Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 301, 2003 г.

Л. Ю. Колотилина

ОЦЕНКИ ДЛЯ КРАЙНИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ БЛОЧНЫХ 2×2 ЭРМИТОВЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – эрмитова матрица порядка n, представленная в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix},$$

где $A_{12} \neq 0$, причем оба диагональных блока A_{11} и A_{22} положительно определены. Из положительной определенности A_{11} и A_{22} следует, что матрица A приводится блочно диагональным преобразованием подобия к матрице

$$B = D_A^{-1/2} A D_A^{-1/2} = \begin{bmatrix} I & R \\ R^* & I \end{bmatrix},$$

где

$$D_A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

– блочно диагональная часть A и на протяжении данной статьи

$$R = R_A = A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}.$$

Следовательно, по закону сохранения инерции младшие собственные значения $\lambda_n(A)$ и $\lambda_n(B) = 1 - \|R\|$ матриц A и B либо имеют одинаковые знаки, либо оба равны нулю. Таким образом,

$$\lambda_n(A) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \|R\| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \lambda_n(A) \leqslant 0 \Longleftrightarrow \|R\| \geqslant 1. \tag{1.1}$$

Здесь и ниже собственные значения $n \times n$ матрицы C обозначаются через $\lambda_i(C)$, $i = 1, \dots, n$, а если все собственные значения вещественны, то предполагается, что

$$\lambda_n(C) \leqslant \dots \leqslant \lambda_2(C) \leqslant \lambda_1(C),$$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 03-01-00349 и НШ-2268.2003.1.

т.е. собственные значения занумерованы в порядке невозрастания; $\|\cdot\|$ означает спектральную норму матрицы.

В §2 этой статьи мы покажем, что в указанных выше предположениях относительно матрицы A справедливы неравенства

$$\lambda_1(A) \geqslant \mu_+(A) \equiv \|A_{12}\| \left(\frac{1}{\|R\|} + 1 \right) \tag{1.2}$$

и либо

$$0 \leqslant \lambda_n(A) \leqslant \mu_-(A) \equiv \|A_{12}\| \left(\frac{1}{\|R\|} - 1 \right), \tag{1.3}$$

либо

$$\mu_-(A) \equiv \|A_{12}\| \left(\frac{1}{\|R\|} - 1 \right) \leqslant \lambda_n(A) \leqslant 0. \tag{1.4}$$

Кроме того, будут приведены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы неравенства (1.2)–(1.4) обращались в равенства.

В §3 рассматриваются блочные 2×2 эрмитовы положительно определенные матрицы, крайние собственные значения которых удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1(A) = \mu_+(A) \quad \text{и} \quad \lambda_n(A) = \mu_-(A), \tag{1.5}$$

и приводится ряд эквивалентных условий, характеризующих такие матрицы. В частности, оказывается, что условия (1.5) равносильны оптимальной обусловленности матрицы A относительно невырожденных блочно диагональных преобразований подобия.

§2. Оценки собственных значений

В этом параграфе мы будем предполагать, что

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad n \geqslant 2,$$

– это эрмитова матрица, $A_{12} \neq 0$, а диагональные блоки A_{11} и A_{22} порядков m, $1 \leqslant m < n$, и $n-m$ соответственно оба положительно определены.

Введем следующие обозначения:

$$R = A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2},$$

$$\mu_{\pm} = \|A_{12}\| \frac{1 \pm \|R\|}{\|R\|}.$$

Первая теорема этого параграфа устанавливает нижнюю оценку для старшего собственного значения матрицы A.

Теорема 2.1. *В указанных выше предположениях на матрицу A справедливо неравенство*

$$\lambda_1(A) \geqslant \mu_+(A), \tag{2.1}$$

причем неравенство (2.1) *обращается в равенство тогда и только тогда, когда существуют ненулевые векторы $x \in \mathbb{C}^m$ и $y \in \mathbb{C}^{n-m}$ такие, что*

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1(A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \textit{и} \quad A \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \mu_-(A) \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть

$$A_{12}y = \|A_{12}\|x, \quad A_{12}^* x = \|A_{12}\|y, \quad \|x\| = \|y\| = 1, \tag{2.3}$$

так что x и y образуют пару сингулярных векторов матрицы A_{12}, ассоциированную с сингулярным числом $\sigma_1(A_{12}) = \|A_{12}\| > 0$.

Покажем сперва, что

$$\frac{\|A_{12}\|^2}{\|R\|^2} \leqslant x^* A_{11} x \, y^* A_{22} y. \tag{2.4}$$

Действительно, из (2.3) следует, что

$$A_{11}^{-1/2} A_{12} y = R A_{22}^{1/2} y = \|A_{12}\| A_{11}^{-1/2} x,$$

так что мы имеем

$$\|A_{12}\|^2 x^* A_{11}^{-1} x = y^* A_{22}^{1/2} R^* R A_{22}^{1/2} y \leqslant \|R^2\| y^* A_{22} y$$

или, эквивалентно,

$$\frac{\|A_{12}\|^2}{\|R\|^2} \leqslant \frac{y^* A_{22} y}{x^* A_{11}^{-1} x}. \tag{2.5}$$

Поскольку, в силу неравенства Коши–Шварца,

$$1 = x^* x = (x^* A_{11}^{-1/2})(A_{11}^{1/2} x) \leqslant \left(x^* A_{11}^{-1} x \, x^* A_{11} x \right)^{1/2},$$

то неравенство (2.4) тривиально следует из (2.5).

