Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 301, 2003 г.

А. В. Малютин

ГРАНИЦА ПУАССОНА–ФЮРСТЕНБЕРГА ЛОКАЛЬНО-СВОБОДНОЙ ГРУППЫ

Введение

В работе описана *граница Пуассона–Фюрстенберга локально-свободной группы* во внутренних терминах группы – как пространство некоторых бесконечных слов в алфавите образующих. Здесь мы используем понятия и план исследований, намеченный в работе [1], – изучение границ Пуассона–Фюрстенберга с помощью *бесконечных стабильных нормальных форм*. В рамках этого подхода задача описания границы Пуассона–Фюрстенберга сводится к задаче отыскания *полной* стабильной нормальной формы. Такой поиск подразумевает решение двух существенно различных подзадач: нахождение в группе стабильной нормальной формы и доказательство полноты некоторой стабильной нормальной формы. В локально-свободной группе стабильность рассматриваемой нами *естественной* нормальной формы почти очевидна (см. [2]), – сложность представляет доказательство ее полноты. Настоящая работа, содержащая это доказательство, появилась в результате многочисленных бесед автора с А. М. Вершиком, которым и была в свое время высказана гипотеза о полноте естественной нормальной формы в локально-свободной группе. Центральным результатом статьи является доказанная в §2 теорема 1 о достаточных условиях полноты стабильной нормальной формы. В доказательстве этой теоремы использован критерий полноты, известный как “Ray criterion” [3]. Теорема 1 позволяет описать границу Пуассона–Фюрстенберга не только локально-свободных, но и некоторых других групп – например, *групп, локально-свободных относительно графа* (см. §4).

Частично поддержано грантом РФФИ 02-01-00093 и грантом Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ номер НШ-2251.2003.1.

Определения и обозначения

Обозначения. Пусть G – конечно порожденная группа и $S = \{s_1, \ldots, s_m,\ s_1^{-1}, \ldots, s_m^{-1}\}$ – симметричное множество ее образующих. Обозначим через S^* множество всех конечных, а через S^∞ – множество всех бесконечных вправо слов в алфавите S. Через $\pi : S^* \to G$ обозначим отображение естественной проекции $w_1 w_2 \ldots w_k \mapsto w_1 \cdot w_2 \cdots w_k$. Через $|W|$ обозначается длина слова W, через $|g|$ – геодезическая длина элемента $g \in G$ в словарной метрике системы образующих S ($|g| := \min\{|W| : W \in S^*, \pi(W) = g\}$). Через $[W]_k$ будем обозначать начальное подслово длины $k \in \mathbb{Z}_+$ конечного или бесконечного слова W (при $k > |W|$ полагаем $[W]_k = W$).

Случайное блуждание. Пусть μ – равномерная мера на S и μ^∞ – соответствующая бернуллиевская мера на множестве S^∞. *Правым случайным блужданием на группе G, определяемым мерой μ*, называется цепь Маркова с пространством состояний G, переходной вероятностью $P(x, y) = \mu(x^{-1}y)$ и начальным состоянием в единице группы. *Траекториями блуждания* являются при этом последовательности вида

$$\tau = \{\tau_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}, \quad \text{где} \quad \tau_0 = e,\ \tau_i^{-1}\tau_{i+1} \in S.$$

Естественную биекцию между множеством S^∞ и пространством $\Omega \subset G^\infty$ всех траекторий блуждания обозначим через $\overline{\pi}$:

$$\overline{\pi}(W) := \{\pi([W]_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}, \quad \text{где} \quad W \in S^\infty.$$

Биекция $\overline{\pi}$ переносит меру μ^∞ на Ω.

Граница Пуассона–Фюрстенберга. Разобъем Ω на классы эквивалентности, положив $\tau \sim \tau'$ в случае, если найдется такое целое k, что $\tau_n = \tau'_{n+k}$ при всех достаточно больших n. *Граница Пуассона–Фюрстенберга* (Γ, ν) (или, что то же самое, *максимальная граница*) пары (G, μ) есть по определению факторпространство пространства (Ω, μ^∞) по μ^∞-измеримой оболочке описанного отношения эквивалентности. Мера ν – образ меры μ^∞ на Γ – называется гармонической мерой. Подробнее см. [1, 3] и указанную там литературу.

