tag{1.3}$$

Поскольку

$$\binom{n}{k} \int_0^1 p^k \, (1-p)^{n-k} \, dp = \frac{1}{n+1}$$

при всех $0 \leqslant k \leqslant n$, за разложение меры M в интеграл эргодических мер

$$M_n = \int_0^1 \mu_{p,n} \; dp \tag{1.4}$$

отвечает равномерная мера на отрезке. Она возникает как предел дискретных равномерных распределений (1.1) на этажах графа $\mathcal{P}$.

1a. Урновые схемы Пойа для треугольника Паскаля. Более общий класс разложимых центральных мер связан с урновыми схемами Пойа (см. [9], гл. V, §2, с. 126). Пусть в урне первоначально имеется A синих и B белых шаров. На каждом шаге процесса из урны извлекается случайный шар, который затем возвращается вместе с дополнительным шаром того же цвета, что и извлеченный. После n–го шага находим в урне n новых шаров, из них k синих и $(n-k)$ белых.

Принимая пару $(k, n-k)$ за состояние марковской цепи, имеем переходные вероятности

$$\begin{aligned} \text{Prob}\,\{(k,n-k)\to(k,n-k+1)\} &= \frac{B+n-k}{A+B+n}; \\ \text{Prob}\,\{(k,n-k)\to(k+1,n-k)\} &= \frac{A+k}{A+B+n}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Легко видеть, что для всех цепочек из n переходов, переводящих исходное состояние $(0,0)$ в состояние $(k,n-k)$, вероятности одинаковы и равны

$$\varphi_n(k,n-k) = \frac{A\,(A+1)\,\ldots(A+k-1)\;B\,(B+1)\,\ldots(B+n-k-1)}{(A+B)\,(A+B+1)\,\ldots(A+B+n-1)}. \tag{1.6}$$

Таким образом, урновая схема Пойа задает в пространстве путей треугольника Паскаля центральную меру.

Чтобы представить эту меру как смесь эргодических, напомним бета–интеграл

$$\int_0^1 p^{A-1}\,(1-p)^{B-1}\,dp = \frac{\Gamma(A)\,\Gamma(B)}{\Gamma(A+B)}. \tag{1.7}$$

Получаем, что

$$\frac{\Gamma(A+B)}{\Gamma(A)\,\Gamma(B)}\int_0^1 p^{A+k-1}(1-p)^{B+n-k-1}\,dp = \varphi_n(k,n-k),$$

и мера M с параметрами A, B является смесью эргодических мер μ_p относительно бета–распределения

$$d\hat{M}(p) = \frac{\Gamma(A+B)}{\Gamma(A)\Gamma(B)}\,p^{A-1}\,(1-p)^{B-1}\,dp \tag{1.8}$$

по параметру $p \in [0,1]$, т.е.

$$M_n(k, n-k) = \int_0^1 \mu_{p,n}(k, n-k)\, d\hat{M}(p) \tag{1.9}$$

при всех $0 \leqslant k \leqslant n$. Ничто не мешает считать параметры A, B произвольными положительными числами (не обязательно целыми). Распределение (1.1) входит в построенное двухпараметрическое семейство при $A = B = 1$.

2. Многомерные биномиальные коэффициенты. Макдональд ([16], пример I.3.4) связывает с диаграммой Юнга λ полином

$$\binom{X}{\lambda} = \prod_{b \in \lambda} \frac{X - c(b)}{h(b)}. \tag{2.1}$$

Для однострочной диаграммы $\lambda = (N)$ это обычный биномиальный коэффициент

$$\binom{X}{N} = \frac{X\,(X-1)\ldots(X-N+1)}{N!}\,, \tag{2.2}$$

а для одностолбцовой диаграммы $\lambda = (1^N)$ получаем число сочетаний с повторениями:

$$\binom{X}{(1^N)} = \frac{X\,(X+1)\ldots(X+N-1)}{N!}. \tag{2.3}$$

Из определения (2.1) очевидна формула

$$\binom{-X}{\lambda} = (-1)^{|\lambda|}\binom{X}{\lambda'}. \tag{2.4}$$

Связь многомерных биномиальных коэффициентов с теорией симметрических функций состоит в том, что

$$\binom{m}{\lambda} = s_{\lambda'}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m \text{ раз}}), \tag{2.5}$$

где $s_{\lambda'}$ — функция Шура для транспонированной диаграммы λ'. В частности, для обычных сочетаний имеем

$$\binom{m}{k} = e_k(1, \ldots, 1), \tag{2.6}$$

а для сочетаний с повторениями —

$$\binom{m+k-1}{k} = h_k(1, \ldots, 1), \tag{2.7}$$

где e_k — элементарные симметрические функции, а h_k — полные однородные симметрические функции.

Аналогом бинома Ньютона можно считать тождество

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^X = \sum_{\lambda} \binom{X}{\lambda} s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.8}$$

(оно превращается в обычный бином при $n = 1$). Это тождество получается из формулы

$$\sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_{\lambda'}(y) = \prod_i \prod_j (1 + x_i\, y_j)$$

([16], гл. I, (4.3′)) подстановкой $y = (1, \ldots, 1)$. Заметим, что в [16] (гл. I, пример 4.1) в качестве обобщенной формулы бинома указана специализация (2.8) для $x = (t, \ldots, t)$:

$$(1+t)^{nX} = \sum_{\lambda} \binom{X}{\lambda} \binom{n}{\lambda'} t^{|\lambda|}.$$

Применяя формулу Якоби–Труди ([16], гл. I, (3.5)), можно выразить обобщенные биномиальные коэффициенты через обычные посредством определителей

$$\binom{X}{\lambda} = \det\left(\binom{X}{\lambda_i - i + j}\right). \tag{2.9}$$

Из второго варианта формулы Якоби–Труди ([16], гл. I, (3.4)) или из формулы (2.4) находим, что

$$\binom{X}{\lambda} = \det\left(\binom{X + c_i - i + j - 1}{c_i - i + j}\right), \tag{2.10}$$

где c_i — длина i–го столбца в λ.

Наиболее привычную интерпретацию многомерных биномиальных коэффициентов доставляют полустандартные таблицы Юнга: если $X = m$ — натуральное число, то $\binom{m}{\lambda}$ есть число полустандартных таблиц формы λ' с элементами из множества

$[m] = \{1, 2, \dots, m\}$. Иначе говоря, это число таблиц, строго возрастающих *по строкам* и неубывающих по столбцам. Вместо полустандартных таблиц иногда удобнее думать о схемах Гельфанда–Цетлина.

Воспользуемся комбинаторной интерпретацией биномиальных коэффициентов для вывода формулы, обобщающей свойство симметрии обычных биномиальных коэффициентов.

Лемма (Стенли, [22]). *Пусть* λ *— диаграмма Юнга в прямоугольнике* $\pi = \Pi(n, m)$ *ширины* m *и* $\tilde{\lambda} = \pi \setminus \lambda$ *— дополнительная диаграмма (буквально это косая диаграмма, но мы рассматриваем ее как повернутую на* 180° *диаграмму Юнга). Тогда*

$$\binom{m}{\lambda} = \binom{m}{\tilde{\lambda}}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathrm{STY}(\lambda; m)$ всех полустандартных таблиц Юнга формы λ' со значениями из множества $[m]$ и установим биекцию

$$\mathrm{STY}(\lambda'; m) \to \mathrm{STY}(\tilde{\lambda}'; m). \tag{2.12}$$

Для заданной таблицы $t \in \mathrm{STY}(\lambda'; m)$ определим заполнение $\tilde{t}$ диаграммы $\tilde{\lambda}'$ по правилу: в каждом столбце $\tilde{\lambda}'$ вписаны (в порядке убывания) числа из набора $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$, отсутствующие в столбце таблицы $\tilde{t}$. Легко видеть, что $\tilde{t} \in \mathrm{STY}(\tilde{\lambda}'; m)$ и что соответствие $t \mapsto \tilde{t}$ устанавливает искомую биекцию. •

Если $x = \{x_{i,j}\}$, $y = \{y_{i,j}\}$ — схемы ГЦ, отвечающие таблицам t и $\tilde{t}$, то

$$y_{i,j} = n - x_{j-i+1,j} \tag{2.13}$$

(см. рис. 1), что дает независимое доказательство (2.12).

Ниже в §4 мы укажем связь определителей (2.9), (2.10) с биномиальными детерминантами Гесселя–Вьенно и приведем их интерпретацию в терминах наборов непересекающихся ломаных.

2a. Формула для сочетаний. Нам понадобится еще одно свойство сочетаний, обобщающее формулу

$$\binom{a+b}{m}\binom{m}{a} = \binom{a+b}{a}\binom{b}{m-a}.$$

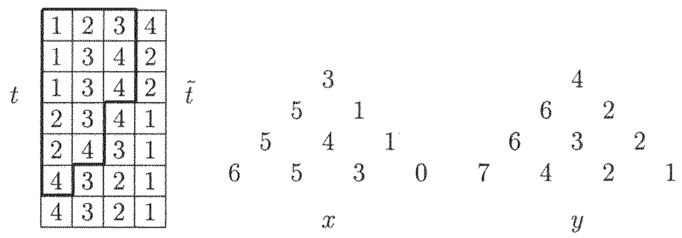


Рис. 1. Симметрия для таблиц и для схем ГЦ.

Лемма. *Пусть* $\pi = \Pi(n,m)$ *и* $\tau = \pi\backslash\sigma$ — *прямоугольник с* $(m-a)$ *столбцами, дополняющий* $\sigma = \Pi(n,a)$ *в* π. *Тогда справедливо тождество*

$$\binom{a+b}{\pi}\binom{m}{\sigma} = \binom{a+b}{\sigma}\binom{b}{\tau}. \tag{2.14}$$

Доказательство нетрудно вывести непосредственно из определения (2.1). Для этого запишем (2.14) в виде

$$\prod_{x\in\sigma}\frac{a+b-c_\pi(x)}{h_\pi(x)}\prod_{x\in\tau}\frac{a+b-c_\pi(x)}{h_\pi(x)}\prod_{x\in\sigma}\frac{m-c_\sigma(x)}{h_\sigma(x)} = \prod_{x\in\sigma}\frac{a+b-c_\sigma(x)}{h_\sigma(x)}\prod_{x\in\tau}\frac{b-c_\tau(x)}{h_\tau(x)}.$$

Последняя формула справедлива, поскольку

$$\begin{aligned} c_\pi(x) &= c_\sigma(x) &&\text{при}\quad x\in\sigma,\\ a+b-c_\pi(x) &= b-c_\tau(x) &&\text{и}\quad h_\pi(x)=h_\tau(x) \quad \text{при}\quad x\in\tau,\\ m-c_\sigma(i,j) &= h_\pi(n-i+1,j) &&\text{при}\quad 1\leqslant i\leqslant n;\ 1\leqslant j\leqslant a. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\bullet$

3. Многомерное гипергеометрическое распределение. Обычное гипергеометрическое распределение связано с тождеством

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{a}{k}\binom{b}{m-k} = \binom{a+b}{m}. \tag{3.1}$$

Подставляя вместо обычных биномиальных коэффициентов обобщенные, приходим к следующему многомерному аналогу формулы (3.1).

Теорема. *Пусть $a \leqslant m \leqslant b$. Тогда справедливо тождество*

$$\sum_{\lambda \subseteq \pi} \binom{a}{\lambda} \binom{b}{\tilde{\lambda}} = \binom{a+b}{\pi}, \tag{3.2}$$

в котором λ пробегает всевозможные диаграммы Юнга в прямоугольнике $\pi = \Pi(n,m)$ с n строчками и m столбцами, а $\tilde{\lambda}$ — (повернутая на $180°$) диаграмма, дополняющая λ в прямоугольнике π.

Мы даем четыре комбинаторных доказательства теоремы, в которых правая часть (3.2) интерпретируется как число

(1) полустандартных таблицы Юнга формы π' с элементами из $[a+b]$;
(2) схем Гельфанда–Цетлина с $a+b$ строками;
(3) наборов непересекающихся ломаных (две версии).

(1) **Доказательство с использованием полустандартных таблиц.** Рассмотрим совокупность $\mathrm{STY}(\lambda; i, j)$ полустандартных таблиц Юнга формы λ со значениями из множества $\{i, i{+}1, \dots, j\}$. Формула (3.2) непосредственно вытекает из следующего результата.

Предложение. *Множества*

$$\bigcup_{\lambda \subseteq \pi} \mathrm{STY}(\lambda'; 1, a) \times \mathrm{STY}(\tilde{\lambda}'; 1, b)$$

и $\mathrm{STY}(\pi'; 1, a+b)$ равномощны.

Доказательство. Пусть t — полустандартная таблица Юнга прямоугольной формы $\pi' = \Pi(m,n)$ с элементами из $[a+b] = \{1, 2, \dots, a+b\}$. Часть t, заполненная номерами $k \leqslant a$, составляет полустандартную таблицу t_+ на некоторой диаграмме Юнга $\lambda' \subseteq \pi'$. Оставшиеся значения $a+1 \leqslant k \leqslant a+b$ задают полустандартную таблицу $\hat{t}_-$ на косой диаграмме $\kappa' = \pi' \setminus \lambda'$, дополняющей λ' в прямоугольнике π'. Обратно, любая пара таблиц $(t_+, \hat{t}_-)$ вместе составляет полустандартную таблицу $t \in \mathrm{STY}(\pi'; 1, a+b)$.

Остается установить биекцию

$$\mathrm{STY}(\kappa'; a+1, a+b) \to \mathrm{STY}(\tilde{\lambda}'; 1, b). \tag{3.3}$$

Определим заполнение t_- диаграммы $\tilde{\lambda}'$, заменяя каждое число k в таблице $\hat{t}_-$ на значение $a+b-k+1$. Легко видеть (см. рис. 2), что $t_- \in \mathrm{STY}(\tilde{\lambda}'; 1, b)$ и что соответствие $\tilde{t}_- \mapsto t_-$ устанавливает искомую биекцию. •

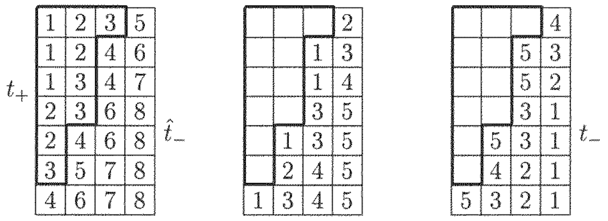


Рис. 2. Таблица формы π порождает диаграмму λ.