Обозначим
$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$
Используя (2.3), неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, а также неравенство (2.4), мы выводим требуемую оценку (2.1) следующим образом:
$$\lambda_1(A) \geqslant \frac{z^*Az}{z^*z} = \frac{x^*A_{11}x + y^*A_{22}y + 2\|A_{12}\|}{2}$$
$$\geqslant \left(x^*A_{11}x\, y^*A_{22}y\right)^{1/2} + \|A_{12}\| \geqslant \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|} + \|A_{12}\| = \mu_+(A). \qquad (2.6)$$
Далее, если
$$\lambda_1(A) = \mu_+(A),$$
то, принимая во внимание (2.6), мы заключаем, что
$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mu_+(A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$
Ввиду (2.3), из последнего соотношения следуют равенства
$$A_{11}x = \mu_+(A)x - A_{12}y = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}x, \quad A_{22}y = \mu_+(A)y - A_{12}^*x = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}y,$$
из которых с учетом (2.3) вытекает, что
$$A\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \mu_-(A)\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$
Тем самым необходимость (2.2) доказана.

Наконец, для того, чтобы установить достаточность условий (2.2) для выполнения равенства $\lambda_1(A) = \mu_+(A)$, мы заметим, что из ортогональности собственных векторов $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ и $\left[\begin{smallmatrix} x \\ -y \end{smallmatrix}\right]$ матрицы A вытекает соотношение $\|x\| = \|y\|$, а из условий (2.2) легко выводятся равенства
$$A_{12}y = \frac{\lambda_1(A) - \mu_-(A)}{2}x, \quad A_{12}^*x = \frac{\lambda_1(A) - \mu_-(A)}{2}y,$$
означающие, что $[\lambda_1(A) - \mu_-(A)]/2$ является сингулярным числом матрицы A_{12}. Следовательно,
$$\lambda_1(A) - \mu_-(A) \leqslant 2\|A_{12}\|,$$

так что
$$\lambda_1(A) \leqslant \mu_-(A) + 2\|A_{12}\| = \mu_+(A).$$

Полученное неравенство в сочетании с неравенством (2.1) и доказывает, что
$$\lambda_1(A) = \mu_+(A).$$

Теорема 2.1 доказана полностью. $\square$

Замечание 2.1. При доказательстве теоремы 2.1 было установлено, что из условий (2.2) следуют равенства
$$A_{12}y = \frac{\lambda_1(A) - \mu_-(A)}{2}x, \quad A_{12}^*x = \frac{\lambda_1(A) - \mu_-(A)}{2}y.$$

Поскольку по теореме 2.1 из (2.2) также следует, что
$$\lambda_1(A) = \mu_+(A),$$

мы имеем
$$A_{12}y = \frac{\mu_+(A) - \mu_-(A)}{2}x = \|A_{12}\|x,$$
$$A_{12}^*x = \frac{\mu_+(A) - \mu_-(A)}{2}y = \|A_{12}\|y.$$

Следовательно, векторы x и y, необходимо удовлетворяющие условию $\|x\| = \|y\|$, образуют после нормировки $x/\|x\|$ и $y/\|y\|$ пару сингулярных векторов матрицы A_{12}, отвечающую ее старшему сингулярному числу $\|A_{12}\|$. С другой стороны, из (2.2) легко следует, что
$$A_{11}x = \frac{\lambda_1(A) + \mu_-(A)}{2}x = \frac{\mu_+(A) + \mu_-(A)}{2}x = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}x$$

и, аналогично,
$$A_{22}y = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}y,$$

а значит
$$Ry = A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}y = \|R\|x \quad \text{и} \quad R^*x = \|R\|y.$$

Таким образом, в условиях теоремы 2.1 равенство
$$\lambda_1(A) = \mu_+(A)$$

справедливо тогда и только тогда, когда соотношения (2.2) выполнены для нормированных векторов x и y: $\|x\| = \|y\| = 1$, которые одновременно образуют пары старших сингулярных векторов для матриц A_{12} и $R = A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}$.

Замечание 2.2. Из доказательства теоремы 2.1 в части достаточности легко следует, что равенство $\lambda_1(A) = \mu_+(A)$ справедливо и при условии, что для некоторых ненулевых векторов x и y выполнены соотношения

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1(A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \lambda_k(A) \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}, \quad k \geqslant 2,$$

причем $\lambda_k(A) \leqslant \mu_-(A)$. Таким образом, условие (2.2) допускает некоторое ослабление.

Следующая теорема устанавливает верхнюю оценку для младшего собственного значения $\lambda_n(A)$ эрмитовой положительно полуопределенной блочной 2×2 матрицы A.

Теорема 2.2. *Пусть матрица*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad n \geqslant 2, \quad A_{12} \neq 0,$$

с положительно определенными диагональными блоками A_{11} и A_{22} эрмитова и положительно полуопределена. Тогда

$$\lambda_n(A) \leqslant \mu_-(A), \tag{2.7}$$

причем, если A положительно определена, то неравенство (2.7) обращается в равенство тогда и только тогда, когда существуют ненулевые векторы $x \in \mathbb{C}^m$ и $y \in \mathbb{C}^{n-m}$ такие, что

$$A \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \lambda_n(A) \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mu_+(A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть

$$Rv = \|R\| u, \quad R^* u = \|R\| v, \quad \|u\| = \|v\| = 1, \tag{2.9}$$

так что векторы u и v образуют пару сингулярных векторов матрицы $R = A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}$, ассоциированную с $\sigma_1(R) = \|R\| > 0$.