Нормальная форма. *Нормальной формой* в группе G (в системе образующих S) называют отображение $\rho : G \to S^*$, такое, что

$\pi\rho = \mathrm{id}_G$. Нормальную форму называют *геодезической*, если для каждого элемента $g \in G$ выполняется равенство $|\rho(g)| = |g|$.

Бесконечное слово $W \in S^\infty$ будем называть *нормальной формой бесконечного слова* $X \in S^\infty$ (а также *нормальной формой траектории* $\tau := \overline{\pi}(X)$), если для любого $k \in \mathbb{N}$ слова $[\rho(\tau_n)]_k$ совпадают со словом $[W]_k$ при всех достаточно больших n (пишем $W = \overline{\rho}(\tau)$). Пространство всех слов в S^∞, являющихся нормальными формами, обозначим через Λ_ρ.

Стабильность и полнота нормальной формы. Говорят, что нормальная форма ρ является *μ-стабильной слева* (или просто *стабильна*), если для μ^∞-п.в. траектории τ определена нормальная форма $\overline{\rho}(\tau)$.

Пусть нормальная форма ρ стабильна. Тогда на пространстве траекторий Ω определено (п. в.) отображение

$$\overline{\rho} : \Omega \to \Lambda_\rho.$$

Образ меры μ^∞ при отображении $\overline{\rho}$ обозначим через λ. Пространство (Λ_ρ, λ) изоморфно факторизации пространства (Ω, μ^∞), склеивающей траектории, нормальные формы которых совпадают. Нетрудно видеть, что такое отношение эквивалентности на Ω является пределом последовательности μ^∞-измеримых разбиений.

Далее заметим, что нормальные формы $\sim$-эквивалентных (см. п. "Граница Пуассона-Фюрстенберга") траекторий, очевидно, совпадают. Следовательно, пространство (Λ_ρ, λ) является фактор-пространством границы Пуассона-Фюрстенберга (Γ, ν) (такие пространства носят название *μ-границ*). Если пространство (Λ_ρ, λ) является максимальной μ-границей, т. е. является реализацией границы Пуассона–Фюрстенберга, нормальная форма ρ называется *полной*.

Двусторонняя стабильность. *Левым случайным блужданием* на группе G, определяемым мерой μ, называют цепь Маркова с переходной вероятностью $P(x, y) = \mu(yx^{-1})$. (Заметим, что в настоящей статье мы всюду рассматриваем симметричную меру μ: $\mu = \hat{\mu}$, где $\hat{\mu}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(x^{-1})$.) Траекториями левого блуждания являются последовательности вида $\tau = \{\tau_n\}_{\mathbb{Z}_+}$, $\tau_0 = e$, $\tau_{i+1}\tau_i^{-1} \in S$. Существует естественная биекция между множеством $S_{-\infty}$ всех бесконечных влево слов в алфавите S и пространством всех траекторий левого блуждания. Говорят, что нормальная форма ρ

μ-стабильна справа, если для всякого $k \in \mathbb{N}$ и μ^∞-п.в. траектории левого блуждания τ конечные подслова длины k слов $\rho(\tau_n)$ совпадают при всех достаточно больших n.

Будем называть нормальную форму *двусторонне μ-стабильной*, если она μ-стабильна слева и μ-стабильна справа.

Марковский язык и нормальные формы. Язык $L \subset S^*$ в алфавите S называют *марковским*, если найдется матрица $M = (m_{a,b})_{a,b\in S}$ $(m_{a,b} = 0 \vee 1)$, такая, что

$$w_1 w_2 \cdots w_k \in L \iff \forall j \in \{1 \dots k-1\} : m_{w_j w_{j+1}} = 1$$

(пустое слово и все однобуквенные слова принадлежат марковскому языку).