(2) **Доказательство в терминах схем Гельфанда–Цетлина.** Интерпретируем правую часть в (3.2) как множество наборов $z = \{z_{i,j}\}_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N}$ (где $N = a + b$) неотрицательных целых чисел, для которых

$$z_{1,N} = \ldots = z_{m,N} = n; \quad z_{m+1,N} = \ldots = z_{N,N} = 0 \tag{3.4}$$

и выполняются обычные для схем ГЦ неравенства

$$z_{i,j+1} \geqslant z_{i,j} \geqslant z_{i+1,j+1}. \tag{3.5}$$

Удобно считать, что $z_{i,j} = n$ при $i < 1$ и $z_{i,j} = 0$, если $i > j$. Из условий (3.4) и (3.5) следует, что

$$\begin{aligned} z_{i,N-m+j} &= n \quad \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m; \\ z_{i,j} &= 0 \quad \text{при} \quad m+1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N. \end{aligned}$$

Прочие значения $z_{i,j}$ распадаются на две схемы ГЦ $x = \{x_{i,j}\}$ и $y = \{y_{i,j}\}$, где

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= z_{i,j} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant a; \\ y_{i,j} &= n - z_{m-i+1,N-j} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant b. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Треугольник ГЦ x имеет a строчек и диаграмму Юнга с длинами столбцов

$$c_1 = z_{1a}, \quad c_2 = z_{2a}, \quad \dots, \quad c_a = z_{aa}.$$

Треугольник y имеет b строчек и соответствует дополнительной диаграмме Юнга.

Ясно (см. рис. 3), что соответствие $z \mapsto (x, y)$ взаимно–однозначно, что еще раз доказывает формулу (3.2). $\bullet$

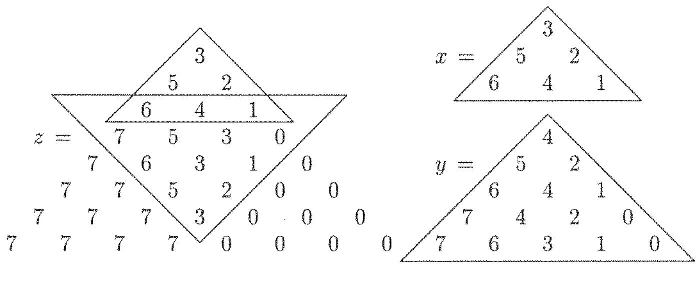


Рис. 3. Схема ГЦ разрезается на две.

Пример. При $a = 2$, $m = 3$, $b = 5$ треугольники $\{z_{i,j}\}$ имеют вид

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & z_{11} & & & & & & \\
 & & & & & z_{12} & & z_{22} & & & & & \\
 & & & & z_{13} & & z_{23} & & z_{33} & & & & \\
 & & & z_{14} & & z_{24} & & z_{34} & & 0 & & & \\
 & & n & & z_{25} & & z_{35} & & 0 & & 0 & & \\
 & n & & n & & z_{36} & & 0 & & 0 & & 0 & \\
n & & n & & n & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}.$$

При обычном отождествлении полустандартных таблиц Юнга и схем Гельфанда–Цетлина построенные выше биекции совпадают. Третье и четвертое доказательства мы откладываем до §4.

Определим *многомерное гипергеометрическое распределение* с тремя параметрами $a \leqslant m \leqslant b$ формулой

$$M_n(\lambda) = \binom{a}{\lambda} \binom{b}{\tilde\lambda} \Big/ \binom{a+b}{\pi}. \qquad (3.7)$$

В частности, при $n = 1$ получаем обычное гипергеометрическое распределение.[5]

4. Теория Гесселя–Вьенно. Замечательная теория биномиальных детерминантов и связанная с ней интерпретация полустандартных таблиц как наборов непересекающихся ломаных предложена в [10]. Она приводит к двум новым доказательствам формулы (3.2).

Определение. *Биномиальными детерминантами* Гессель и Вьенно называют определители вида

$$\binom{a_1, \dots, a_n}{b_1, \dots, b_n} = \det\left(\binom{a_j}{b_i}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, \tag{4.1}$$

где

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n; \quad b_1 > b_2 > \ldots > b_n, \tag{4.2}$$

т.е. произвольные миноры бесконечной матрицы биномиальных коэффициентов

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \dots \\ & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots \\ & & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \dots \\ & & & \binom{3}{3} & \dots \\ & & & & \dots \end{pmatrix}.$$

Заметим, что верхние индексы нумеруют столбцы, а нижние — строки.

Многомерные биномиальные коэффициенты из §2 можно выразить биномиальными детерминантами, родственными определителям (2.9):

$$\binom{a}{\lambda} = \binom{a+n-1, a+n-2, \dots, a}{\lambda_1+n-1, \lambda_2+n-2, \dots, \lambda_n}. \tag{4.3}$$

Действительно, последние столбцы определителей (2.9) и

$$\binom{a+n-1, \dots, a}{\lambda_1+n-1, \dots, \lambda_n} = \det\left(\binom{a+n-j}{\lambda_i - i + n}\right) \tag{4.4}$$

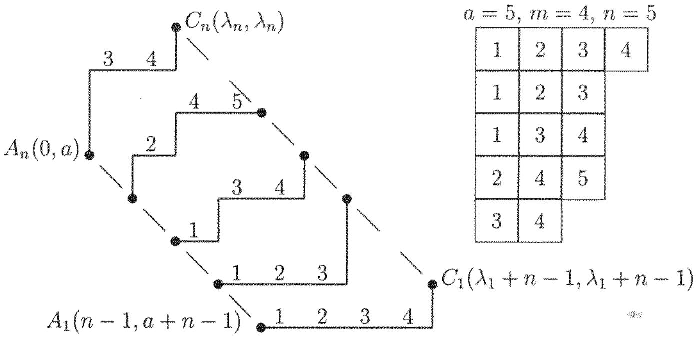
[5] Неравенства $a \leqslant m \leqslant b$, наложенные на параметры, представляются избыточными. Определение имеет смысл при более слабом предположении $a + b \geqslant m$. Отметим, что при этом возникает следующая симметрия: распределение M_n не меняется при преобразовании $a \to m$, $m \to a$, $b \to b + a - m$.

совпадают, а k-й с конца столбец определителя (4.4) является суммой последних k столбцов определителя (2.9) с подходящими коэффициентами. Более точно, следует применить тождество

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{a}{r+k-j+1}\binom{k-1}{j-1} = \binom{a+k-1}{r+k} \qquad (4.5)$$

при $r = \lambda_i - i + n - k$.

В теории Гесселя–Вьенно детерминант (4.3) интерпретируется как число наборов из n непересекающихся плоских ломаных, соединяющих попарно точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с координатами $(n-1, a+n-1), \ldots, (0, a)$ и точки $C_1, \ldots, C_n$ с координатами $(\lambda_1+n-1, \lambda_1+n-1), \ldots, (\lambda_n, \lambda_n)$. Из рис. 4 легко понять биективное соответствие между такими наборами и полустандартными таблицами Юнга (строгими по строкам) формы λ с элементами $1, \ldots, a$.



$a=5$, $m=4$, $n=5$

1	2	3	4
1	2	3	
1	3	4	
2	4	5	
3	4		

Рис. 4. К интерпретации детерминанта $\binom{a+n-1, \ldots, a}{\lambda_1+n-1, \ldots, \lambda_n}$.

Аналогично, определитель (2.10) можно при натуральном $X = b$ представить биномиальным детерминантом

$$\binom{b}{\lambda} = \binom{c_1+b-1, c_2+b-2, \ldots, c_m+b-m}{b-1, b-2, \ldots, b-m}, \qquad (4.6)$$

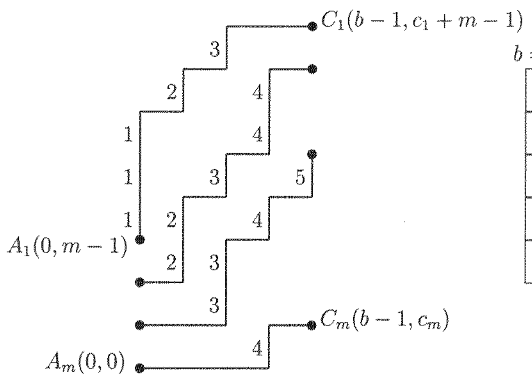
где $c_1, c_2, \dots, c_m$ — длины столбцов диаграммы λ. Действительно, из тождества

$$\binom{r+k-1}{b-1} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} \binom{r}{b-i}, \tag{4.7}$$

примененного при $r = c_j + b - j$, видно, что k-я строка определителя (2.10) есть линейная комбинация первых k строк правой части в (4.6).

Заметим, что формулы (4.5), (4.7) являются специализациями тождества (3.1).

Для биномиальных детерминантов вида (4.6) воспользуемся дуальной интерпретацией Гесселя–Вьенно ([10], предложение 7). Здесь детерминант толкуется как число наборов из m непересекающихся ломаных, соединяющих точки $A_1, \dots, A_m$ с координатами $(0, m-1), \dots, (0,0)$ и точки $C_1, \dots, C_m$ с координатами $(b-1, c_1+m-1), \dots, (b-1, c_m)$. На рис. 5 можно проследить биективное соответствие между этими наборами и полустандартными таблицами Юнга (строгими по строкам) формы λ с элементами $1, \dots, b$.



$b=5,\ m=4,\ n=5$

1	2	3	4
1	2	3	
1	3	4	
2	4	5	
3	4		

Рис. 5. К интерпретации детерминанта $\binom{c_1+b-1, \dots, c_m+b-m}{b-1, \dots, b-m}$.

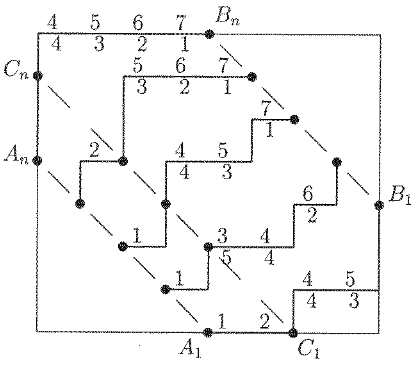
В терминах биномиальных детерминантов вида (4.3) тождество (3.2) выглядит так:

$$\sum_{m \geqslant \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0} \binom{a+n-1, \ldots, a}{\lambda_1+n-1, \ldots, \lambda_n} \binom{b+n-1, \ldots, b}{\tilde\lambda_1+n-1, \ldots, \tilde\lambda_n} = \\ = \binom{a+b+n-1, \ldots, a+b}{m+n-1, \ldots, m}. \tag{4.8}$$

Разумеется, при $n = 1$ это дает формулу (3.1).

Согласно результатам [10], правая часть (4.8) интерпретируется как число наборов из n непересекающихся ломаных, соединяющих точки A_k с координатами $(n-k, a+b-m+n-k)$ и точки B_k с координатами $(m+n-k, n-k)$; здесь $k = 1, \ldots, n$ (рис. 6). Пусть k-я ломаная пересекает диагональ $y-x = b-m$ в точке C_k с координатами $(l_k, b-m+l_k)$, где

$$l_k = \lambda_k + n - k; \quad k = 1, \ldots, n.$$



1	2	4	5
1	3	4	6
1	4	5	7
2	5	6	7
4	5	6	7

1	2	4	3
1	5	4	2
1	4	3	1
2	3	2	1
4	3	2	1

Рис. 6. Ломаные как строки таблиц.

Тогда $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — диаграмма Юнга, причем число наборов непересекающихся ломаных, соединяющих точки A_k с диагональю в тех же точках C_k, равно

$$\begin{pmatrix} a+n-1, \dots, a \\ \lambda_1+n-1, \dots, \lambda_n \end{pmatrix},$$

а число наборов ломаных, соединяющих точки B_k с точками C_k, есть

$$\begin{pmatrix} b+n-1, \dots, b \\ \tilde\lambda_1+n-1, \dots, \tilde\lambda_n \end{pmatrix}.$$

Это дает третье доказательство теоремы из §3, наиболее близкое к стандартному доказательству тождества (3.1).

Для удобства отождествления наборов ломаных с полустандартными таблицами, рядом с горизонтальными звеньями на рис. 6 указаны их порядковые номера, считая от начала соответствующей ломаной.

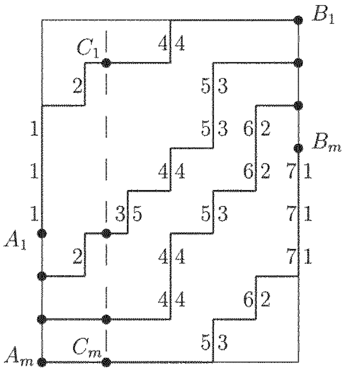
В терминах детерминантов (4.6) тождество (3.2) выглядит так:

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant c_1\geqslant\dots\geqslant c_m\geqslant 0} &\begin{pmatrix} c_1+m-1, \dots, c_a+m-a, m-a-1, \dots, 0 \\ m-1, \dots, m-a, m-a-1, \dots, 0 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} c_1+b-1, \dots, c_m+b-m \\ b-1, \dots, b-m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b-1+n, \dots, a+b-m+n \\ a+b-1, \dots, a+b-m \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Комбинаторное доказательство формулы (4.9) ясно из рис. 7. Здесь правая часть перечисляет наборы непересекающихся ломаных, ведущих из точек A_k с координатами $(0, m-k)$ в точки B_k с координатами $(a+b-1, n+m-k)$. Для отождествления наборов ломаных с полустандартными таблицами, рядом с вертикальными звеньями на рис. 7 приписаны их номера столбцов.

5. Локализация весов. В этом разделе мы переписываем формулу (3.7) для нагрузок многомерного гипергеометрического распределения в виде произведения весов, ассоциированных с отдельными клетками диаграммы Юнга λ.