Прежде всего, установим неравенство

$$\left(u^*A_{11}^{-1}u\ v^*A_{22}^{-1}v\right)^{-1/2} \leqslant \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}. \tag{2.10}$$

Действительно, из (2.9) следует, что

$$u^*Rv = u^*A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2}v = \|R\|,$$

а в силу неравенства Коши–Шварца мы тогда имеем

$$\begin{aligned}\|R\| &\leqslant \|A_{11}^{-1/2}u\|\ \|A_{12}A_{22}^{-1/2}v\| \\ &= \left(u^*A_{11}^{-1}u\right)^{1/2}\left(v^*A_{22}^{-1/2}A_{12}^*A_{12}A_{22}^{-1/2}v\right)^{1/2} \\ &\leqslant \|A_{12}\|\left(u^*A_{11}^{-1}u\right)^{1/2}\left(v^*A_{22}^{-1}v\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Обозначим

$$z = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1/2}u \\ -A_{22}^{-1/2}v \end{bmatrix}.$$

Учитывая положительную полуопределенность эрмитовой матрицы A (из которой следует, что $\|R\| \leqslant 1$), а также используя (2.9), неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим и неравенство (2.10), мы выводим:

$$\begin{aligned}0 \leqslant \lambda_n(A) &\leqslant \frac{z^*Az}{z^*z} = \frac{u^*u + v^*v - u^*Rv - v^*R^*u}{u^*A_{11}^{-1}u + v^*A_{22}^{-1}v} \\ &= \frac{2 - 2\|R\|}{u^*A_{11}^{-1}u + v^*A_{22}^{-1}v} \leqslant \frac{1 - \|R\|}{(u^*A_{11}^{-1}u\, v^*A_{22}^{-1}v)^{1/2}} \\ &\leqslant \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}(1 - \|R\|) = \mu_-(A).\end{aligned} \tag{2.11}$$

Если матрица A положительно определена, так что $\|R\| < 1$, и выполнено равенство

$$\lambda_n(A) = \mu_-(A),$$

то из (2.11) необходимо следует, что

$$A\begin{bmatrix} A_{11}^{-1/2}u \\ -A_{22}^{-1/2}v \end{bmatrix} = \mu_-(A)\begin{bmatrix} A_{11}^{-1/2}u \\ -A_{22}^{-1/2}v \end{bmatrix}.$$

Таким образом мы имеем равенства

$$A_{11}^{1/2}u - A_{12}A_{22}^{-1/2}v = \mu_-(A)A_{11}^{-1/2}u,$$

$$A_{12}^*A_{11}^{-1/2}u - A_{22}^{1/2}v = -\mu_-(A)A_{22}^{-1/2}v,$$

которые могут быть переписаны в виде

$$u - Rv = \mu_-(A)A_{11}^{-1}u, \quad v - R^*u = \mu_-(A)A_{22}^{-1}v. \tag{2.12}$$

Поскольку в силу (2.9)

$$u - Rv = (1 - \|R\|)u, \quad v - R^*u = (1 - \|R\|)v,$$

из соотношений (2.12) вытекает, что

$$A_{11}u = \frac{\mu_-(A)}{1-\|R\|}u = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}u, \quad A_{22}v = \frac{\mu_-(A)}{1-\|R\|}v = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}v$$

или, равносильно,

$$A_{11}^{1/2}u = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}A_{11}^{-1/2}u, \quad A_{22}^{1/2}v = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}A_{22}^{-1/2}v. \tag{2.13}$$

Используя (2.9) и (2.13), мы выводим:

$$\begin{aligned} A\begin{bmatrix} A_{11}^{-1/2}u \\ A_{22}^{-1/2}v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}^{1/2}u + A_{12}A_{22}^{-1/2}v \\ A_{12}^*A_{11}^{-1/2}u + A_{22}^{1/2}v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{1/2}(u+Rv) \\ A_{22}^{1/2}(R^*u+v) \end{bmatrix} \\ &= (1+\|R\|)\begin{bmatrix} A_{11}^{1/2}u \\ A_{22}^{1/2}v \end{bmatrix} = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}(1+\|R\|)\begin{bmatrix} A_{11}^{-1/2}u \\ A_{22}^{-1/2}v \end{bmatrix} \\ &= \mu_+(A)\begin{bmatrix} A_{11}^{-1/2}u \\ A_{22}^{-1/2}v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тем самым при $\|R\| < 1$ необходимость условий (2.8) для того, чтобы неравенство (2.7) обращалось в равенство, установлена.

Наконец, для того, чтобы доказать достаточность условий (2.8) для выполнения равенства

$$\lambda_n(A) = \mu_-(A),$$

заметим, что из (2.8) легко следуют соотношения

$$A_{12}y = \frac{\mu_+(A) - \lambda_n(A)}{2}x, \quad A_{12}^*x = \frac{\mu_+(A) - \lambda_n(A)}{2}y.$$

Поскольку из ортогональности собственных векторов $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ вытекает, что $\|x\| = \|y\|$, последние соотношения означают, что $[\mu_+(A) - \lambda_n(A)]/2$ является сингулярным числом матрицы A_{12}, откуда следует, что

$$\mu_+(A) - \lambda_n(A) \leqslant 2\|A_{12}\|. \tag{2.14}$$

С другой стороны, ввиду (2.7) мы имеем

$$\mu_+(A) - \lambda_n(A) \geqslant \mu_+(A) - \mu_-(A) = 2\|A_{12}\|. \tag{2.15}$$

Из неравенств (2.14) и (2.15) с очевидностью следует равенство

$$\lambda_n(A) = \mu_-(A),$$

что и завершает доказательство теоремы 2.2. $\square$

Замечание 2.3. Если, в условиях теоремы 2.2, $\lambda_n(A) = \mu_-(A) = 0$ и $A\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = 0$, то второе из равенств (2.8) может и не выполняться. Действительно, пусть

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Матрица A перестановочно подобна блочно диагональной матрице

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

так что ее собственные значения образуют множество $\{0, 1, 2, 5\}$. Тривиальная проверка показывает, что при $x = y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Далее, поскольку в силу условия $\lambda_n(A) = 0$ мы имеем $\|R\| = 1$ (см., например, (1.1)), то

$$\mu_-(A) = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|} - \|A_{12}\| = 0, \quad \mu_+(A) = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|} + \|A_{12}\| = 2\|A_{12}\|,$$