Матрицу M и соответствующий марковский язык называют *эргодичными*, если некоторая степень матрицы M не содержит нулей. Иными словами, марковский язык эргодичен, если для любой пары $a, b \in S$ в нем найдется слово, первая буква которого – a, а последняя – b.

Будем называть нормальную форму $\rho : G \to S^*$ (*эргодичной*) *марковской*, если множество $\rho(G)$ всех слов этой формы совпадает с множеством всех слов некоторого (эргодичного) марковского языка.

Всюду далее, рассматривая марковскую нормальную форму $\rho : G \to S^*$, через L_M будем обозначать соответствующий марковский язык:

$$L_M := \rho(G) \subset S^*.$$

Слова марковского языка L_M будем называть *допустимыми* словами. Через L_M^∞ будем обозначать множество *бесконечных допустимых* слов:

$$L_M^\infty := \{W \in S^\infty \mid \forall j \in \mathbb{N} : [W]_k \in L_M\}.$$

Реализация границы Пуассона–Фюрстенберга с помощью марковского языка. Пусть $\rho : G \to S^*$ – стабильная марковская нормальная форма, $L_M = \rho(G)$ – соответствующий марковский язык. Из данных выше определений прямо следует, что множество нормальных форм Λ_ρ совпадает с множеством L_M^∞ всех бесконечных допустимых слов:

$$L_M^\infty = \Lambda_\rho.$$

Таким образом, если марковская стабильная нормальная форма в группе полна, то соответствующее множество всех бесконечных допустимых слов (с образом меры μ^∞ при отображении $\overline{\rho}$) есть реализация границы Пуассона–Фюрстенберга данной группы.

Заметим, что наличие марковской полной стабильной нормальной формы, вообще говоря, не означает, что гармоническая мера есть марковская мера на множестве L_M^∞.

2. Теорема о полноте

Теорема 1. *Пусть G – конечно порожденная группа, S – конечное симметричное множество ее образующих, μ – равномерная мера на S и $\rho : G \to S^*$ – нормальная форма.*

Если ρ является

– двусторонне μ-стабильной,

– эргодичной марковской,

– геодезической,

то ρ – полная нормальная форма.

Доказательство теоремы 1.

Обозначение. Пусть ρ – стабильная нормальная форма. Определим отображение

$$\chi : S^* \cup S^\infty \to S^* \cup S^\infty,$$

положив

$$\chi|_{S^*} := \rho\pi; \qquad \chi|_{S^\infty} := \overline{\rho\pi}.$$

(На S^∞ отображение определено почти всюду.) Очевидно, χ переводит всякое слово, находящееся в нормальной форме, в себя.

Лемма 1. *Пусть $\rho : G \to S^*$ – стабильная марковская нормальная форма, пусть $V \in S^*$, $W \in S^* \cup S^\infty$, и пусть нормальные формы $\chi(W)$ и $\chi(VW)$ определены. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$\chi(VW) = \chi(V)\chi(W)$.*
2. *Слово $\chi(V)\chi(W)$ является допустимым.*
3. *Слово $\chi(V)$ является началом слова $\chi(VW)$.*

Доказательство. Справедливость условия (1) прямо влечет справедливость (2) и (3). Покажем, что и (2), и (3) влекут (1).

(2)⇒(1): Пусть $W \in S^*$. Из определения χ следует, что, каковы бы ни были слова V и W, имеет место следующее равенство: $\chi(VW) = \chi(\chi(V)\chi(W))$. Но если $\chi(V)\chi(W)$ – допустимое, то $\chi(\chi(V)\chi(W)) = \chi(V)\chi(W)$ и, значит, условие 1 справедливо.