Как обычно, мы обозначаем через $c_\pi(x) = j - i$ содержание клетки $x \in \lambda$, находящейся в i-й строке и j-м столбце. Через



1	2	4	5
1	3	4	6
1	4	5	7
2	5	6	7
4	5	6	7

1	2	4	3
1	5	4	2
1	4	3	1
2	3	2	1
4	3	2	1

Рис. 7. Ломаные как столбцы таблиц.

$h_\lambda(x)$ обозначается длина крюка клетки x (в отличие от содержания, длина крюка зависит от диаграммы, а не только от положения клетки). Дополнение диаграммы $\lambda \subseteq \pi$ в фиксированном прямоугольнике $\pi = \Pi(n, m)$ обозначим через $\tilde{\lambda}$. Здесь подразумевается, что косая диаграмма $\kappa = \pi \backslash \lambda$ повернута на $180°$; после этого она становится истинной диаграммой Юнга, и именно эту диаграмму Юнга мы обозначаем через $\tilde{\lambda}$.

Назовем *зеркальным содержанием* клетки $x \in \pi$ величину $\tilde{c}_\pi(x) = j' - i'$, где i', j' — номера строки и столбца клетки x, но отсчитываемые от нижнего правого угла прямоугольника $\pi = \Pi(n, m)$. Таким образом, имеем $i' = n - i + 1$, $j' = m - j + 1$ и

$$m - \tilde{c}_\pi(x) = n + c_\pi(x) \tag{5.1}$$

для всех клеток $x \in \pi$. Ясно, что $\tilde{c}_\pi(x)$ есть в точности содержание клетки x относительно дополнительной диаграммы $\tilde{\lambda}$. Отметим, что если клетка $x \in \pi$ имеет координаты (i, j), а x' — клетка с координатами (i,j'), то $h_\pi(x')=n+c_\pi(x)$. Получаем, что

$$\prod_{x\in\pi} h_\pi(x)=\prod_{x\in\pi}(n+c_\pi(x)), \tag{5.2}$$

а из (5.1) видно, что

$$\prod_{x\in\pi}(n+c_\pi(x))=\prod_{x\in\pi}(m-\tilde c_\pi(x)). \tag{5.3}$$

Если эти формулы применить к перевернутому прямоугольнику $\tilde\pi$ (совпадающему с π), то получим, что

$$\prod_{x\in\pi}(n+c_\pi(x))=\prod_{x\in\pi}(m-c_\pi(x)). \tag{5.4}$$

Будем обозначать через $\dim_n\lambda$ число полустандартных таблиц Юнга формы λ с элементами $1,2,\dots,n$. Таким образом,

$$\dim_n\lambda=\binom{n}{\lambda'}=\prod_{x\in\lambda}\frac{n+c_\pi(x)}{h_\lambda(x)}. \tag{5.5}$$

Теорема. *Веса (3.7) многомерного гипергеометрического распределения можно записать в виде*

$$M_n(\lambda)=\dim_n^2\lambda\,\frac{W_\lambda(a,m)\,W_{\tilde\lambda}(b,m)}{W_\pi(a+b,m)}, \tag{5.6}$$

где

$$\begin{aligned} W_\lambda(a,m)&=\prod_{x\in\lambda}(a-c_\pi(x))\,(m-c_\pi(x)),\\ W_{\tilde\lambda}(b,m)&=\prod_{x\in\tilde\lambda}(b-\tilde c_\pi(x))\,(m-\tilde c_\pi(x)),\\ W_\pi(a+b,m)&=\prod_{x\in\pi}(a+b-c_\pi(x))\,(m-c_\pi(x)).\end{aligned} \tag{5.7}$$

Доказательство. По определению (2.1) многомерных биномиальных коэффициентов,

$$\binom{a}{\lambda}\Big/\binom{n}{\lambda'}=\prod_{x\in\lambda}\frac{a-c_\pi(x)}{n+c_\pi(x)}. \tag{5.8}$$

Используя свойства симметрии (2.11), можем записать

$$\binom{b}{\tilde\lambda}\Big/\binom{n}{\lambda'} = \binom{b}{\tilde\lambda}\binom{m}{\lambda}\Big/\binom{m}{\tilde\lambda}\binom{n}{\lambda'}$$
$$= \prod_{x\in\lambda}\frac{m-c_\pi(x)}{n+c_\pi(x)}\prod_{x\in\tilde\lambda}\frac{b-\tilde c_\pi(x)}{m-\tilde c_\pi(x)}, \tag{5.9}$$

и далее, в силу (5.1),

$$\binom{a}{\lambda}\binom{b}{\tilde\lambda}\Big/\dim_n^2\lambda$$
$$= \prod_{x\in\lambda}\frac{(a-c_\pi(x))\,(m-c_\pi(x))}{(n+c_\pi(x))\,(n+c_\pi(x))}\prod_{x\in\tilde\lambda}\frac{(b-\tilde c_\pi(x))\,(m-\tilde c_\pi(x))}{(n+c_\pi(x))\,(n+c_\pi(x))}. \tag{5.10}$$

Применяя равенства (5.2), (5.4), имеем

$$\binom{a+b}{\pi} = \prod_{x\in\pi}\frac{(a+b-c_\pi(x))\,(m-c_\pi(x))}{(n+c_\pi(x))\,(n+c_\pi(x))},$$

и формула (5.6) доказана. •

6. Формулы размерности. Запишем размерность (5.5) через длины строк (столбцов) диаграммы $\lambda\subseteq\pi=\Pi(n,m)$:

$$\dim_n\lambda = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{\lambda_i-\lambda_j+j-i}{j-i}\right), \tag{6.1}$$

$$\dim_n\lambda = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}\left(\frac{c_i-c_j+j-i}{j-i}\right)\prod_{x\in\lambda}\frac{n+c_\pi(x)}{m-c_\pi(x)}. \tag{6.2}$$

Действительно,

$$\dim_n\lambda = \binom{m}{\lambda}\cdot\binom{n}{\lambda'}\Big/\binom{m}{\lambda},$$

и (6.2) следует из (6.1).

Если $a=b=m$, то для меры $M_{m,n}=M_n(m,m,m)$ находим

$$M_{m,n}(\lambda) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}\left(\frac{c_i-c_j+j-i}{j-i}\right)^2\prod_{k=1}^{m}\frac{(k)_m}{(n+k)_m}, \tag{6.3}$$

где $(x)_m = x(x+1)\dots(x+m-1)$ есть символ Похгаммера.

Отметим простейшие специальные случаи:

- $m=1$. В этом случае $n \geqslant c_1 \geqslant 0$ и мера равномерна,

$$M_{1,n} = \frac{1}{n+1}. \tag{6.4}$$

- $m=2$. Здесь $n \geqslant c_1 \geqslant c_2 \geqslant 0$ и

$$M_{2,n} = \frac{12\,(c_1-c_2+1)^2}{(n+1)\,(n+2)^2\,(n+3)}. \tag{6.5}$$

- $m=3$. Для диаграммы со столбцами $n \geqslant c_1 \geqslant c_2 \geqslant c_3 \geqslant 0$ вероятность равна

$$M_{3,n} = \frac{2160\,(c_1-c_2+1)^2\,(c_1-c_3+2)^2\,(c_2-c_3+1)^2}{(n+1)\,(n+2)^2\,(n+3)^3\,(n+4)^2\,(n+5)}. \tag{6.6}$$

Вполне вероятно, что нам понадобится формула размерности в координатах Фробениуса. Для произвольной n–сигнатуры

$$f = (f_1, \ldots, f_n)$$

обозначим через f^+ положительную часть сигнатуры f, т.е. диаграмму Юнга

$$f^+ = (\lambda_1^+, \ldots, \lambda_n^+) \tag{6.7}$$

с длинами строк $\lambda_k^+ = \max(f_k, 0)$, и пусть

$$f^- = (\lambda_1^-, \ldots, \lambda_n^-) \tag{6.8}$$

— отрицательная часть сигнатуры f, т.е. диаграмма Юнга с длинами строк $\lambda_k^- = \max(-f_{n-k+1}, 0)$. Обозначим через d, δ длины главных диагоналей диаграмм f^+, f^-, и пусть

$$f^+ = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_d \\ b_1 & \ldots & b_d \end{pmatrix}; \quad f^- = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_\delta \\ \beta_1 & \ldots & \beta_\delta \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

их (целые) координаты Фробениуса. Тогда для размерности имеется следующее простенькое выражение:

$$\begin{aligned}\dim_n f = \prod_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{\delta}\frac{(n+a_i+\alpha_j+1)(n-b_j-\beta_j-1)}{(n+a_i-\beta_j)(n-b_i+\alpha_j)}\times\\ \times\prod_{i=1}^{d}\frac{(n+a_i)!}{(n-b_i-1)!}\prod_{j=1}^{\delta}\frac{(n+\alpha_j)!}{(n-\beta_j-1)!}\times\\ \times\frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant d}(a_i-a_j)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant d}(b_i-b_j)}{\prod_{i=1}^{d}a_i!\prod_{i=1}^{d}b_i!\prod_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{d}(a_i+b_j+1)}\times\\ \times\frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant \delta}(\alpha_i-\alpha_j)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant \delta}(\beta_i-\beta_j)}{\prod_{i=1}^{\delta}\alpha_i!\prod_{i=1}^{\delta}\beta_i!\prod_{i=1}^{\delta}\prod_{j=1}^{\delta}(\alpha_i+\beta_j+1)}.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Доказательство довольно занудное, и я его здесь не привожу. Нетрудно проверить (6.10) в различных специальных случаях, например, если $f^- = \emptyset$.

6а. Более общие формулы для гипергеометрических центральных мер. При целом a диаграмма λ в формуле (5.6) может иметь не более a ненулевых столбцов $c_1, \dots, c_a$. В этих параметрах веса распределения $M_n = M_n(a,b,m)$ на диаграммах $\lambda \subseteq \Pi(n,a)$ можно записать в следующей явной форме.

Предложение. *Пусть M_n — распределение на n-м этаже центральной меры $M = M(a,b,m)$. Тогда справедлива формула*

$$\begin{aligned}M_n(\lambda) = F\times\prod_{1\leqslant i<j\leqslant a}(c_i-c_j+j-i)^2\times\\ \times\prod_{j=1}^{a}\frac{(c_j-j+m)\dots(c_j-j+a+1)\,(\tilde c_j-j+a+b-m)\dots(\tilde c_j-j+a+1)}{(n-j+a+b)\dots(n-j+a+1)},\end{aligned} \tag{6.11}$$

где $\tilde c_j = n - c_{a-j+1}$ при $j = 1, \dots, a$ — длины столбцов дополнительной диаграммы $\Pi(n,a)\backslash\lambda$ и константа

$$F = \prod_{j=1}^{a}\frac{(a+b-j)!}{(j-1)!\,(m-j)!\,(a+b-m-j)!} \tag{6.12}$$

не зависит ни от λ, ни от n.

Доказательство. Разобьем прямоугольник $\pi = \Pi(n,m)$ на прямоугольник из первых a столбцов $\sigma = \Pi(n,a)$ и дополнительный прямоугольник $\tau = \pi \setminus \sigma$, и пусть $\tilde\lambda = \sigma \setminus \lambda$ — дополнение диаграммы λ в прямоугольнике σ. Диаграмму $\pi \setminus \lambda$ удобно обозначить через $\tau + \tilde\lambda$. Для фиксированной диаграммы Юнга λ вычислим отношение

$$\frac{M_n(a,b,m)}{M_n(a,a,a)} = \frac{\binom{a}{\lambda}\binom{b}{\tau+\tilde\lambda}}{\binom{a+b}{\sigma+\tau}} \frac{\binom{2a}{\sigma}}{\binom{a}{\lambda}\binom{a}{\tilde\lambda}} = \frac{\binom{m}{\lambda}}{\binom{a}{\lambda}} \frac{\binom{b}{\tau+\tilde\lambda}}{\binom{m}{\tau+\tilde\lambda}} \frac{\binom{2a}{\sigma}}{\binom{a+b}{\pi}}. \tag{6.13}$$

Здесь используется, что $\binom{a}{\tilde\lambda} = \binom{a}{\lambda}$ и $\binom{m}{\tau+\tilde\lambda} = \binom{m}{\lambda}$ согласно свойству симметрии (2.11).