при этом

$$\|A_{12}\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = 2,$$

так что

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \mu_+(A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Замечание 2.4. При доказательстве теоремы 2.2 было показано, что из условий (2.8) следуют равенства

$$A_{12}y = \frac{\mu_+(A) - \lambda_n(A)}{2} x, \quad A_{12}^* x = \frac{\mu_+(A) - \lambda_n(A)}{2} y$$

и

$$\lambda_n(A) = \mu_-(A),$$

так что

$$A_{12}y = \frac{\mu_+(A) - \mu_-(A)}{2} x = \|A_{12}\| x,$$

$$A_{12}^* x = \frac{\mu_+(A) - \mu_-(A)}{2} y = \|A_{12}\| y.$$

Поскольку $\|x\| = \|y\|$ в силу ортогональности собственных векторов $\left[\begin{smallmatrix} x \\ -y \end{smallmatrix}\right]$ и $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$, то векторы $x/\|x\|$ и $y/\|y\|$ образуют пару сингулярных векторов матрицы A_{12}, отвечающую ее сингулярному числу $\|A_{12}\|$. С другой стороны, поскольку из (2.8) также следует, что

$$A_{11}x = \frac{\mu_+(A) + \lambda_n(A)}{2} x = \frac{\mu_+(A) + \mu_-(A)}{2} x = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|} x$$

и, аналогично,

$$A_{22}y = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|} y,$$

то мы имеем

$$Ry = A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2} y = \frac{\|R\|}{\|A_{12}\|} \|A_{12}\| x = \|R\| x.$$

Аналогично устанавливается, что

$$R^*x = \|R\|y.$$

Таким образом, для положительно определенной блочной 2×2 матрицы A равенство

$$\lambda_n(A) = \mu_-(A)$$

выполняется тогда и только тогда, когда соотношения (2.8) справедливы для нормированных векторов x и y : $\|x\| = \|y\| = 1$, которые одновременно образуют пары старших сингулярных векторов для матриц A_{12} и R.

Из теорем 2.1 и 2.2 и их доказательств нетрудно вывести следующие оценки крайних собственных значений блочной 2×2 матрицы A, формулируемые в терминах спектральных характеристик ее блоков.

Следствие 2.1. *Пусть A – эрмитова блочная 2×2 матрица порядка n, $n \geqslant 2$, с положительно определенными диагональными блоками. Тогда*

$$\lambda_1(A) \geqslant \Big[\lambda_{\min}(A_{11})\lambda_{\min}(A_{22})\Big]^{1/2} + \|A_{12}\|, \tag{2.16}$$

а если, кроме того, матрица A положительно полуопределена, то

$$\lambda_n(A) \leqslant \|A_{11}\|^{1/2}\|A_{22}\|^{1/2} - \|A_{12}\|. \tag{2.17}$$

Доказательство. Пусть векторы u и v удовлетворяют условиям (2.9). Тогда, в силу (2.10), мы имеем

$$\Big(u^*A_{11}^{-1}u\ v^*A_{22}^{-1}v\Big)^{-1/2} \leqslant \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}, \tag{2.18}$$

причем это неравенство справедливо для произвольной эрмитовой матрицы A с положительно определенными диагональными блоками. С другой стороны, очевидно,

$$\begin{aligned}\Big(u^*A_{11}^{-1}u\ v^*A_{22}^{-1}v\Big)^{-1} &\geqslant \Big(\|A_{11}^{-1}\|\,\|A_{22}^{-1}\|\Big)^{-1}\\ &= \lambda_{\min}(A_{11})\lambda_{\min}(A_{22}).\end{aligned} \tag{2.19}$$

Следовательно, по (2.1), (2.18) и (2.19) мы имеем

$$\lambda_1(A) \geqslant \mu_+(A) = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|} + \|A_{12}\| \geqslant \Big[\lambda_{\min}(A_{11})\lambda_{\min}(A_{22})\Big]^{1/2} + \|A_{12}\|.$$

Аналогично, если векторы x и y удовлетворяют условиям (2.3), то в силу (2.4) справедливо неравенство

$$\Big(x^*A_{11}x \ y^*A_{22}y\Big)^{1/2} \geqslant \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|},$$

и, применяя теорему 2.2, мы выводим неравенство (2.17) следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda_n(A) \leqslant \mu_-(A) &= \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|} - \|A_{12}\| \\ &\leqslant \Big(x^*A_{11}x \ y^*A_{22}y\Big)^{1/2} - \|A_{12}\| \leqslant \|A_{11}\|^{1/2}\|A_{22}\|^{1/2} - \|A_{12}\|.\end{aligned}$$

□

Последняя теорема этого параграфа устанавливает нижнюю оценку для младшего собственного значения матрицы A в том случае, когда $\lambda_n(A) \leqslant 0$.

Теорема 2.3. *Пусть A – блочная 2×2 эрмитова матрица порядка $n \geqslant 2$ с положительно определенными диагональными блоками, $A_{12} \neq 0$ и пусть $\lambda_n(A) \leqslant 0$. Тогда*

$$\lambda_n(A) \geqslant \mu_-(A), \tag{2.20}$$

причем при $\lambda_n(A) \neq 0$ это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда соотношения

$$A\begin{bmatrix} x \\ -y\end{bmatrix} = \lambda_n(A)\begin{bmatrix} x \\ -y\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix} = \mu_+(A)\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix} \tag{2.21}$$

выполнены для ненулевых векторов $x \in \mathbb{C}^m$ и $y \in \mathbb{C}^{n-m}$ таких, что

$$x^*A_{12}y = \|A_{12}\|\,\|x\|\,\|y\|. \tag{2.22}$$

Доказательство. Пусть

$$A\begin{bmatrix} x \\ -y\end{bmatrix} = \lambda_n(A)\begin{bmatrix} x \\ -y\end{bmatrix}, \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 > 0.$$