Далее, пусть $W \in S^\infty$. Так как $\chi(W)$ определено, т. е. последовательность слов $\chi([W]_i)$ сходится, найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что при $i > N$ первые буквы слов $\chi(W)$ и $\chi([W]_i)$ совпадают. Допустимость композиции допустимых слов определяется, очевидно, их крайними буквами. Поэтому из допустимости слова $\chi(V)\chi(W)$ следует допустимость $\chi(V)\chi([W]_i)$ (при $i > N$). Отсюда, в силу рассмотренного случая конечных слов, $\chi(V)\chi([W]_i) = \chi(V[W]_i)$. Перейдем к пределу.

(3)⇒(1): Пусть $W \in S^*$. По условию $\chi(VW) = \chi(V)U$, где U – некоторое допустимое слово. Из равенства $\chi(VW) = \chi(V)U$ очевидно следует равенство $\pi(W) = \pi(U)$. Отсюда $\chi(W) = \chi(U)$. Но $\chi(U) = U$, так как U – допустимое. Итак, $\chi(VW) = \chi(V)U = \chi(V)\chi(W)$.

Далее, пусть $W \in S^\infty$. По условию последовательность $\{\chi(V[W]_i)\}_{\mathbb{N}}$ сходится к слову, начинающемуся с $\chi(V)$, и, значит, при всех достаточно больших i слова $\chi(V[W]_i)$ начинаются словом $\chi(V)$. Следовательно, „при всех достаточно больших i“ имеет место равенство $\chi(V)\chi([W]_i) = \chi(V[W]_i)$. Перейдем к пределу.

Обозначение. Введем обозначение

$$\chi_k(\cdot) := [\chi(\cdot)]_k$$

Предложение 1. *Пусть нормальная форма $\rho : G \to S^*$ является стабильной и эргодичной марковской. Тогда для каждого элемента $a \in S$ выполняются следующие неравенства:*

$$1) \quad \mu^\infty\{X \in S^\infty \mid \chi_1(X) = a\} > 0.$$

$$2) \quad \mu^\infty\{X \in S^\infty \mid \forall k \in \mathbb{N}: \ \chi_1([X]_k) = a\} > 0.$$

Доказательство. 1. Ясно, что для некоторого элемента $b \in S$ множество $B := \{X \in S^\infty \mid \chi_1(X) = b\}$ имеет ненулевую меру. В силу эргодичности марковского языка $L_M = \operatorname{im}(\rho)$ найдется такое слово $W \in L_M$, что $aWb \in L_M$. При этом в силу леммы 1 для п. в. слова $X \in B$ выполняется равенство $\chi(aWX) = aW\chi(X)$, то есть $\chi_1(aWX) = a$. Остается заметить, что $\mu^\infty(\{aWX \mid X \in B\}) = \mu^\infty(B)/|S|^{|aW|} > 0$.

2. Введем обозначение $A_r := \{X \in S^\infty \mid \forall k \geqslant r\ \chi_1([X]_k) = a\}$. Нужно показать, что $\mu^\infty(A_1) > 0$. В силу п. 1 $\mu^\infty(\bigcup_1^\infty A_i) > 0$. Следовательно, найдется такое $t \in \mathbb{N}$, что $\mu^\infty(A_t) > 0$. Ясно, что при этом найдется такое $W \in S^t$, что множество $A_{t,W} := \{X \in A_t \mid [X]_t = W\}$ имеет ненулевую меру. Обозначим слово $\chi(W)$ через V и рассмотрим отображение $q : A_{t,W} \to S^\infty$, переводящее слово $WX \in A_{t,W}$ в слово VX. Покажем, что $q(A_{t,W}) \subset A_1$, т. е. что для всякого натурального k слово $\chi_1([q(WX)]_k)$ ($\stackrel{\text{def}}{=} \chi_1([VX]_k)$) начинается с буквы a. Действительно, пусть $WX \in A_{t,W}$. При $k \leqslant |V|$ имеем:

$$\chi_1([VX]_k) = \chi_1([V]_k) = [[V]_k]_1 = [V]_1 = \chi_1(W) = \chi_1([WX]_{t=|W|}) = a.$$

При $k = |V| + r$ $(r > 0)$ имеем:

$$\chi_1([VX]_k) = \chi_1(V[X]_r) = \chi_1(W[X]_r) = \chi_1([WX]_{t+r}) = a.$$

Остается заметить, что $\mu^\infty(q(A_{t,W})) = \mu^\infty(A_{t,W})/(|S|^{|V|-t}) > 0$.