Для отдельных сомножителей в (6.13) находим

$$\frac{\binom{m}{\lambda}}{\binom{a}{\lambda}} = \prod_{x\in\lambda} \frac{m - c_\sigma(x)}{a - c_\sigma(x)} = \prod_{j=1}^{a} \frac{(a-j)!}{(m-j)!} \frac{(c_j - j + m)!}{(c_j - j + a)!}, \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\binom{m}{\tau}\binom{b}{\tau+\tilde\lambda}}{\binom{b}{\tau}\binom{m}{\tau+\tilde\lambda}} &= \prod_{x\in\tilde\lambda} \frac{b - \tilde c_\pi(x)}{m - \tilde c_\pi(x)} \\ &= \prod_{j=1}^{a} \frac{(a-j)!}{(a+b-m-j)!} \frac{(\tilde c_j - j + a + b - m)!}{(\tilde c_j - j + a)!}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Учитывая, что $\binom{m}{\tau} = \binom{m}{\sigma}$, и используя (2.14), имеем

$$\frac{\binom{b}{\tau}\binom{2a}{\sigma}}{\binom{m}{\tau}\binom{a+b}{\pi}} = \frac{\binom{b}{\tau}\binom{2a}{\sigma}}{\binom{m}{\sigma}\binom{a+b}{\pi}} = \frac{\binom{2a}{\sigma}}{\binom{a+b}{\sigma}}. \tag{6.16}$$

Покажем теперь, что для меры $M = M_n(a,a,a)$

$$M_n(\lambda) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant a} \left(\frac{c_i - c_j + j - i}{j-i}\right)^2 \Big/ \binom{2a}{\sigma}. \tag{6.17}$$

Для этого заметим, что при $a = m = b$ второе произведение в (5.10) равно единице ввиду (5.1). Первое произведение сокращается с квадратом второго множителя в формуле размерности (6.2). Получаем, что

$$M_n(\lambda) = \binom{a}{\lambda}\binom{a}{\tilde\lambda} \Big/ \binom{2a}{\sigma} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant a} \left(\frac{c_i - c_j + j - i}{j-i}\right)^2 \Big/ \binom{2a}{\sigma}.$$

Формула (6.11) непосредственно следует из (6.13)–(6.17), поскольку

$$1\Big/\binom{a+b}{\sigma} = \prod_{x\in\sigma}\frac{h(x)}{a+b-c_\sigma(x)} = \prod_{j=1}^{a}\frac{(a+b-j)!\,(n-j+a)!}{(a-j)!\,(n-j+a+b)!}.$$

Предложение доказано. •

Примеры. При $a=1$ имеем

$$F=\frac{b!}{(m-1)!\,(b-m)!}$$

и

$$M_n(\lambda)=F\times\frac{(c_1+m-1)\ldots(c_1+1)\;(n-c_1+b-m)\;\ldots(n-c_1+1)}{(n+b)\;\ldots(n+1)}.$$

Если $a=2$, то вероятность диаграммы λ равна

$$M_n(\lambda)=F\times(c_1-c_2+1)^2\times$$
$$\times\frac{(c_1+m-1)\;\ldots(c_1+2)\;(n-c_1+b-m)\;\ldots(n-c_1+1)}{(n+b+1)\;\ldots(n+2)}\times$$
$$\times\frac{(c_2+m-2)\;\ldots(c_2+1)\;(n-c_2+b-m+1)\;\ldots(n-c_2+2)}{(n+b)\;\ldots(n+1)},$$

где

$$F=\frac{(b+1)!\,b!}{(m-1)!\,(m-2)!\,(b-m+1)!\,(b-m)!}.$$

7. Усеченные ветвления сигнатур. Зафиксируем натуральный параметр m и выберем в качестве вершин n-го этажа множество $\mathcal{S}_n(m)$ диаграмм Юнга $\lambda\subseteq\pi$ в прямоугольнике $\pi=\Pi(n,m)$ с n строками и m столбцами. *Усеченным ветвлением сигнатур* мы называем ограничение обычного ветвления на подмножество $\mathcal{S}(m)=\cup_n\mathcal{S}_n(m)$. Таким образом, в процессе роста к диаграммам Юнга добавляются горизонтальные полосы в границах фиксированных столбцов.

При $m=1$ усеченное ветвление сигнатур совпадает с треугольником Паскаля из п. 1.

Для эргодических центральных мер в пространстве бесконечных полустандартных таблиц Юнга

$$t=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\ldots,\lambda^{(n)},\ldots)$$

почти наверное существуют пределы (частоты)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\lambda^{(n)})'_k}{n}=\gamma_k;\quad k=1,\,\dots,m. \tag{7.1}$$

Эти параметры полностью определяют центральную меру. Они ограничены неравенствами

$$1\geqslant\gamma_1\geqslant\gamma_2\geqslant\dots\geqslant\gamma_m\geqslant 0 \tag{7.2}$$

и составляют симплекс Δ_m.

Согласно обобщенной формуле бинома (2.8)

$$\prod_{j=1}^{m}(1+\alpha_j)^n=\sum_{\lambda\subseteq\Pi[n,m]}\binom{n}{\lambda'}s_{\lambda'}(\alpha_1,\,\dots,\alpha_m). \tag{7.3}$$

Известно, что распределения на этажах

$$\mu_\alpha(\lambda)=\frac{\dim_n\lambda\ \cdot s_{\lambda'}(\alpha_1,\,\dots,\alpha_m)}{\prod_1^m(1+\alpha_j)^n} \tag{7.4}$$

задают эргодическую центральную меру в пространстве путей усеченного графа ветвления сигнатур $\mathcal{S}(m)$. Параметры $\alpha=(\alpha_1,\,\dots,\alpha_m)$ связаны с введенными ранее параметрами $\gamma=(\gamma_1,\,\dots,\gamma_m)$ формулой

$$\alpha_k=\frac{\gamma_k}{1-\gamma_k};\quad k=1,\dots,m. \tag{7.5}$$

Гармоническая функция $\varphi_\alpha(\lambda)=\mu_\alpha(\lambda)/\dim_n\lambda$, связанная с мерой μ_α, равна

$$\varphi_\alpha(\lambda)=\frac{s_{\lambda'}(\alpha)}{\prod_1^m(1+\alpha_k)^n}=\frac{\begin{vmatrix}\alpha_1^{y_1} & \dots & \alpha_1^{y_m}\\ & \dots & \\ \alpha_m^{y_1} & \dots & \alpha_m^{y_m}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1^{m-1} & \dots & 1\\ & \dots & \\ \alpha_m^{m-1} & \dots & 1\end{vmatrix}}\prod_{k=1}^{m}(1+\alpha_k)^{-n}. \tag{7.6}$$

где $s_{\lambda'}(\alpha)$ — функция Шура и $y_k=c_k+m-k$; $k=1,\dots,m$.

Распределение (7.4) является многомерным аналогом биномиального распределения с переменными вероятностями успехов $\gamma_1,\,\dots,\gamma_m$ в каждом из m опытов.

8. Переходные вероятности. Натуральные параметры $a \leqslant m \leqslant b$ задают семейство распределений (3.7) на этажах усеченного графа сигнатур $\mathcal{S}(m)$. Мы покажем в §9, что это семейство согласовано, т.е. определяет центральную меру $M = M(a, b, m)$ на пространстве путей этого графа. Забегая несколько вперед, найдем переходные вероятности этой меры.

Согласно общей теории, если мера M центральна, то функция

$$\varphi_n(\lambda) = \frac{M_n(\lambda)}{\dim_n \lambda}; \qquad \lambda \in \mathcal{S}_n(m) \tag{8.1}$$

гармонична, т.е. удовлетворяет "теореме о среднем"

$$\sum_{\Lambda\colon \lambda \nearrow \Lambda} \varphi_{n+1}(\Lambda) = \varphi_n(\lambda). \tag{8.2}$$

Переходные вероятности определяются формулой

$$p_n(\lambda, \Lambda) = \frac{\varphi_{n+1}(\Lambda)}{\varphi_n(\lambda)}, \tag{8.3}$$

а равенство (8.2) равносильно тождеству

$$\sum_{\Lambda\colon \lambda \nearrow \Lambda} p_n(\lambda, \Lambda) = 1. \tag{8.4}$$

Обратно, если для заданных переходных вероятностей произведение

$$p_t = \prod_{k=1}^{n} p_{\lambda_{k-1}, \lambda_k} = \varphi_n(\lambda)$$

зависит только от формы λ таблицы $t = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n = \lambda)$, то соответствующая марковская мера $M(\lambda) = \dim_n \lambda\ \varphi_n(\lambda)$ центральна.

Мы пишем $\lambda \nearrow \Lambda$, если диаграммы Юнга λ, Λ связаны дугой в графе ветвления $\mathcal{S}(m)$. Напомним, что в этом случае разность $\Lambda \setminus \lambda$ — горизонтальная полоса и переход $\lambda \nearrow \Lambda$ определяется множеством $I \subseteq [m]$ тех столбцов, к которым прибавляется клетка. Таким образом, если $c = (c_1, \dots, c_m)$, $C = (C_1, \dots, C_m)$ — вектора длин столбцов диаграмм λ, Λ и $\Delta_I = C - c$, то

$$C_k - c_k = (\Delta_I)_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in I; \\ 0, & \text{если } k \notin I \end{cases} \tag{8.5}$$

— характеристический вектор множества I.

Мы обозначаем через Π прямоугольник $\Pi = \Pi(n+1, m)$. Из рис. 8 видно, что с ростом диаграммы λ растет также и дополнительная диаграмма: если $\tilde{\lambda} = \pi \setminus \lambda$ и $\tilde{\Lambda} = \Pi \setminus \Lambda$, то $\tilde{\lambda} \subseteq \tilde{\Lambda}$.

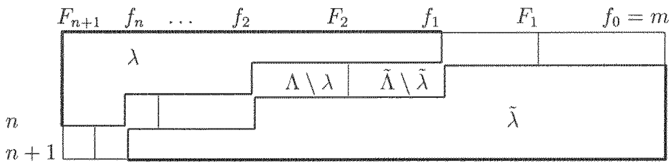


Рис. 8. Растущая диаграмма Юнга и ее дополнение.

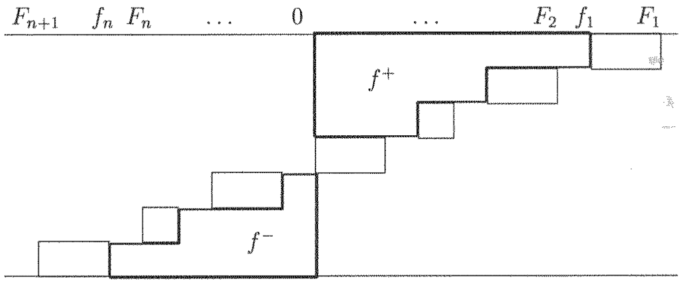


Рис. 9. Растущая сигнатура.

В нашем случае из формулы (5.6) ясно, что

$$\varphi_n(\lambda) = \dim_n \lambda \, \frac{W_\lambda(a, m)\, W_{\tilde{\lambda}}(b, m)}{W_\pi(a+b, m)}. \tag{8.6}$$

Для переходных вероятностей получаем

$$\begin{aligned} p_n(\lambda,\Lambda) = \frac{\dim_{n+1}\Lambda}{B_{n+1}\,\dim_n\lambda}\times \\ \times\prod_{x\in\Lambda\setminus\lambda}(a-c_\Pi(x))\,(m-c_\Pi(x))\times \\ \times\prod_{x\in\tilde\Lambda\setminus\tilde\lambda}(b-\tilde c_\Pi(x))\,(m-\tilde c_\Pi(x)), \end{aligned}\tag{8.7}$$

где

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \frac{W_\Pi(a+b,m)}{W_\pi(a+b,m)} = \\ &= \prod_{j=1}^{m}(a+b+n-j+1)\,(n+m-j+1) = \\ &= \frac{(a+b+n)!\,(m+n)!}{(a+b-m+n)!\,(n)!}. \end{aligned}\tag{8.8}$$

Применяя столбцовую формулу размерности (6.2), получаем

$$\begin{aligned} p_n(\lambda,\Lambda) = \frac{(a+b+n-m)!}{(a+b+n)!}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}\left(\frac{C_i-C_j+j-i}{c_i-c_j+j-i}\right)\times \\ \times\prod_{\Lambda\setminus\lambda}(a-c_\Pi(x))\prod_{\tilde\Lambda\setminus\tilde\lambda}(b-\tilde c_\Pi(x)). \end{aligned}\tag{8.9}$$

Центральность меры M сводится к следующему факту.

Теорема. *Имеет место тождество*[6]

$$\begin{aligned} \sum_{I\subseteq[m]}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}\left(\frac{C_i-C_j+j-i}{c_i-c_j+j-i}\right)\times \\ \times\prod_{k\in I}\frac{(c_k-k+a+1)}{(a+b-m+n+k)}\prod_{k\notin I}\frac{(b-m+n-c_k+k)}{(a+b-m+n+k)} = 1. \end{aligned}\tag{8.10}$$

Заметим, что если Λ перестает быть диаграммой Юнга при добавлении клеток к столбцам из множества I, то числа (8.9) автоматически зануляются.

Доказательство теоремы непосредственно следует из формулы (9.2) в §9, если положить $x_k=c_k-k$ при $k=1,\dots,m$ и $A=1$, $B=a+1$, $C=b-m+n$. ●

[6] Напомним, что $[m]$ означает $\{1,\dots,m\}$.

8a. Упрощение переходных вероятностей. Более естественная формула для переходной вероятности получится, если считать a целым и рассматривать диаграммы Юнга с a столбцами $c_1, \dots, c_a$.

Предложение. *Если обозначить через* $\tilde{c}_j = n - c_{a-j+1}$ *длины столбцов дополнительной диаграммы, то гармоническую функцию* $\varphi_n(\lambda)$ *можно записать в форме*

$$\begin{aligned}\varphi_n(\lambda) = F \times \prod_{1\leqslant i<j\leqslant a} (c_i - c_j + j - i)\times \\ \times \prod_{j=1}^{a} \frac{(c_j - j + m)!\,(\tilde{c}_j - j + a + b - m)!}{(n - j + a + b)!},\end{aligned} \tag{8.11}$$

где константа F *задается формулой (6.12).*

Для доказательства заметим, что

$$\prod_{x\in\lambda} \frac{a - c_\pi(x)}{n + c_\pi(x)} = \prod_{j=1}^{a} \frac{(c_j + a - j)!\,(\tilde{c}_j + a - j)!}{(a - j)!\,(n + a - j)!}.$$

Пользуясь формулой размерности (6.2), получаем

$$\frac{1}{\dim_n \lambda} = \prod_{i<j} (c_i - c_j + j - i)^{-1} \prod_{j=1}^{a} \frac{(c_j - j + a)!\,(\tilde{c}_j - j + a)!}{(n - j + a)!},$$

и (8.11) следует из (6.11). $\bullet$

Из (8.11) находим следующую формулу для переходных вероятностей:

$$\begin{aligned}p_n(\lambda, \Lambda) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant a} \left(\frac{C_i - C_j + j - i}{c_i - c_j + j - i} \right) \times \\ \times \prod_{j\in I} \frac{c_j - j + m + 1}{n - j + a + b + 1} \prod_{j\notin I} \frac{n - c_j + j + b - m}{n - j + a + b + 1}.\end{aligned} \tag{8.12}$$

Отметим, что в простейшем случае $a = 1$ эти переходные вероятности соответствуют урновой схеме Пойа из §1 с параметрами $A = m$, $B = b - m + 1$. Столбец длины c в момент времени n растет с вероятностью $p = (c + m)/(n + b + 1)$ и не растет с вероятностью $q = (n - c + b - m + 1)/(n + b + 1)$.