Это условие равносильно равенствам

$$A_{11}x - A_{12}y = \lambda_n(A)x, \quad A_{12}^*x - A_{22}y = -\lambda_n(A)y, \tag{2.23}$$

из которых следует, что

$$x^*A_{12}y = x^*A_{11}x - \lambda_n(A)\|x\|^2, \tag{2.24}$$

$$y^*A_{12}^*x = y^*A_{22}y - \lambda_n(A)\|y\|^2. \tag{2.25}$$

Поскольку $\lambda_n(A) \leqslant 0$, а блоки A_{11} и A_{22} положительно определены, из (2.24) вытекает, что число $x^*A_{12}y$ вещественно и положительно при $x \neq 0$. В этом случае, очевидно, справедливо также и неравенство $y \neq 0$. Аналогично, из (2.25) мы выводим, что $y^*A_{12}^*x = x^*A_{12}y > 0$ при $y \neq 0$, и в этом случае $x \neq 0$. Таким образом, величина $x^*A_{12}y$ всегда положительна, а оба вектора x и y необходимо являются ненулевыми. Учитывая сказанное выше и дважды используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, мы выводим:

$$\begin{aligned} -\lambda_n(A) &= -\frac{[x^* \; -y^*]A\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}}{[x^* \; -y^*]\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}} = \frac{2x^*A_{12}y - (x^*A_{11}x + y^*A_{22}y)}{\|x\|^2 + \|y\|^2} \\ &\leqslant \frac{x^*A_{12}y - (x^*A_{11}x\, y^*A_{22}y)^{1/2}}{\|x\|\,\|y\|}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Далее, в силу неравенства Коши–Шварца мы имеем

$$\begin{aligned} x^*A_{12}y &= (x^*A_{11}^{1/2})(RA_{22}^{1/2}y) \leqslant \|A_{11}^{1/2}x\|\,\|RA_{22}^{1/2}y\| \\ &\leqslant \|R\|(x^*A_{11}x\, y^*A_{22}y)^{1/2} \end{aligned}$$

или, равносильно,

$$(x^*A_{11}x\, y^*A_{22}y)^{1/2} \geqslant \frac{x^*A_{12}y}{\|R\|}. \tag{2.27}$$

Из неравенства (2.26) с учетом (2.27) следует, что

$$-\lambda_n(A) \leqslant \frac{x^*A_{12}y}{\|x\|\,\|y\|}\left(1 - \frac{1}{\|R\|}\right) \leqslant \|A_{12}\|\left(1 - \frac{1}{\|R\|}\right) = -\mu_-(A).$$

Тем самым неравенство (2.20) установлено.

Из приведенного доказательства неравенства (2.20) следует, что равенство

$$\lambda_n(A) = \mu_-(A) \tag{2.28}$$

справедливо в том и только том случае, когда выполнены следующие условия:

$$\|x\| = \|y\|; \tag{2.29}$$

$$x^* A_{11} x = y^* A_{22} y; \tag{2.30}$$

$$A_{11}^{1/2} x = \alpha R A_{22}^{1/2} y = \alpha A_{11}^{-1/2} A_{12} y, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \alpha \neq 0; \tag{2.31}$$

$$R^* R A_{22}^{1/2} y = \|R\|^2 A_{22}^{1/2} y; \tag{2.32}$$

$$x^* A_{12} y = \|A_{12}\| \, \|x\| \, \|y\|. \tag{2.33}$$

Предположим теперь, что равенство (2.28) справедливо и, следовательно, выполнены соотношения (2.29)–(2.33).

Соотношение (2.31) равносильно равенству

$$A_{11} x = \alpha A_{12} y, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \alpha \neq 0. \tag{2.34}$$

В силу (2.23), (2.28) и (2.34) мы имеем

$$A_{11} x - A_{12} y = (\alpha - 1) A_{12} y = \mu_-(A) x, \tag{2.35}$$

откуда следует, что

$$(\alpha - 1) x^* A_{12} y = \mu_-(A) \|x\|^2,$$

так что

$$\begin{aligned} \alpha = 1 + \mu_-(A) \frac{\|x\|^2}{x^* A_{12} y} &\overset{(2.33)}{=} 1 + \mu_-(A) \frac{\|x\|^2}{\|A_{12}\| \, \|x\| \, \|y\|} \\ &\overset{(2.29)}{=} 1 + \frac{\mu_-(A)}{\|A_{12}\|} = \frac{1}{\|R\|}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Соотношения (2.34) и (2.36) дают нам равенство

$$A_{12} y = \|R\| A_{11} x, \tag{2.37}$$

подставляя которое в (2.35), мы получаем, что

$$\mu_-(A) x = (1 - \|R\|) A_{11} x$$

или, поскольку $\|R\| \neq 1$,

$$A_{11}x = \frac{\mu_-(A)}{1-\|R\|}x = \frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}x. \tag{2.38}$$

Теперь из (2.37) и (2.38) мы выводим, что

$$A_{11}x + A_{12}y = (1+\|R\|)A_{11}x = (1+\|R\|)\frac{\|A_{12}\|}{\|R\|}x = \mu_+(A)x. \tag{2.39}$$

Далее, равенство (2.32) можно переписать в виде

$$A_{12}^*A_{11}^{-1}A_{12}y = \|R\|^2 A_{22}y,$$

из которого ввиду (2.37) следует, что

$$A_{12}^*x = \|R\|A_{22}y. \tag{2.40}$$

Используя соотношения (2.23), (2.28) и (2.40), мы выводим

$$-\mu_-(A)y = A_{12}^*x - A_{22}y = \left(1 - \frac{1}{\|R\|}\right)A_{12}^*x,$$

так что

$$A_{12}^*x = \frac{\mu_-(A)\|R\|}{1-\|R\|}y = \|A_{12}\|y. \tag{2.41}$$

Теперь, ввиду (2.40) и (2.41), мы имеем

$$A_{12}^*x + A_{22}y = \left(1 + \frac{1}{\|R\|}\right)A_{12}^*x = \mu_+(A)y. \tag{2.42}$$

Соотношения (2.39) и (2.42) означают, что

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mu_+(A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

что и завершает доказательство необходимости условий (2.21) для справедливости равенства (2.28) при $\lambda_n(A) < 0$. Условия же (2.22) совпадают с (2.33).