Определение. *Для траектории правого случайного блуждания $\tau = \{\tau_n\}$ определим функцию $\phi_\tau : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ следующим образом:*

$$\phi_\tau(n) := |\rho(\tau_n)| - \max\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid \forall j \in \mathbb{N} : \quad [\rho(\tau_{n+j})]_k = [\rho(\tau_n)]_k\}.$$

Предложение 2. *Пусть нормальная форма $\rho : G \to S^*$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда для п. в. траектории правого блуждания τ верно:*

$$\phi_\tau(n) = o(n), \quad n \to +\infty.$$

Доказательство. 0. Обозначим через $S_{-\infty}^{+\infty}$ множество всех бесконечных в обе стороны слов в алфавите S, а через $\mu_{-\infty}^{+\infty}$ – соответствующую бернуллиевскую меру на $S_{-\infty}^{+\infty}$. Для слова $X = \dots x_{-1}x_0x_1x_2\dots \in S_{-\infty}^{+\infty}$ и $i \leqslant j \in \mathbb{Z}$ через $[X]_{i,j}$ будем обозначать слово $x_ix_{i+1}\dots x_j$, а через X^+ – слово $x_1x_2\dots \in S^{+\infty}$.

Ясно, что для доказательства предложения достаточно показать, что для $\mu_{-\infty}^{+\infty}$-п.в. слова $X \in S_{-\infty}^{+\infty}$ траектория $\tau = \overline{\pi}(X^+)$ обладает требуемым свойством.

1. Введем обозначение

$$S^{\leftrightsquigarrow} := \{X \in S_{-\infty}^{+\infty} \mid \forall i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}_+ \text{ верно: } \chi([X]_{-j,i}) \\ = \chi([X]_{-j,0})\chi([X]_{1,i})\}.$$

Из предложения 1 (и его эквивалента для левых блужданий) в силу двусторонней стабильности нормальной формы следует, что

$$\mu_{-\infty}^{+\infty}(S^{\leftrightsquigarrow}) > 0.$$

2. Обозначим через T преобразование сдвига на $S_{-\infty}^{+\infty}$:

$$T(X) = Y, \quad y_i = x_{i+1}.$$

Введем обозначение

$$H_X(n) := \#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid T^i(X) \in S^{\leftrightsquigarrow}\}.$$

Как известно, сдвиг T эргодичен по отношению к мере $\mu_{-\infty}^{+\infty}$, и по эргодической теореме для п. в. $X \in S_{-\infty}^{+\infty}$ верно:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_X(n)}{n} = \mu_{-\infty}^{+\infty}(S^{\leftrightsquigarrow}) > 0.$$

3. Пусть $X \in S_{-\infty}^{+\infty}$, $\tau = \overline{\pi}(X^+)$. Покажем, что при $i \in \mathbb{N}$ выполняется импликация

$$T^i(X) \in S^{\leftrightsquigarrow} \quad \Longrightarrow \quad \phi_\tau(i) = 0.$$

Действительно: если $T^i(X) \in S^{\leftrightsquigarrow}$, то, по определению $S^{\leftrightsquigarrow}$, для любого $j > i$ выполняется равенство $\chi([X]_{1,j}) = \chi([X]_{1,i})$ $\chi([X]_{i+1,j})$. При этом в силу леммы 1 слово $\chi([X]_{1,i}) = \rho(\tau_i)$ является началом слова $\chi([X]_{1,j}) = \rho(\tau_j)$, и $\phi_\tau(i) = 0$ по определению.