8б. Моделирование гипергеометрических распределений. Переходное распределение с нулевого этажа на первый — это гипергеометрическое распределение

$$p_0(\emptyset,\lambda) = M_1(\lambda) = \binom{m}{k}\frac{(A+m)!\,(B+m)!\,(A+B+m)!}{(A+m-k)!\,(B+k)!\,(A+B+2m)!} = \\ = \binom{A+m}{k}\binom{B+m}{m-k}\Big/\binom{A+B+2m}{m} \tag{8.13}$$

(где $\lambda=(k)$). Действительно,

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}\left(\frac{C_i-C_j+j-i}{c_i-c_j+j-i}\right) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=k+1}^{m}\left(\frac{j-i+1}{j-i}\right) = \binom{m}{k}.$$

Как генерировать такое распределение? Надо взять $(A+m-1)$ голубых шаров и $(B+m-1)$ белых, смешать их в ящике, а затем тащить без возвращения m из них. Число k голубых шаров среди извлеченных и есть желаемая случайная величина.

В общем случае ясно только, как моделировать $M_n(\lambda)$, но не переходную вероятность. При этом "купленные билеты" приобретаются одновременно, а не по очереди. Роль набора купленных билетов в многомерном случае исполняет равномерно распределенная полустандартная таблица Юнга прямоугольной формы. Как их генерировать — пока не ясно.

9. Основное тождество. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_m)$ — набор из m вещественных переменных. Для любого подмножества $I\subseteq[m]$ пусть $\Delta_I=(k_1,\ldots,k_m)$ — характеристический вектор множества I с координатами $k_i=1$ при $i\in I$ и $k_i=0$, если $i\notin I$. Через

$$V(x)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}(x_i-x_j) \tag{9.1}$$

обозначим определитель Вандермонда.

Теорема. *Для любых вещественных параметров A,B,C справедлива формула*

$$\sum_{I\subseteq[m]} V(x+A\,\Delta_I)\prod_{i\in I}(x_i+B)\prod_{i\notin I}(C-x_i) = V(x)\prod_{k=0}^{m-1}(k\,A+B+C). \tag{9.2}$$

Отметим еще два варианта записи формулы (9.2). Если положить $\Pi(x) = \prod_{i=1}^{m} x_i$, то при $C = 0$ формула (9.2) принимает вид

$$\sum_{I\subseteq[m]} (-1)^{m-|I|}\, V(x + A\,\Delta_I)\, \Pi(x + B\,\Delta_I) = V(x) \prod_{k=0}^{m-1} (k\,A + B). \quad (9.3)$$

Обратно, производя в (9.3) подстановку $x = y - C$ и замечая, что $V(y - C) = V(y)$, получаем на вид более общую формулу (9.2).

Запишем формулу (9.3) при $A = 1$, $B = t$:

$$\sum_{I\subseteq[m]} (-1)^{m-|I|}\, V(x + \Delta_I)\, \Pi(x + t\,\Delta_I) = (t)_m\; V(x), \quad (9.4)$$

где $(t)_m = t\,(t+1)\ldots(t+m-1)$ — символ Похгаммера. Формула (9.3), в свою очередь, легко выводится из (9.4) при помощи подстановки $x_k = y_k/A$; $k = 1, \ldots, m$.

Перейдем к *доказательству* формулы (9.4). Для этого мы воспользуемся известным разложением

$$\prod_{k=0}^{m-1} (t + k) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_m} t^{c(w)}, \quad (9.5)$$

где $c(w)$ — число циклов в перестановке w. Напомним, что имеется взаимно-однозначное соответствие между подстановками $w \in \mathfrak{S}_m$ и монотонными нумерациями корневых лесов с m вершинами. При этом соответствии число циклов перестановки равно числу компонент связности леса и формула (9.5) принимает вид

$$(t)_m = \sum_{\Gamma} t^{|C|}\, d(\Gamma), \quad (9.6)$$

где суммирование ведется по всем непомеченным (т.е. рассматриваемым с точностью до автоморфизмов) корневым лесам Γ с m вершинами. Через C мы обозначаем множество корневых вершин, а через $d(\Gamma)$ — число монотонных нумераций вершин леса Γ.

Поясним термин “монотонная нумерация”. Пусть Γ — корневой лес с m вершинами и множеством дуг E. Ориентируем дуги, считая концом дуги $e \in E$ вершину $v = \omega(e)$, расположенную ближе к корневой вершине. Начало дуги $e \in E$ обозначим через $\alpha(e)$.

Мы называем *нумерацией* f множества вершин V графа Γ любую биекцию $f : V \to [m]$. По определению, нумерация f *монотонна*, если

$$f(\alpha(e)) < f(\omega(e)) \tag{9.7}$$

для всех дуг $e \in E$.

Рассмотрим теперь левую часть (9.4). Для заданного подмножества $I \subseteq [m]$ обозначим через $E(I)$ множество пар $\{i,j\}$ (где $i,j \in [m]$), для которых одна из вершин принадлежит I, а другая нет. Множество $E(I)$ разбивается на подмножества $E_-(I)$ *отрицательных* дуг, у которых большая вершина лежит в I, и дополнительное множество *положительных* дуг $E_+(I)$. Для произвольного подмножества дуг $E \subseteq E(I)$ будем писать $E_- = E \cap E_-(I)$ и $E_+ = E \cap E_+(I)$. Выражение $V(x + \Delta_I)$ допускает разложение в сумму

$$\prod_{\{i,j\} \notin E(I)} (x_i - x_j) \prod_{\{i,j\} \in E_+(I)} (x_i - x_j + 1) \prod_{\{i,j\} \in E_-(I)} (x_i - x_j - 1) =$$
$$= \sum_{E \subseteq E(I)} (-1)^{|E_-|} \frac{V(x)}{\prod_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)}.$$

Используя аналогичное разложение

$$\Pi(x + t\Delta_I) = \sum_{C \subseteq I} t^{|C|} \frac{\Pi(x)}{\prod_{i \in C} x_i}$$

и полагая

$$P_{E,C}(x) = \prod_{\substack{\{i,j\} \in E \\ i<j}} (x_i - x_j) \prod_{k \in C} x_k, \tag{9.8}$$

можем записать

$$V(x + \Delta_I)\, \Pi(x + t\,\Delta_I) = \sum_{E \subseteq E(I)} \sum_{C \subseteq I} (-1)^{|E_-|}\, t^{|C|} \frac{V(x)\,\Pi(x)}{P_{E,C}(x)}. \tag{9.9}$$

Если $E \subseteq E(I)$ и $C \subseteq I$, то в E нет дуг, у которых оба конца принадлежат C; назовем такие пары $\Gamma = (E, C)$ *мечеными графами* и будем писать $\Gamma \nearrow I$. Для заданного меченого графа Γ назовем *раскраской* любое подмножество $I \subseteq [m]$, содержащее C и такое, что у каждой дуги $e \in E$ ровно один из концов принадлежит I. Условие $\Gamma \nearrow I$ в точности означает, что I — раскраска Γ.

Подставляя (9.9) в левую часть (9.4) и изменяя порядок суммирования, получаем выражение

$$\sum_{E,C} t^{|C|} \, \frac{V(x)\,\Pi(x)}{P_{E,C}(x)} \sum_{I:\,\Gamma\nearrow I} (-1)^{m-|I|+|E_-|}, \tag{9.10}$$

где I пробегает все раскраски меченого графа $\Gamma=(E,C)$.[7]

Лемма. *Суммирование в формуле (9.10) можно вести только по таким меченым графам (E,C), что граф $(E,[m])$ является лесом, и множество корневых вершин можно выбрать равным множеству C; остальные слагаемые вместе дают нулевой вклад.*

Доказательство. Можно считать, что суммирование в формуле (9.10) идет по тем наборам (E,C,I), для которых выполнено неравенство

$$|E|+|C|\leqslant m, \tag{9.11a}$$

остальные дают нулевой вклад. В самом деле, слагаемые являются однородными полиномами степени $\frac{m(m+1)}{2}-|E|-|C|$ относительно переменных $x_1,\dots,x_m$. С другой стороны, из вида левой части (9.4) следует, что сумма (9.10) является антисимметричным полиномом от $x_1,\dots,x_m$. Поэтому его степень не меньше чем $\frac{m(m-1)}{2}$, и мы получаем (9.11a).

Рассмотрим разложение графа $(E,[m])$ в объединение связных компонент

$$\{1,2,\dots,m\}=\cup_{j=1}^k M_j,\ M_j\neq\emptyset,\forall j,\quad E=\cup_{j=1}^k E_j,\quad C=\cup_{j=1}^k C_j,$$

где $C_j=M_j\cap C$. Из условия связности следует неравенство

$$|E_j|\geqslant |M_j|-1\quad \forall j. \tag{9.11b}$$

Теперь покажем, что суммирование в формуле (9.10) можно вести только по тем меченым графам (E,C), для которых выполнено условие

$$|C_j|\geqslant 1\quad \forall j, \tag{9.11c}$$

потому что сумма остальных слагаемых равна нулю.

Рассмотрим сначала случай $C=\emptyset$. Покажем, что в этом случае сумма (9.10) по всевозможным парам $(E,\emptyset)$ и их раскраскам I

[7] Доказательство утверждения следующей леммы в оригинале не ясно. Далее идет рассуждение, предложенное В. Н. Ивановым.

равна нулю. В самом деле, каждое такое слагаемое можно представить как произведение множителя $\prod(x)$ и некоторого однородного полинома от переменных $x_1, \ldots, x_m$ степени $\frac{m(m-1)}{2} - |E|$. Но эта сумма является коэффициентом при t^0 выражения в левой части (9.4). Поэтому этот коэффициент — это антисимметричный полином от переменных $x_1, \ldots, x_m$, следовательно, его степень не меньше $\frac{m(m-1)}{2}$. Предположим, что $C = E = \emptyset$. Тогда внутренняя сумма в (9.10) равна

$$\sum_{I \subseteq [m]} (-1)^{|I|} = 0,$$

поскольку суммирование ведется по всевозможным подмножествам I множества $[m]$. Таким образом, слагаемые с $C = \emptyset$ дают нулевой вклад в сумму (9.10).

Вернемся к общему случаю. Обозначим через $A(E,C)$ максимальное объединение связных компонент M_j, такое, что $C \cap A(E,C) = \emptyset$. Пусть A_0 — некоторое непустое подмножество множества $[m]$. Тогда сумма (9.10) по таким меченым графам (E,C), что $A(E,C) = A_0$, равна нулю. Это утверждение равносильно некоторому равенству относительно переменных x_j, $j \in A_0$. Но при $m = |A_0|$ и соответствующей перенумерации элементов множества A_0 это равенство совпадает с тождеством относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$ в рассмотренном выше примере. Таким образом, утверждение (9.11c) доказано.

Из (9.11a), (9.11b) и (9.11c) следует, что суммирование в формуле (9.10) можно вести только по таким меченым графам (E,C), что выполнены равенства

$$|C_j| = 1, \quad |E_j| = |M_j| - 1. \tag{9.11d}$$

Из (9.11d) мы получаем, что граф $(E,[m])$ является корневым лесом с множеством корневых вершин C. Лемма доказана. $\bullet$

Пусть Γ — корневой лес с m вершинами, множеством дуг E и множеством корней C. С каждой нумерацией f вершин леса Γ свяжем рациональную функцию

$$M_f(x) = \prod_{e \in E} \left(1 - \frac{x_{f(\omega(e))}}{x_{f(\alpha(e))}}\right)^{-1} \tag{9.12}$$

от переменных $x_1, \ldots, x_m$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма. *Сумма функций M_f по всем нумерациям f вершин леса Γ не зависит от переменных $x_1, \dots, x_m$ и равна $d(\Gamma)$:*

$$\sum_f \prod_{e \in E} \frac{x_{f(\alpha(e))}}{x_{f(\alpha(e))} - x_{f(\omega(e))}} = d(\Gamma). \tag{9.13}$$

Замечание. Нумерации рассматриваются здесь с точностью до автоморфизмов леса Γ. Например, лес без дуг (в котором все вершины — корневые) существенно различных нумераций не имеет, и разложение (9.13) в этом случае тривиально.

Доказательство. Легко видеть, что сумма $S(x)$ в левой части (9.13) симметрична по переменным $x_1, \dots, x_m$. Умножая ее на определитель Вандермонда (9.1), получаем антисимметрический многочлен той же степени, что и $V(x)$. Таким образом, функция $S(x)$ постоянна. Чтобы определить константу, найдем коэффициент при мономе $x_1^{m-1} x_2^{m-2} \dots x_{m-1}$ в разложении многочлена $V(x)\, S(x)$. Мы покажем, что одночлен $x_1^{m-1} x_2^{m-2} \dots x_{m-1}$ содержится в разложении полинома $V(x)\, M_f(x)$ тогда и только тогда, когда нумерация f монотонна, и что в этом случае коэффициент равен единице.

Обозначим через v_k вершину с меткой $f(v_k) = k$; $k = 1, \dots, m$. Переменная x_k входит в $m-1$ сомножителей произведения (9.1). После умножения на $M_f(x)$ число таких множителей уменьшается на число дуг, входящих в вершину v_k (т.е. таких дуг e, что $\omega(e) = v_k$). Таким образом, моном $x_1^{m-1} x_2^{m-2} \dots x_{m-1}$ входит в разложение $V(x)\, M_f(x)$ в точности при следующих условиях на нумерацию f: 1) нет дуг, входящих в v_1; 2) только дуга $\{1, 2\}$ может входить в v_2; ... и вообще, для дуг e, входящих в любую вершину, выполняется условие монотонности (9.10). Для получения одночлена $x_1^{m-1} x_2^{m-2} \dots x_{m-1}$ следует взять x_1 из всех множителей, его содержащих; затем взять x_2 из оставшихся множителей, содержащих x_2, и т.д. Ясно, что если нумерация f монотонна, то коэффицент равен единице. Лемма доказана. •

Отметим некоторые специальные случаи формулы (9.13).

(a) Предположим, что Γ — "линейное" дерево с m вершинами, т.е. для каждого $k = 0, \dots, m-1$ есть только одна вершина, находящаяся на расстоянии k от корневой. Тогда (9.13) принимает вид

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\prod_{i=1}^{m-1}\frac{x_{\sigma(i)}}{x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(i+1)}}=1.$$

(b) Пусть все вершины дерева непосредственно примыкают к корневой. С точностью до автоморфизмов дерева, нумерация определяется номером корневой вершины и тождество (9.13) превращается в

$$\sum_{j=1}^{m}\prod_{i\neq j}\frac{x_i}{x_i-x_j}=1.$$

В [21], I, упр. 8а, указано другое доказательство этой формулы, использующее интерполяционную формулу Лагранжа.