Установим теперь достаточность условий (2.21) и (2.22). Из соотношений (2.21) следуют равенства

$$A_{12}y = A_{11}x - \lambda_n(A)x, \quad A_{12}y = -A_{11}x + \mu_+(A)x.$$

Складывая эти равенства, мы приходим к соотношению

$$A_{12}y = \frac{\mu_+(A) - \lambda_n(A)}{2}x,$$

из которого немедленно следует, что

$$x^* A_{12} y = \frac{\mu_+(A) - \lambda_n(A)}{2} \|x\|^2. \tag{2.43}$$

С другой стороны, поскольку собственные векторы $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ матрицы A необходимо ортогональны, мы имеем

$$\|x\| = \|y\|,$$

а тогда условие (2.22) переписывается в виде

$$x^* A_{12} y = \|A_{12}\| \, \|x\|^2. \tag{2.44}$$

Соотношения (2.43) и (2.44) показывают, что

$$\mu_+(A) - \lambda_n(A) = 2\|A_{12}\|,$$

откуда следует, что

$$\lambda_n(A) = \mu_+(A) - 2\|A_{12}\| = \mu_-(A),$$

т.е. неравенство (2.20) обращается в равенство. Теорема 2.3 доказана полностью. □

Замечание 2.5. Пример, рассмотренный в замечании 2.3, показывает, что в условиях теоремы 2.3 при $\lambda_n(A) = 0 = \mu_-(A)$ и $A \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = 0$ второе из равенств (2.21) может не выполняться.

Замечание 2.6. В теореме 2.3 условие (2.22) можно заменить на условие

$$x^* R y = \|R\| \, \|x\| \, \|y\|. \tag{2.45}$$

Действительно, если выполнены условия (2.21), то, как легко убедиться, имеют место соотношения

$$A_{11} x = \frac{\mu_+(A) + \lambda_n(A)}{2} x, \quad A_{22} y = \frac{\mu_+(A) + \lambda_n(A)}{2} y,$$

$$A_{12} y = \frac{\mu_+(A) - \lambda_n(A)}{2} x,$$

из которых (с учетом равенства $\|x\| = \|y\|$, вытекающего из (2.21)) следует, что

$$\frac{x^* A_{12} y}{\|x\| \, \|y\|} = \frac{\mu_+(A) - \lambda_n(A)}{2}, \quad \frac{x^* R y}{\|x\| \, \|y\|} = \frac{\mu_+(A) - \lambda_n(A)}{\mu_+(A) + \lambda_n(A)}.$$

В силу последних соотношений условия (2.22) и (2.45) равносильны равенствам

$$\|A_{12}\| = \frac{\mu_+(A) - \lambda_n(A)}{2} \tag{2.46}$$

и

$$\|R\| = \frac{\mu_+(A) - \lambda_n(A)}{\mu_+(A) + \lambda_n(A)} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\|R\|} + 1 = \frac{2\mu_+(A)}{\mu_+(A) - \lambda_n(A)} \tag{2.47}$$

соответственно. Равносильность же условий (2.46) и (2.47) очевидно следует из определения

$$\mu_+(A) = \|A_{12}\|\left(\frac{1}{\|R\|} + 1\right).$$

Замечание 2.7. По аналогии с теоремой 2.2 можно выдвинуть предположение, что условия (2.21) являются достаточными для выполнения равенства $\lambda_n(A) = \mu_-(A)$. Вопрос о справедливости этого предположения пока остается открытым.

§3. Матрицы с оптимальными крайними собственными значениями

Пусть $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$ – $n \times n$ эрмитова положительно определенная матрица, представленная в блочной 2×2 форме, причем $A_{12} \neq 0$. В соответствии с теоремами 2.1 и 2.2 крайние собственные значения A удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) &\geqslant \mu_+(A) \equiv \|A_{12}\|\left(\frac{1}{\|R_A\|} + 1\right), \\ \lambda_n(A) &\leqslant \mu_-(A) \equiv \|A_{12}\|\left(\frac{1}{\|R_A\|} - 1\right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $R_A = A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}$. В этом параграфе мы рассматриваем матрицы, крайние собственные значения которых удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1(A) = \mu_+(A), \quad \lambda_n(A) = \mu_-(A), \tag{3.2}$$

т.е. матрицы, на которых оценки (3.1) достигаются.

Если условия (3.2) выполнены, будем говорить, что относительно рассматриваемого блочного 2×2 разбиения матрица A имеет *оптимальные* крайние собственные значения.

Различные характеризации блочных 2×2 матриц с оптимальными крайними собственными значениями представлены в теореме 3.1, доказательство которой основывается на теоремах 2.1 и 2.2.