4. Заметим, что из геодезичности нормальной формы и определения ϕ прямо следует справедливость следующего неравенства:

$$\phi_\tau(i+1) \leqslant \phi_\tau(i) + 1.$$

5. Пусть $X \in S_{-\infty}^{+\infty}$. Предположим, что для траектории $\tau = \overline{\pi}(X^+)$ условие $\phi_\tau(n) = o(n)$ не выполняется, то есть существует такое $c > 0$, что для сколь угодно большого N найдется такое $k > N$, что $\phi_\tau(k) > ck$. Если $\phi_\tau(k) > ck$, то, в силу п. 4 доказательства, для каждого $i \in \{k-[ck], k-[ck]+1, \dots, k\}$ справедливо неравенство $\phi_\tau(i) > 0$, и, следовательно, $T^i(X) \notin S^{\leftrightsquigarrow}$ (см п. 3). Следовательно, $H_X(k) = H_X(k-[ck])$ и

$$\left(\frac{H_X(k)}{k}\right) \Big/ \left(\frac{H_X(k-[ck]-1)}{k-[ck]-1}\right) = \frac{k-[ck]-1}{k} < 1-c.$$

Отсюда заключаем, что последовательность $\frac{H_X(n)}{n}$ либо не сходится, либо сходится к нулю, а по п. 2 мера множества таких последовательностей равна нулю.

Снос блуждания. Как известно (см., например, [1] и указанную там литературу), для случайного блуждания (G,μ) найдется такое число ℓ, называемое *сносом* блуждания, что для п. в. траектории τ верно:

$$||\tau_n| - \ell n| = o(n).$$

Определим для траектории τ функцию $\psi_\tau : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$, положив

$$\psi_\tau(n) := ||\tau_n| - \ell n|.$$

Таким образом, для п. в. траектории τ верно:

$$\psi_\tau(n) = o(n).$$

Определение. *Определим для стабильной нормальной формы ρ семейство отображений $\pi_n : \Lambda_\rho \to G$ следующим образом:*

$$\pi_n(\overline{\rho}\tau) := \pi([\overline{\rho}\tau]_{[\ell n]}).$$

(Здесь ℓ – снос рассматриваемого блуждания, $[\ell n]$ – целая часть числа ℓn.)

Предложение 3. *Пусть нормальная форма $\rho : G \to S^*$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда для п. в. траектории τ верно:*

$$|\pi_n(\overline{\rho}\tau)\tau_n^{-1}| = o(n), \quad n \to +\infty.$$

Доказательство. По определению функции ϕ_τ, для всякого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$[\overline{\rho}\tau]_{|\tau_n| - \phi_\tau(n)} = [\rho\tau_n]_{|\tau_n| - \phi_\tau(n)}.$$

Для фиксированной траектории τ рассмотрим последовательность элементов группы

$$g_n := \pi\big([\overline{\rho}\tau]_{|\tau_n| - \phi_\tau(n)}\big) \overset{\mathrm{def}(\phi_\tau)}{=} \pi\big([\rho\tau_n]_{|\tau_n| - \phi_\tau(n)}\big).$$

Так как точка g_n лежит на геодезическом отрезке, соединяющем точки e и τ_n, то

$$|g_n\tau_n^{-1}| = |\tau_n| - |g_n| = \phi_\tau(n).$$

Поскольку точки g_n и $\pi_n(\overline{\rho}\tau)$ лежат на одном геодезическом луче, выходящем из точки e, то

$$|\pi_n(\overline{\rho}\tau)g_n^{-1}| = ||g_n| - |\pi_n(\overline{\rho}\tau)|| = ||g_n| - [\ell n]|.$$

Заметим, что

$$||g_n| - [\ell n]| \leqslant ||g_n| - |\tau_n|| + ||\tau_n| - [\ell n]| \leqslant \phi_\tau(n) + \psi_\tau(n) + 1.$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством треугольника для точек τ_n, $\pi_n(\overline{\rho}\tau)$ и g_n, заключаем, что

$$|\pi_n(\overline{\rho}\tau)\tau_n^{-1}| \leqslant |\pi_n(\overline{\rho}\tau)g_n^{-1}| + |g_n\tau_n^{-1}| \leqslant \psi_\tau(n) + \phi_\tau(n) + 1 + \phi_\tau(n) = o(n).$$