(c) Рассмотрим дерево с четырьмя вершинами, имеющее три монотонных нумерации (подразумевается, что дуги идут вертикально и под углом 45°):

$$\begin{array}{ccc} 2 & & \\ 3 & & 1; \\ & 4 & \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 1 & & \\ 3 & & 2; \\ & 4 & \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 1 & & \\ 2 & & 3. \\ & 4 & \end{array}$$

С первой из них, например, можно связать восемь нумераций

$$\begin{array}{ccc} 2 & & \\ 3 & & 1; \\ & 4 & \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 2 & & \\ 4 & & 1; \\ & 3 & \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 3 & & \\ 4 & & 1; \\ & 2 & \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 3 & & \\ 4 & & 2; \\ & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3 & & \\ 2 & & 1; \\ & 4 & \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 4 & & \\ 2 & & 1; \\ & 3 & \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 4 & & \\ 3 & & 1; \\ & 2 & \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 4 & & \\ 3 & & 2, \\ & 1 & \end{array}$$

и соответствующее разбиение единицы имеет вид

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x_2}{x_2-x_3}\right)\left(\frac{x_3}{x_3-x_4}\right)\left(\frac{x_1}{x_1-x_4}\right)+\left(\frac{x_3}{x_3-x_2}\right)\left(\frac{x_2}{x_2-x_4}\right)\left(\frac{x_1}{x_1-x_4}\right)+\\
&+\left(\frac{x_2}{x_2-x_4}\right)\left(\frac{x_4}{x_4-x_3}\right)\left(\frac{x_1}{x_1-x_3}\right)+\left(\frac{x_4}{x_4-x_2}\right)\left(\frac{x_2}{x_2-x_3}\right)\left(\frac{x_1}{x_1-x_3}\right)+\\
&+\left(\frac{x_3}{x_3-x_4}\right)\left(\frac{x_4}{x_4-x_2}\right)\left(\frac{x_1}{x_1-x_2}\right)+\left(\frac{x_4}{x_4-x_3}\right)\left(\frac{x_3}{x_3-x_2}\right)\left(\frac{x_1}{x_1-x_2}\right)+\\
&+\left(\frac{x_3}{x_3-x_4}\right)\left(\frac{x_4}{x_4-x_1}\right)\left(\frac{x_2}{x_2-x_1}\right)+\left(\frac{x_4}{x_4-x_3}\right)\left(\frac{x_3}{x_3-x_1}\right)\left(\frac{x_2}{x_2-x_1}\right)=1.
\end{aligned}$$

Пусть Γ — корневой лес с m вершинами и f — некоторая нумерация его вершин. Существует единственная раскраска меченого графа Γ: это множество вершин I, находящихся на четном расстоянии от корневых вершин. Нумерация f отождествляет множество дуг графа Γ с подмножеством $E \subseteq E(I)$ и множество корневых вершин с подмножеством $C \subseteq I$. Проверим, что

$$(-1)^{m-|I|+|E_-|}\ \frac{\Pi(x)}{P_{E,C}(x)} = M_f(x). \tag{9.14}$$

Действительно,

$$\frac{\Pi(x)}{P_{E,C}(x)} = \frac{\prod_{i\notin C} x_i}{\prod_{\{i,j\}\in E}(x_i - x_j)},$$

и остается проверить, что если E_{inv} — множество дуг, для которых условие (9.7) нарушается, то $m - |I| + |E_-|$ и $|E_{inv}|$ имеют одинаковые четности. Отметим прежде всего, что

$$m - |I| - |E_-| = (|E| - |E_-|) - (|I| - |C|) = |E_+| - |I \setminus C|.$$

Пусть $I(e) = 1$, если $\alpha(e) \in I$, и $I(e) = 0$ при $\alpha(e) \notin I$. Аналогично, пусть $E_+(e), E_{inv}(e)$ — характеристические функции множеств E_+, E_{inv}. Для дуг $e \in E$ справедливы следующие утверждения:

$$\begin{aligned}
&\text{если } E_+(e) = 1,\ I(e) = 1, \text{ то } E_{inv}(e) = 0;\\
&\text{если } E_+(e) = 0,\ I(e) = 0, \text{ то } E_{inv}(e) = 0;\\
&\text{если } E_+(e) = 0,\ I(e) = 1, \text{ то } E_{inv}(e) = 1;\\
&\text{если } E_+(e) = 1,\ I(e) = 0, \text{ то } E_{inv}(e) = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, разность $E_+(e) + I(e) - E_{inv}(e)$ всегда четна и суммы

$$|E_+| + |I \setminus C| = \sum_{e\in E}(E_+(e) + I(e)); \qquad |E_{inv}| = \sum_{e\in E} E_{inv}(e)$$

имеют одинаковые четности.

Мы показали, что левая часть формулы (9.4), записанная в форме (9.10), совпадает с ее правой частью, записанной с использованием (9.6). Теорема доказана. •

9a. Алгебраическое обоснование переходных вероятностей.

Приведенное выше комбинаторное доказательство достаточно длинно. Поскольку тождество (9.2) является ключевым при описании переходных вероятностей гипергеометрических центральных мер $M = M(a, b, m)$, мы дадим еще один — алгебраический — вывод формулы (9.2).

Идея *доказательства* состоит в том, что обе части (9.2) возникают при вычислении определителя

$$\det\Big((x_i + A)^{m-j}(B + x_i) \;+\; x_i^{m-j}(C - x_i)\Big)_{i,j=1}^{m} \tag{9.15}$$

двумя способами.

Представим строки этого определителя в виде сумм пар строк

$$\big((x_i + A)^{m-j}(B + x_i)\big)_{j=1}^{m} \qquad \text{и} \qquad \Big(x_i^{m-j}(C - x_i)\Big)_{j=1}^{m}.$$

В результате определитель (9.15) распадается в сумму 2^m детерминантов и нетрудно отождествить их со слагаемыми в левой части (9.2).

Чтобы получить правую часть, заметим, что последние столбцы детерминаната (9.15) суть

$$\begin{gathered} \ldots,\ \big(x_i^2(2A + B + C) + x_i(2AB + A^2) + A^2 B\big)_{i=1}^{m}, \\ \big(x_i(A + B + C) + AB\big)_{i=1}^{m},\ \ (B + C)_{i=1}^{m}. \end{gathered}$$

Вообще, j-й столбец имеет вид

$$\Big(x_i^{m-j}(A(m-j) + B + C) + \text{ младшие члены по } x_i\Big)_{i=1}^{m},$$

откуда ясно, что определитель (9.15) равен правой части (9.2). •

Пример. При $m = 2$ приведенное выше доказательство сводится к следующим выкладкам:

$$(x-y)(a+b)(a+b+1) = \begin{vmatrix} x(a+b+1) & a+b \\ y(a+b+1) & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (x+1)(a+x)+x(b-x) & (a+x)+(b-x) \\ (y+1)(a+y)+y(b-y) & (a+y)+(b-y) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (x+1)(a+x) & (a+x) \\ (y+1)(a+y) & (a+y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (x+1)(a+x) & (a+x) \\ y(b-y) & (b-y) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x(b-x) & (b-x) \\ (y+1)(a+y) & (a+y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x(b-x) & (b-x) \\ y(b-y) & (b-y) \end{vmatrix} =$$

$$= (x-y)(a+x)(a+y) \; + \; ((x+1)-y)(a+x)(b-y) \; +$$

$$+ \; (x-(y+1))(b-x)(a+y) \; + \; (x-y)(b-x)(b-y).$$

Было бы интересно получить *вероятностное* доказательство формулы (9.3), т.е. столь же естественный способ генерации переходных вероятностей, как урновая модель Пойа при $m=1$.

10. Спектральные меры. Согласно формуле (6.11), распределение меры $M = M(a,b,m)$ на n-м этаже имеет вид

$$M_n(\lambda) = F \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant a} (c_i - c_j + j - i)^2$$

$$\times \prod_{j=1}^{a} \frac{(c_j - j + a + 1)_{m-a} \, (n - c_j + j)_{b-m}}{(n - j + a + 1)_b}, \tag{10.1}$$

где $(u)_k = u(u+1) \ldots (u+k-1) = \Gamma(u+k) \,/\, \Gamma(u)$ — символ Похгаммера, а константа F, не зависящая от λ и от n, задается формулой (6.12).

Перейдем в (10.1) к пределу при

$$n \to \infty, \qquad \frac{c_j^{(n)}}{n} \to \gamma_j . \tag{10.2}$$

Квадрат определителя Вандермонда имеет порядок $a(a-1)$ по n, а порядок всех сомножителей во втором произведении равен $(m-a)+(b-m)-b = -a$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n^a \; M_n(\lambda^{(n)}) = F \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant a} (\gamma_i - \gamma_j)^2 \; \prod_{j=1}^{a} \gamma_j^{m-a} \, (1-\gamma_j)^{b-m}. \tag{10.3}$$

Мы получаем предельное распределение на симплексе

$$\Delta_a = \{\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_a) :\ 1 \geqslant \gamma_1 \geqslant \dots \geqslant \gamma_a \geqslant 0\} \tag{10.4}$$

в виде

$$d\hat{M}(\gamma) = F \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant a} (\gamma_i - \gamma_j)^2 \ \prod_{j=1}^{a} \gamma_j^{m-a} (1-\gamma_j)^{b-m} \, d\gamma_j, \tag{10.5}$$

где $d\gamma = d\gamma_1 \dots d\gamma_a$ — лебегова мера на симплексе Δ_a, нормированная условием $\int d\gamma = 1/a!$, и константа F равна

$$F = \prod_{j=1}^{a} \frac{\Gamma(b+j)}{\Gamma(j)\,\Gamma(m-a+j)\,\Gamma(b-m+j)}. \tag{10.6}$$

Используя описание неразложимых гармонических функций в (7.6), можем записать общее тождество

$$\int\limits_{\Delta_m} \varphi_{n,\gamma}(\lambda)\, d\hat{M}(\gamma) = \varphi_n(\lambda) \tag{10.7}$$

в следующей форме.

Предложение. *Пусть диаграмма Юнга λ имеет строчные координаты Фробениуса $f_j = \lambda_j - j$, $j = 1, \dots, a$, и $f_1 < n$. Тогда справедлива формула*

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathcal{C}_a} s_\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_a) \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \ \prod_{j=1}^{a} \frac{\alpha_j^{m-a}\, d\alpha_j}{(1+\alpha_j)^{n+a+b}} = \\ &= \prod_{i<j} (f_i - f_j) \ \prod_{j=1}^{a} \frac{\Gamma(f_j+m+1)\,\Gamma(n-f_j+b-m)}{\Gamma(n+b+j)}, \end{aligned} \tag{10.8}$$

где s_λ — функция Шура и интегрирование идет по области

$$\mathcal{C}_a = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_a) :\ \alpha_1 > \dots > \alpha_a > 0\}. \tag{10.9}$$

Доказательство. В параметрах (7.5) распределение (10.5) имеет вид

$$d\hat{M}(\alpha) = F \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant a} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \ \prod_{j=1}^{a} \frac{\alpha_j^{m-a}\, d\alpha_j}{(1+\alpha_j)^{a+b}}.$$

Действительно, из (7.5) следует, что

$$\gamma_k = \frac{\alpha_k}{1+\alpha_k}, \quad d\gamma_k = \frac{d\alpha_k}{(1+\alpha_k)^2}$$

и

$$\prod_{i<j}(\gamma_i-\gamma_j)^2 = \prod_{i<j}\frac{(\alpha_i-\alpha_j)^2}{(1+\alpha_i)^2\,(1+\alpha_j)^2},$$

откуда ясно, что

$$\prod_{i<j}(\gamma_i-\gamma_j)^2\ \prod_{j=1}^{a} d\gamma_j = \prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2\ \prod_{j=1}^{a}\frac{d\alpha_j}{(1+\alpha_j)^{2a}}.$$

Правая часть (10.8) является комбинацией (8.11) и (10.6). •

Поскольку подынтегральное выражение в (10.8) симметрично по переменным $\alpha_1, \dots, \alpha_a$, можно переписать этот интеграл в форме

$$\frac{1}{a!}\int_0^\infty \dots \int_0^\infty s_\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_a)\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2\ \prod_{j=1}^{a}\frac{\alpha_j^{m-a}\ d\alpha_j}{(1+\alpha_j)^{n+a+b}} =$$
$$= \prod_{i<j}(f_i-f_j)\ \prod_{j=1}^{a}\frac{\Gamma(f_j+m+1)\,\Gamma(n-f_j+b-m)}{\Gamma(n+b+j)}. \tag{10.10}$$

10a. Наивероятнейшие длины столбцов случайной диаграммы Юнга. Пусть λ — случайная диаграмма Юнга в прямоугольнике $\pi = \Pi(n,m)$, имеющая гипергеометрическое распределение с параметрами A, B. В пределе при $n \to \infty$ имеем распределение[8]

$$d\hat{M}(\gamma) = C \cdot \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}(\gamma_i-\gamma_j)^2 \cdot \prod_{i=1}^{m}\gamma_i^A\,(1-\gamma_i)^B\ d\gamma \tag{10.11}$$

на симплексе частот Δ_m, где

$$C = \prod_{i=1}^{m}\frac{\Gamma(m+A+B+i)}{\Gamma(A+i)\,\Gamma(B+i)\,\Gamma(i)} \tag{10.12}$$

[8]Здесь используется определение, данное ниже в (13.1).

— нормировочная константа.

Максимальное значение плотности отвечает набору

$$1 \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_m \geqslant 0, \tag{10.13}$$

реализующему равновесное положение m единичных зарядов на отрезке $[0,1]$, отталкивающихся по законам плоской электростатики. В нуле и единице имеются фиксированные заряды величин $A/2$ и $B/2$ соответственно.

Как известно (см. [23], 6.11, с. 149) при $A, B > 0$ равновесное положение реализуется нулями полиномов $P_m^{(A-1,B-1)}(1-2x)$, где $P_m^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлены Якоби, ортогональные на $[-1,1]$ с весом $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$.