Теорема 3.1. *Пусть* $A = \left[\begin{smallmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{smallmatrix}\right]$ – $n \times n$, $n \geqslant 2$, *эрмитова положительно определенная матрица, где* $A_{11} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $1 \leqslant m < n$, *и* $A_{12} \neq 0$. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) A *имеет оптимальные крайние собственные значения;*

(ii) *существуют ненулевые векторы* $x \in \mathbb{C}^m$ *и* $y \in \mathbb{C}^{n-m}$ *такие, что*

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1(A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \lambda_n(A) \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}; \tag{3.3}$$

(iii) *матрица* A *оптимально обусловлена относительно группы* $\Delta(m, n-m)$, *т.е.*

$$k(A) \equiv \frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)} = \min_{\Delta \in \Delta(m,n-m)} \left\{ \frac{\lambda_1(\Delta^* A \Delta)}{\lambda_n(\Delta^* A \Delta)} \right\};$$

(iv)
$$\frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)} = \frac{1 + \|R_A\|}{1 - \|R_A\|}; \tag{3.4}$$

(v) *матрица* A *имеет оптимальный относительно множества* $D(m, n-m)$ *разброс собственных значений, т.е.*

$$s(A) \equiv \lambda_1(A) - \lambda_n(A) = \min_{D \in D(m,n-m)} \{\lambda_1(A + D) - \lambda_n(A + D)\};$$

(vi)
$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) = 2\|A_{12}\|; \tag{3.5}$$

(vii) *для любого ненулевого вектора* $z \in \mathbb{C}^n$ *справедливо неравенство*

$$\frac{z^* A z \, z^* A^{-1} z}{\|z\|^4} \leqslant \frac{1}{1 - \|R_A\|^2}. \tag{3.6}$$

Здесь и ниже через $D(m, n-m)$ *обозначено множество эрмитовых* $n \times n$ *матриц вида*

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad D_1 \in \mathbb{C}^{m \times m},$$

а через $\Delta(m, n-m)$ *обозначена группа всех невырожденных* $n \times n$ *матриц вида*

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \Delta_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

Доказательство. По теоремам 2.1 и 2.2 мы имеем неравенства

$$\frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)} \geqslant \frac{\mu_+(A)}{\mu_-(A)} = \frac{1+\|R_A\|}{1-\|R_A\|} \tag{3.7}$$

и

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) \geqslant \mu_+(A) - \mu_-(A) = 2\|A_{12}\|. \tag{3.8}$$

Кроме того, каждое из неравенств (3.7) и (3.8) обращается в равенство тогда и только тогда, когда A имеет оптимальные крайние собственные значения. Тем самым доказана эквивалентность утверждений (i), (iv) и (vi).

Обозначим

$$\Delta^* A \Delta = B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{bmatrix},$$

где Δ – произвольная матрица из множества $\Delta(m, n-m)$. Как легко убедиться,

$$\|R_B\| = \|B_{11}^{-1/2} B_{12} B_{22}^{-1/2}\| = \|A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}\| = \|R_A\|.$$

Используя полученное соотношение и применяя (3.7) к матрице B, мы выводим:

$$\frac{\lambda_1(\Delta^* A \Delta)}{\lambda_n(\Delta^* A \Delta)} = \frac{\lambda_1(B)}{\lambda_n(B)} \geqslant \frac{1+\|R_B\|}{1-\|R_B\|} = \frac{1+\|R_A\|}{1-\|R_A\|}. \tag{3.9}$$

С другой стороны, при

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1/2} \end{bmatrix}$$

мы, очевидно, имеем

$$\lambda_1(\Delta_0^* A \Delta_0) = 1 + \|R_A\|, \quad \lambda_n(\Delta_0^* A \Delta_0) = 1 - \|R_A\|,$$

так что

$$\frac{\lambda_1(\Delta_0^* A \Delta_0)}{\lambda_n(\Delta_0^* A \Delta_0)} = \frac{1+\|R_A\|}{1-\|R_A\|}.$$

Из неравенства (3.9) и только что установленного равенства следует, что

$$\min_{\Delta \in \Delta(m,n-m)} \left\{ \frac{\lambda_1(\Delta^* A \Delta)}{\lambda_n(\Delta^* A \Delta)} \right\} = \frac{1+\|R_A\|}{1-\|R_A\|},$$

так что утверждения (iii) и (iv) равносильны.

Аналогично, введем обозначения

$$A + D = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}^* & C_{22} \end{bmatrix}, \quad D \in D(m, n-m).$$

Ясно, что

$$C_{12} = A_{12}. \tag{3.10}$$

Если матрица C положительно определена, то, в силу (3.8) в применении к матрице C и равенства (3.10), мы имеем

$$\lambda_1(C) - \lambda_n(C) \geqslant 2\|C_{12}\| = 2\|A_{12}\|. \tag{3.11}$$

Если же матрица C неопределена, то можно найти скалярный сдвиг $\alpha > 0$ такой, что матрица $C_1 = C + \alpha I_n$ является положительно определенной. Поскольку, очевидно,

$$\lambda_1(C_1) - \lambda_n(C_1) = \lambda_1(C) - \lambda_n(C),$$

мы заключаем, что неравенство (3.11) справедливо для всех $D \in D(m, n-m)$.

С другой стороны, при

$$D_0 = -\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

мы имеем

$$C_0 = A + D_0 = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{12}^* & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1(C_0) = \|A_{12}\|, \quad \lambda_n(C_0) = -\|A_{12}\|,$$

так что

$$\lambda_1(C_0) - \lambda_n(C_0) = 2\|A_{12}\|.$$

Неравенство (3.11) и только что установленное равенство показывают, что

$$\min_{D \in D(m,n-m)} \left\{\lambda_1(A+D) - \lambda_n(A+D)\right\} = 2\|A_{12}\|.$$

Следовательно утверждения (v) и (vi) равносильны.

Если матрица A имеет оптимальные крайние собственные значения, то, по теореме 2.1, найдутся ненулевые векторы x и y такие, что

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1(A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \mu_-(A)\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \lambda_n(A)\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Тем самым установлено, что из (i) следует (ii).

Если справедливы соотношения (3.3), то, как нетрудно убедиться,

$$A_{12}^* x = \frac{\lambda_1(A) - \lambda_n(A)}{2} y, \quad A_{12} y = \frac{\lambda_1(A) - \lambda_n(A)}{2} x.$$

Следовательно, $[\lambda_1(A) - \lambda_n(A)]/2$ является сингулярным числом A_{12}, а значит

$$\frac{\lambda_1(A) - \lambda_n(A)}{2} \leqslant \|A_{12}\|.$$

Полученное неравенство в сочетании с неравенством (3.8) означает, что

$$\lambda_1(A) - \lambda_n(A) = 2\|A_{12}\|.$$

Таким образом, утверждение (vi) следует из (ii).