Если $-1 < A, B \leqslant 0$, то граничные заряды — притягивающие; в состоянии равновесия они покрываются парой единичных положительных зарядов, а остальные $m-2$ зарядов размещаются в поле эффективных краевых зарядов $A+1$, $B+1$. В итоге наивероятнейший набор (10.13) — это набор нулей полиномов

$$x(1-x)\,P_{m-2}^{(A+1,B+1)}(1-2x).$$

Ясно, что происходит в смешанном случае, когда, скажем, $-1 < A \leqslant 0$ и $B > 0$. Один положительный заряд садится в ноль, создавая там эффективный заряд $1 + A > 0$. Наивероятнейшие относительные длины строк (10.13) суть корни многочлена

$$x\,P_{m-1}^{(A+1,B-1)}(1-2x).$$

Ситуация упрощается в пределе при $m \to \infty$. В случае незаряженных концов отрезка ($A = B = 0$) предельная плотность распределения нулей полиномов $x(1-x)\,P_{m-2}^{(1,1)}(1-2x)$ равна $1 / (\pi\sqrt{x(1-x)})$ (см. [23], с. 445). Для длин столбцов получаем асимптотическую формулу

$$\frac{c_j}{n} \approx \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi j}{m}\right),$$

где $j = 1, 2, \ldots, m$.

11. Многогранники Гельфанда–Цетлина. Назовем *треугольником* размера m набор вещественных чисел

$$x = \{x_{ij}\}_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m}. \tag{11.1}$$

Пространство m–треугольников обозначим через X_m. Треугольник x *положителен*, если неравенства

$$x_{i,j+1} \geqslant x_{i,j} \geqslant x_{i+1,j+1} \geqslant 0 \qquad (11.2)$$

выполняются при всех $1 \leqslant i \leqslant j < m$. Положительные треугольники образуют конус K_m в пространстве X_m.

Определение. *Многогранником Гельфанда–Цетлина* назовем шапку T_m конуса K_m, выделяемую неравенством $1 \geqslant x_{1,m}$.

Выпуклый компакт T_m действительно является многогранником. Число его вершин равно 2^m. Более подробно:

Лемма [2]. *Крайними точками многогранника T_m являются в точности треугольники, все координаты которых равны нулю или единице. Такие треугольники находятся в естественном биективном соответствии с подмножествами множества $[m]$; эти подмножества можно отождествить с весами треугольников.*

Пример. T_2 — симплекс с четырьмя вершинами

$$e_{00} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{01} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix},$$
$$e_{10} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{11} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}.$$

При $m = 3$ многогранник T_3 имеет восемь вершин:

$$\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & 1 & & 0 & \\ 1 & & 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ 1 & & 0 & & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & 1 & & 0 & \\ 1 & & 1 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ 1 & & 1 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 1 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 1 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через Δ_m симплекс невозрастающих наборов вещественных чисел $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, для которых

$$1 \geqslant \gamma_1 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_m \geqslant 0. \qquad (11.3)$$

Имеется естественная проекция $\gamma : T_m \to \Delta_m$, определяемая формулами

$$\gamma = \gamma(x) : \qquad \gamma_k = x_{k,m}; \quad k = 1, \ldots, m. \qquad (11.4)$$

Лемма. *Пусть $T_m(\gamma)$ — слой многогранника T_m над точкой $\gamma \in \Delta_m$. Тогда объем $T_m(\gamma)$ равен*

$$\operatorname{Vol}(T_m(\gamma)) = \frac{1}{0!\,1!\ldots(m-1)!} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m} (\gamma_i - \gamma_j). \tag{11.5}$$

Доказательство. При $m = 2$ это очевидно. В общем случае результат получается индукцией по m при помощи формулы

$$\operatorname{Vol}(T_{m+1}(\gamma)) = \int\limits_{\gamma_2}^{\gamma_1} \ldots \int\limits_{\gamma_{m+1}}^{\gamma_m} \operatorname{Vol}(T_m(u_1, \ldots, u_m))\, du_1 \ldots du_m.$$

Действительно,

$$\int\limits_{\gamma_2}^{\gamma_1} \ldots \int\limits_{\gamma_{m+1}}^{\gamma_m} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m} (u_i - u_j)\, du_1 \ldots du_m = \frac{1}{m!} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m+1} (\gamma_i - \gamma_j), \tag{11.6}$$

поскольку левая часть — антисимметричный полином от γ_k той же степени, что и правая часть. Константу можно найти по коэффициенту старшего члена $\gamma_1^{m-1}\ \gamma_2^{m-2}\ \ldots\ \gamma_{m-2}^2\gamma_{m-1}$. •

Пусть $\pi : T_{2m}(1^m, 0^m) \to \Delta_m$ — проекция, заданная формулами

$$\gamma = \pi(x): \quad \gamma_k = x_{km};\ k = 1, \ldots, m.$$

Лемма. *Слой $\pi^{-1}(\gamma)$ проекции π над точкой $\gamma \in \Delta_m$ конгруентен прямому произведению множеств*

$$T_m(\gamma) \times T_m(\gamma). \tag{11.7}$$

Доказательство. Для $z \in T_{2m}(1^m,\, 0^m)$ положим

$$x_{ij} = z_{ij}; \quad y_{ij} = z_{m-j+i,2m-j}; \qquad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m. \tag{11.8}$$

Тогда $x_{im} = y_{im} = \gamma_i$ совпадают при $i = 1, \ldots, m$ и $x, y \in T_m(\gamma)$. Соответствие $(x, y) \mapsto z$ и устанавливает искомую биекцию, поскольку по необходимости $z_{i,m+j} = 1$, $z_{m+i,m+j} = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$. •

Пример. При $m = 2$ треугольники из $T_4(1^2, 0^2)$ имеют вид

$$x = \begin{pmatrix} & & & x_{11} & & & \\ & & x_{12} & & x_{22} & & \\ & 1 & & x_{23} & & 0 & \\ 1 & & 1 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение. *Проекцией лебеговой меры многогранника* $T_{2m}(1^m, 0^m)$ *на симплекс* Δ_m *является мера*

$$d\hat{M}(\gamma) = D_m \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (\gamma_i - \gamma_j)^2 \, d\gamma_1 \dots d\gamma_m, \tag{11.9}$$

где

$$D_m = \frac{m!\,(m+1)! \dots (2m-1)!}{(0!\,1! \dots (m-1)!)^3}.$$

— нормировочная константа.

Доказательство вытекает из двух лемм, приведенных выше.[9] •

12. Комплексное гипергеометрическое распределение. Ограничимся случаем симметричного гипергеометрического распределения с параметрами $a = 2u$, $b = 2v$, $m = u + v$. Оно основано (при целых положительных $u \leqslant v$) на комбинаторной формуле

$$\sum_{f=-u}^{u} \binom{2u}{u+f} \binom{2v}{v-f} = \binom{2u+2v}{u+v}. \tag{12.1}$$

Перепишем это тождество "в относительной форме":

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathbb{Z}} \frac{u\,(u-1) \dots (u-|f|+1)}{(u+1)\,(u+2) \dots (u+|f|)} \, \frac{v\,(v-1) \dots (v-|f|+1)}{(v+1)\,(v+2) \dots (v+|f|)} = \\ = \frac{\Gamma(2(u+v)+1)}{\Gamma^2(u+v+1)} \, \frac{\Gamma^2(u+1)}{\Gamma(2u+1)} \, \frac{\Gamma^2(v+1)}{\Gamma(2v+1)} \end{aligned} \tag{12.2}$$

[9] Заметим, что $\hat{M}$ совпадает со спектральной мерой (10.5) с параметрами $a = b = m$. Как отмечено во введении, смысл результата в том, чтобы представить спектральную меру в виде аффинной проекции лебеговой меры подобно тому, как допредельные меры M_n представимы в виде проекций равномерных мер.

(сумма в левой части не изменится, если f будет пробегать все целые значения).

Поскольку обе части (12.2) аналитичны по u и v, формула верна и при комплексных значениях параметров.[10] При $u = z$, $v = \bar{z}$ все слагаемые левой части неотрицательны и мы приходим к *комплексному гипергеометрическому распределению.* Это распределение симметрично относительно отражения $f \mapsto -f$.

Рассмотрим примеры.

(1) Для полуцелого положительного $z = m - 1/2$, $m = 1, 2, \ldots$, имеем

$$\sum_{f \in \mathbb{Z}} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{((2f)^2 - (2k-1)^2)^2} = \frac{(4m-2)!\,\pi^2}{((2m-1)!\,2^m)^4}.$$

(2) Пусть $z = bi$ — чисто мнимое. Тождество принимает вид

$$\sum_{f \in \mathbb{Z}} \frac{b^2}{f^2 + b^2} = \frac{\pi b}{\operatorname{th} \pi b}.$$

(3) При $z = 1/2 + bi$ получаем

$$\sum_{f \in \mathbb{Z}} \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b^2\right)}{\left(\left(\frac{2f-1}{2}\right)^2 + b^2\right)\left(\left(\frac{2f+1}{2}\right)^2 + b^2\right)} = 2\pi^2 \frac{\left((1/2)^2 + b^2\right)^2}{(1^2 + b^2)} \frac{\operatorname{th} \pi b}{\pi b}.$$

В частности, при $z = 1/2$

$$\sum_{f \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(4f^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(4) При $z = 1 + bi$ имеем

$$\sum_{f \in \mathbb{Z}} \frac{(1^2 + b^2)\,b^2\,((-1)^2 + b^2)}{((f-1)^2 + b^2)\,(f^2 + b^2)\,((f+1)^2 + b^2)} = \frac{3}{8}\,\frac{(1^2 + b^2)}{((1/2)^2 + b^2)}\,\frac{\pi b}{\operatorname{th} \pi b}.$$

[10] Это высказывание верно, но не очевидно. Стандартный способ обоснования подобного рода утверждений (экстраполяция тождеств с целых значений параметра на комплексные) состоит в применении теоремы Карлсона. По поводу этой теоремы см., например, [8]. Отметим, что тождество (12.2) есть частный случай формулы Дуголла для суммы двустороннего гипергеометрического ряда ${}_2H_2$, см. [6, 7].

Чтобы подчеркнуть единство мер в перечисленных примерах, вычислим их моменты. Для этого заметим, что

$$(f+u)(f+u-1)\dots(f+u-k+1)\binom{2u}{u+f}=$$
$$=2u\,(2u-1)\dots(2u-k+1)\binom{2u-k}{u-f},$$

откуда следует, что

$$\sum_f [f+u]_k \binom{2u}{u+f}\binom{2v}{v-f}=[2u]_k\binom{2(u+v)-k}{u+v-k},$$

где $[s]_k=s\,(s-1)\dots(s-k+1)$.

Для средних вида $<[f+u]_k>$ получаем формулу

$$<[f+u]_k>=\frac{[2u]_k\,[u+v]_k}{[2(u+v)]_k}. \qquad (12.3)$$

Младшие моменты гипергеометрического распределения имеют вид

$$\mathcal{M}_2=\frac{u\,v}{2\,u+2\,v-1},$$
$$\mathcal{M}_4=\frac{u\,v\,(3\,u\,v-u-v)}{(2\,u+2\,v-3)\,(2\,u+2\,v-1)},$$
$$\mathcal{M}_6=\frac{u\,v\,\left(-u+4\,u^2-v+8\,u\,v-15\,u^2\,v+4\,v^2-15\,u\,v^2+15\,u^2\,v^2\right)}{(2\,u+2\,v-5)\,(2\,u+2\,v-3)\,(2\,u+2\,v-1)}.$$

Из аналитичности опять следует, что при комплексных $u=z$, $v=\bar z$ формулы для моментов по-прежнему верны:

$$\mathcal{M}_2=\frac{|z|^2}{2\,(z+\bar z)-1},$$
$$\mathcal{M}_4=\frac{|z|^2\,\left(3\,|z|^2-(z+\bar z)\right)}{(2\,(z+\bar z)-3)\,(2\,(z+\bar z)-1)}, \qquad (12.4)$$
$$\mathcal{M}_6=\frac{|z|^2\,\left(15\,|z|^4-15\,|z|^2\,(z+\bar z)+4\,(z+\bar z)^2-(z+\bar z)\right)}{(2\,(z+\bar z)-5)\,(2\,(z+\bar z)-3)\,(2\,(z+\bar z)-1)}.$$

Приведем в заключение полезную формулу для весов многомерного гипергеометрического распределения в симметричном случае.

Теорема. *Если* $a = 2u$, $b = 2v$, $m = u + v$, *то*

$$M_n(f) = \frac{\dim_n^2 f}{D_1\, D_2\, \ldots D_n} \prod_{x \in f^+} \frac{w(x)}{\tilde{w}(x)} \prod_{x \in f^-} \frac{\tilde{w}(x)}{w(x)}, \tag{12.5}$$

Здесь f^+, f^- — положительная и отрицательная части сигнатуры f (см. (6.7), (6.8)), веса клеток определяются формулами

$$w(x) = (u - c(x))\,(v - c(x)); \quad \tilde{w}(x) = (u - \tilde{c}(x))\,(v - \tilde{c}(x)), \tag{12.6}$$

а множители D_k равны

$$D_k = \frac{\Gamma(2u + 2v + k)\,\Gamma^2(u + k)\,\Gamma^2(v + k)}{\Gamma^2(u + v + k)\,\Gamma(2u + k)\,\Gamma(2v + k)\,\Gamma(k)}.$$

Через $c(x)$, $\tilde{c}(x)$ обозначены содержания, отсчитываемые от нулевой вертикали, а не от краев прямоугольника. Связь с прежними обозначениями для содержаний и зеркальных содержаний такая:

$$c_\pi(x) = u + c(x); \quad \tilde{c}_\pi(x) = v + \tilde{c}(x).$$

Для размерности $\dim_n \lambda$ можно воспользоваться любой из формул (6.1), (6.2) или (6.10).

13. Комментарии и дополнения (Г. И. Ольшанский). Я начну с несколько более общего определения многомерного гипергеометрического распределения, которое дано в коротком тексте Сергея Васильевича “Интегралы Сельберга и центральный рост сигнатур” (декабрь 1993), содержащего сводку формул без доказательств. Согласно этому определению, мера M_n определяется натуральным числом m и двумя *вещественными* параметрами $A > -1$, $B > -1$. Она сосредоточена на диаграммах $\lambda \subseteq \pi$, где $\pi = \Pi(n, m)$, и дается формулой

$$M_n(\lambda) = \binom{A + m}{\lambda} \binom{B + m}{\tilde{\lambda}} \Big/ \binom{A + B + 2m}{\pi}. \tag{13.1}$$

Далее, в работе упоминаются сигнатуры и граф ветвления сигнатур; вот их определения. *Сигнатурой* длины n называется упорядоченный набор из n невозрастающих целых чисел. Обозначим множество всех таких наборов через $\mathcal{S}_n$. Сигнатуры длины n параметризуют неприводимые характеры группы $U(n)$.

Удобно считать, что множество $\mathcal{S}_0$ состоит из одного элемента — пустой сигнатуры. *Граф ветвления сигнатур* $\mathcal{S}$, называемый также *графом Гельфанда–Цетлина*, определяется следующим образом: его вершины суть сигнатуры произвольной длины, а две сигнатуры $\lambda \in \mathcal{S}_n$ и $\Lambda \in \mathcal{S}_{n+1}$ образуют ребро, если выполнено условие (0.4) (тогда пишем $\lambda \nearrow \Lambda$). Сигнатуры $\lambda \in \mathcal{S}_n$ образуют *n–й этаж* графа. Считаем, что пустая сигнатура (единственная вершина нулевого этажа) соединена ребром со всеми вершинами первого этажа. Это определение мотивировано правилом ветвления Гельфанда–Цетлина для неприводимых характеров унитарных групп, см., например, [25].

Сигнатуру с неотрицательными координатами можно рассматривать как диаграмму Юнга. Это дает возможность рассматривать граф $\mathcal{S}(m)$, о котором говорится в работе, как подграф в $\mathcal{S}$ (усеченный граф).

В статье [17] определено следующее семейство (комплексных) мер на сигнатурах:

$$M_n(\lambda \mid z, z', w, w') = \frac{\dim_n^2 \lambda}{C_n(z,z',w,w')} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(z-\lambda_i+i)\Gamma(z'-\lambda_i+i)\Gamma(w+n+1+\lambda_i-i)\Gamma(w'+n+1+\lambda_i-i)}, \tag{13.2}$$

где $C_n(z,z',w,w')$ есть нормировочная константа,

$$C_n(z,z',w,w') = \prod_{i=1}^{N} \frac{\Gamma(z+z'+w+w'+i)}{\Gamma(z+w+i)\Gamma(z+w'+i)\Gamma(z'+w+i)\Gamma(z'+w'+i)\Gamma(i)}, \tag{13.3}$$

а z, z', w, w' суть комплексные параметры. Предполагается, что $\Re(z+z'+w+w') > -1$ и ни одно из чисел $z+w, z+w', z'+w, z'+w'$ не равно $-1, -2, \dots$. Тогда выражение (13.2) имеет смысл, и для любого $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{S}_n} M_n(\lambda \mid z, z', w, w') = 1. \tag{13.4}$$

Кроме того, для мер $M_n = M_n(\lambda \mid z, z', w, w')$ выполнено *соотношение когерентности*

$$M_n(\lambda) = \sum_{\Lambda \in \mathcal{S}_{n+1}:\, \lambda \nearrow \Lambda} M_{n+1}(\Lambda). \tag{13.4}$$

Меры $M_n = M_n(\lambda \mid z, z', w, w')$ названы в [4] *zw-мерами*. При наложении дополнительных условий на параметры (см. ниже) они становятся положительными мерами (в силу (13.2), вероятностными мерами). Например, очевидным достаточным условием является выполнение соотношений $z' = \bar{z}$, $w' = \bar{w}$. Имеется биективное соответствие между *произвольными* системами $\{M_n\}$ вероятностных мер, удовлетворяющих условию когерентности (13.3), и характерами группы $U(\infty)$ (под характером здесь понимается произвольная положительно определенная функция, постоянная на классах сопряженных элементов и нормированная в единице группы). В частности, положительные zw-меры задают некоторые характеры группы $U(\infty)$, и есть основания считать, что эти характеры в каком-то смысле выделены. Их явное спектральное разложение по экстремальным характерам (т.е. разложение по крайним точкам выпуклого множества всех характеров) является предметом статьи [4]. Поскольку характерам отвечают унитарные представления, речь идет о гармоническом анализе некоторых "выделенных" унитарных представлений (подробнее см. [17] и [4]).

Параллельная теория существует для бесконечной симметрической группы $S(\infty)$ и связанного с ней графа Юнга. Аналогом zw-мер являются *z-меры на графе Юнга*, построенные ранее в заметке Вершика, Керова и Ольшанского [14]. Гармоническому анализу на группе $S(\infty)$ посвящены статья [15] (подробная версия заметки [14]) и серия статей Бородина и Ольшанского (см. обзор [18]). Книга [13] содержит прекрасный обзор цикла работ А. М. Вершика и С. В. Керова, связанных с экстремальными характерами группы $S(\infty)$.

Несколько слов об истории настоящей работы Сергея Васильевича. К моменту ее создания нам было известно более узкое семейство zw-мер на сигнатурах — а именно, меры с $(w, w') = (z, z')$; именно они и упоминаются в тексте как z-меры. Я получил формулу для этих мер, действуя по аналогии с вычислениями Д. Пикрела [20] для грассманианов.[11] Когда я показал эту формулу Сергею Васильевичу, ему захотелось понять ее комбинаторную природу, в частности, получить прямое доказатель-

[11]Замечательная работа [20] о бесконечномерном грассманиане послужила отправной точкой для наших занятий гармоническим анализом на больших группах.

ство соотношения когерентности (4.3), которое играет ключевую роль в установлении связи с характерами группы $U(\infty)$. Это и привело его (насколько я могу судить) к настоящей работе.

Результаты работы позволяют сделать ряд выводов, из которых мне хотелось бы выделить следующие два.

1) *Особая роль вырожденной серии zw-мер*. Согласно [4], вырожденная серия zw-мер получается, когда параметры z, w суть целые числа ($z = m_1$, $w = m_2$), а параметры z', w' суть вещественные числа, причем $z' > m_1 - 1$, $w' > m_2 - 1$; кроме того, предполагается, что $m_1 + m_2 \geqslant 0$. Тогда мера M_n, заданная формулой (13.2), положительна и сосредоточена на конечном множестве сигнатур λ, удовлетворяющих неравенствам

$$m_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant -m_2; \tag{13.5}$$

это множество непусто ввиду предположения $m_1 + m_2 \geqslant 0$. Заметим еще, что на графе $\mathcal{S}$ имеется естественное действие группы $\mathbb{Z}$ автоморфизмами: оно состоит в прибавлении целой константы ко всем координатам λ_i всех сигнатур. Такие автоморфизмы сохраняют совокупность zw-мер и индуцируют на множестве параметров преобразования вида

$$z \mapsto z + \mathrm{const}, \quad z' \mapsto z' + \mathrm{const}, \quad w \mapsto w - \mathrm{const}, \quad w' \mapsto w' - \mathrm{const}, \tag{13.6}$$

где $\mathrm{const} \in \mathbb{Z}$. Поэтому без существенного ограничения общности можно считать, что $m_2 = 0$, а m_1 есть неотрицательное целое число m. Тогда (13.5) сводится к тому, что λ есть диаграмма Юнга, содержащаяся в $\Pi(n, m)$, а мера M_n, заданная формулой (13.2), превращается в многомерное гипергеометрическое распределение (13.1) с параметрами m, $A = z' - m$, $B = w'$. Таким образом, вырожденная серия zw-мер в смысле [4] и многомерные гипергеометрические распределения в смысле (13.1) — по существу, одно и то же. В работе содержится важный тезис, который в чуть более общей форме можно сформулировать так: *хотя вырожденная серия составляет малую часть множества zw-мер, вырожденных мер достаточно много, чтобы получить из них все zw-меры с помощью аналитического продолжения по параметрам.*[12] Разумеет-

[12]Нечто похожее наблюдается в теории представлений редуктивных групп: все их (бесконечномерные) представления получаются, в определенном смысле, из конечномерных представлений аналитическим продолжением по параметрам.

ся, экстраполяция с целых значений параметра на комплексные значения требует осторожности; для ее обоснования можно привлекать известную теорему Карлсона. Конкретные применения этого тезиса см. в [19].

2) *Связь с интегралами типа Сельберга.* В §10 фактически показано, что многомерные гипергеометрические распределения M_n доставляют дискретную аппроксимацию некоторых интегралов типа Сельберга. Эту связь можно использовать в обоих направлениях: получать интегралы типа Сельберга предельным переходом из распределений M_n и, обратно, выводить свойства мер M_n (например, соотношение когерентности) из явного выражения для интеграла типа Сельберга. Аналогичная картина возникает для вырожденных z-мер на графе Юнга. Дальнейшее развитие этой идеи см. в [11, 13, 3, 19].

В заключение я хочу отметить, что понятие z-мер на графе Юнга и zw-мер на графе сигнатур допускает обобщение, в котором возникает дополнительный параметр. А именно, оба класса мер определенным образом связаны с функциями Шура, и обобщение, о котором идет речь, отвечает замене функций Шура на более общие функции Джека. Джековская деформация z-мер на графе Юнга была впервые найдена Сергеем Васильевичем в [12]. Другой подход был позже предложен в [3], а аналогичная деформация zw-мер на графе сигнатур обсуждается в [19]. Задача гармонического анализа может быть поставлена и в контексте этих более общих мер с джековским параметром, однако в настоящее время не ясно, как ее можно было бы решать. Некоторые начальные результаты получены в недавней работе [5].

Литература

1. G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special functions.* Cambridge University Press, 1999.
2. А. Д. Беренштейн, А. Н. Кириллов, *Группы, порожденные инволюциями, схемы Гельфанда–Цетлина и комбинаторика таблиц Юнга.* — Алгебра и анализ **7**, № 1 (1995), 92–152; English translation: *Groups generated by involutions, Gelfand–Tsetlin patterns and combinatorics of Young tableaux*, St. Petersburg Math. J. **7** (1996), no. 1, 77–127.
3. A. Borodin and G. Olshanski, *Harmonic functions on multiplicative graphs and interpolation polynomials.* — Electronic J. Combin. **7** (2000), paper #R28; `arXiv:math/9912124`.

4. A. Borodin and G. Olshanski, *Harmonic analysis on the infinite–dimensional unitary group and determinantal point processes.* — Ann. Math., to appear; `arXiv:math/0109194`.
5. A. Borodin and G. Olshanski, *Z-measures on partitions and their scaling limits.* Preprint, 2002, 37 pp.; `arXiv:math-ph/0210148`.
6. J. Dougall, *On Vandermonde's theorem and some more general expansions.* — Proc. Edinburgh Math. Soc. **25** (1907), 114–132.
7. A. Erdelyi (ed.), *Higher transcendental functions,* Vol. I. McGraw–Hill, 1953; русский перевод: Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции,* т. I. М., Наука (Физматлит), 1973.
8. М. А. Евграфов, *Асимптотические оценки и целые функции.* М., Физматгиз, 1962.
9. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 1, 2. М., Мир, 1967.
10. I. Gessel and G. Viennot, Binomial determinants, paths, and hook length formulae. — Adv. Math. **58** (1985), 300–321.
11. S. V. Kerov, *The boundary of Young lattice and random Young tableaux.* In: Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 133–158.
12. S. V. Kerov, *Анизотропные диаграммы Юнга и симметрические функции Джека.* — Функц. анал. и прил. **34**, № 1 (2000), 51–64.
13. S. V. Kerov, *Asymptotic representation theory of the symmetric group and its applications in analysis.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 201 pp.
14. S. Kerov, G. Olshanski, and A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation.* — Comptes Rend. Acad. Sci. Paris, Sér. I **316** (1993), 773–778.
15. S. Kerov, G. Olshanski, and A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group,* to appear.
16. I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials, second edition.* Oxford University Press, 1995; русский перевод первого издания: И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла,* М., Мир, 1985.
17. G. Olshanski, *The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group.* — J. Funct. Anal., to appear; `arXiv:math.RT/0109193`.
18. G. Olshanski, *An introduction to harmonic analysis on the infinite symmetric group.* In: Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics (A. Vershik, ed.). Springer Lecture Notes in Math. **1815**, 2003, 127–160.
19. Г. Ольшанский, *Вероятностные меры на дуальных объектах к компактным симметрическим пространствам и гипергеометрические тождества.* — Функц. анал. прил. **37,** вып. 4 (2003).
20. D. Pickrell, *Measures on infinite dimensional Grassmann manifold.* — J. Funct. Anal. **70** (1987), 323–356.
21. R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics.* Wadsworth, Inc., 1986; русский перевод: Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика,* М., Мир 1990.
22. R. P. Stanley, *$GL(n)$ for combinatorialists.* In: Surveys in Combinatorics (Southampton, 1983). London Math. Soc. Lecture Note Ser. **82**. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983, pp. 187–199.

23. G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., Vol. 23, New York, 1939; 4th edition, 1975; русский перевод: Г. Сеге, *Ортогональные многочлены*, 1962.
24. A. M. Vershik and S. V. Kerov, *Asymptotic theory of characters of the symmetric group*. — Funct. Anal. Appl. **15** (1981), no. 4, 246–255.
25. Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*. М., Наука, 1970; English translation: Transl. Math. Monographs **40**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.

Kerov S. V. Multidimensional hypergeometric distribution, and characters of the unitary group.

The present paper is the publication of work notes by S. V. Kerov (1946–2000) written in 1993. The author introduces a multidimensional analog of the classical hypergeometric distribution. This is a probability measure M_n on the set of Young diagrams contained in the rectangle with n rows and m columns. The fact that the expression for M_n defines a probability measure is a nontrivial combinatorial identity, which is proved in various ways. Another combinatorial identity analyzed in the paper expresses a certain compatibility of the measures M_n and M_{n+1}. A link with Selberg type integrals is also pointed out. The work is motivated by the problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group.

Поступило 15 сентября 2003 г.