Теперь остается лишь показать, что утверждение (vii) равносильно каждому из утверждений (i)–(vi).

Если матрица A имеет оптимальные крайние собственные значения, то по неравенству Канторовича (см., например, [6, II. 4.3.1]) для любого ненулевого вектора $z \in \mathbb{C}^n$ мы имеем

$$\frac{z^* A z\, z^* A^{-1} z}{\|z\|^4} \leqslant \frac{[\lambda_1(A) + \lambda_n(A)]^2}{4\lambda_1(A)\lambda_n(A)} = \frac{[\mu_+(A) + \mu_-(A)]^2}{4\mu_+(A)\mu_-(A)}.$$

Тривиальные вычисления показывают, что

$$\frac{[\mu_+(A) + \mu_-(A)]^2}{4\mu_+(A)\mu_-(A)} = \frac{1}{1 - \|R_A\|^2}, \tag{3.12}$$

так что из (i) следует (vii).

Наконец, пусть

$$Az_1 = \lambda_1(A) z_1, \quad \|z_1\| = 1; \quad Az_n = \lambda_n(A) z_n, \quad \|z_n\| = 1.$$

При

$$z_0 = \frac{z_1 + z_n}{\sqrt{2}}$$

мы имеем

$$\|z_0\| = 1, \quad \frac{z_0^* A z_0\, z_0^* A^{-1} z_0}{\|z_0\|^4} = \frac{[\lambda_1(A) + \lambda_n(A)]^2}{4\lambda_1(A)\lambda_n(A)}.$$

Следовательно, если справедливо утверждение (vii), то, принимая во внимание (3.12), мы получаем

$$\frac{[\lambda_1(A)+\lambda_n(A)]^2}{4\lambda_1(A)\lambda_n(A)} = \frac{[k(A)+1]^2}{4k(A)} \leqslant \frac{1}{1-\|R_A\|^2}$$
$$= \frac{[\mu_+(A)+\mu_-(A)]^2}{4\mu_+(A)\mu_-(A)} = \frac{[\frac{\mu_+(A)}{\mu_-(A)}+1]^2}{4\frac{\mu_+(A)}{\mu_-(A)}}.$$

Поскольку функция

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{4x}$$

является строго возрастающей при $x > 1$, мы заключаем, что

$$k(A) \leqslant \frac{\mu_+(A)}{\mu_-(A)}.$$

Поскольку, с другой стороны,

$$k(A) \geqslant \frac{\mu_+(A)}{\mu_-(A)}$$

в силу (3.7), мы приходим к равенству

$$k(A) = \frac{\mu_+(A)}{\mu_-(A)} = \frac{1+\|R_A\|}{1-\|R_A\|}.$$

Таким образом, мы показали, что из (vii) следует (iv), что и завершает доказательство теоремы 3.1. □

Уместно заметить, что неравенство

$$k(A) \geqslant \frac{1+\|R_A\|}{1-\|R_A\|}$$

впервые было получено Дэммелем [4], равносильность утверждений (ii) и (iii) была установлена в [1], где была также приведена характеризация оптимально обусловленных матриц в терминах векторной агрегации, а равносильность утверждений (i), (ii), (iii) и (v) была впервые доказана в [5].

Очевидный пример матриц с оптимальными крайними собственными значениями дают блочные 2×2 эрмитовы положительно определенные матрицы с единичными диагональными блоками, которые, как хорошо известно (см., например, [1–3]), оптимально обусловлены относительно соответствующей группы блочно диагональных матриц. Нетривиальным классом матриц с оптимальными крайними собственными значениями является класс так называемых уравновешенных матриц, рассмотренный в работе [2], в которой было показано, что уравновешенные матрицы оптимально обусловлены.

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Оптимально обусловленные блочные* 2×2 *матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **268** (2000), 72–85.
2. Л. Ю. Колотилина, *Об одном классе оптимально обусловленных блочных* 2×2 *матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 64–76.
3. Л. Ю. Колотилина, *О крайних собственных значениях блочных* 2×2 *эрмитовых матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **296** (2003), 27–38.
4. J. Demmel, *The condition number of equivalence transformations that block diagonalize matrix pencils.* In: *Matrix Pencils* (B. Kagström and A. Ruhe, eds.), Lecture Notes in Math. **973**, Springer (1982), pp. 2–16.
5. S. C. Eisenstat, J. W. Lewis, M. H. Schultz, *Optimal block diagonal scaling of block 2-cyclic matrices.* — Linear Algebra Appl. **44** (1982), 181–186.
6. М. Маркус, Х. Минк, *Обзор по теории матриц и матричных неравенств.* М., Наука (1972).

Kolotilina L. Yu. Bounds for the extreme eigenvalues of block 2×2 Hermitian matrices.

Let an $n \times n$ Hermitian matrix A be presented in block 2×2 form as $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$, where $A_{12} \neq 0$, and assume that the diagonal blocks A_{11} and A_{22} are positive definite. Under these assumptions, it is proved that the extreme eigenvalues of A satisfy the bounds

$$\lambda_1(A) \geqslant \|A_{12}\|(\|R\|^{-1} + 1), \quad |\lambda_n(A)| \leqslant \|A_{12}\| \, \big| \|R\|^{-1} - 1 \big|,$$

where $R = A_{11}^{-1/2} A_{12} A_{22}^{-1/2}$ and $\|\cdot\|$ is the spectral norm. Further, in the positive-definite case, several equivalent conditions necessary and sufficient for both of the above bounds to be attained are provided.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 11 сентября 2003 г.