Справедливость теоремы 1 следует из предложения 3 и следующего критерия максимальности границы, известного как “Ray criterion” (в роли (B,λ) выступает пространство (Λ_ρ, λ), в роли **bnd** – отображение $\overline{\rho}$):

Критерий (Кайманович [3]**).** *Пусть* (B,λ) *–* μ*-граница пары* (G,μ)*,* $\mathbf{bnd} : \Omega \to B$ *– соответствующее отображение, и пусть* $\pi_n : B \to G$ *– набор отображений, такой, что для п. в. траектории* τ *верно:*

$$|\pi_n(\mathbf{bnd}\tau)\tau_n^{-1}| = o(n), \quad n \to +\infty.$$

Тогда граница (B,λ) *максимальна, то есть является границей Пуассона–Фюрстенберга.*

3. Локально-свободная группа

Понятие локально-свободной группы вводится в работах [1, 2]. Локально-свободной группой $\mathcal{LF}$ с n (>1) образующими называют группу

$$\mathcal{LF} := \langle s_1, \dots, s_n \mid s_i s_j = s_j s_i, \ |i-j| \geqslant 2\rangle.$$

Через $S := \{s_1, \dots, s_n, s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1}\}$ далее будем обозначать симметричное множество образующих группы $\mathcal{LF}$.

Естественная нормальная форма. Определим матрицу $M = (m_{a,b})_{a,b\in S}$, положив

$$m_{s_i^\delta, s_j^\epsilon} = 1, \quad \text{если} \quad i-1 \leqslant j \quad \text{и} \quad s_i^\delta \neq s_j^{-\epsilon},$$

и

$$m_{s_i^\delta, s_j^\epsilon} = 0 \quad \text{в противном случае.}$$

Пусть $L_M \subset S^*$ – марковский язык, задаваемый матрицей M, т. е.

$$w_1 w_2 \cdots w_k \in L_M \quad \Longleftrightarrow \quad \forall j \in \{1 \dots k-1\} : m_{w_j w_{j+1}} = 1$$

(пустое слово и все однобуквенные слова принадлежат L_M).

Предложение 4. *Каждый элемент локально-свободной группы представлен единственным словом языка L_M. Иными словами, отображение*

$$\rho := (\pi|_{L_M})^{-1} : \mathcal{LF} \to L_M$$

(здесь $\pi|_{L_M}$ – ограничение естественной проекции π на множество L_M) корректно определено и является нормальной формой.

Определение. *Будем называть отображение $\rho := (\pi|_{L_M})^{-1}$ естественной нормальной формой для $\mathcal{LF}$.*

Предложение 5. *Естественная нормальная форма в локально-свободной группе является*

1) *эргодичной марковской.*
2) *геодезической.*
3) *двусторонне стабильной.*

Предложение 5 и теорема 1 влекут

Следствие 1. *В локально-свободной группе естественная нормальная форма является полной. Таким образом, множество всех бесконечных слов естественной нормальной формы (с образом меры μ^∞ при отображении $\overline{\rho}$) есть реализация границы Пуассона–Фюрстенберга локально-свободной группы.*

Остаток этого параграфа посвящен доказательству предложений 4 и 5.

Определение. *Назовем операцией нормализации отображение*

$$\mathfrak{n} : S^* \to S^*,$$

определенное следующим образом: для каждого $W \in L_M$ *положим*

$$\mathfrak{n}(W) = W; \tag{$\mathfrak{n}$.0}$$

для слова $W = w_1 w_2 \cdots w_k \in S^* \setminus L_M$ *пусть* $j = \min\{i \in 1, \dots, k-1 \mid m_{w_i, w_{i+1}} = 0\}$ *и* $w_j w_{j+1} = s_p^\delta s_q^\epsilon$. *Ясно, что при этом*

либо $w_j = w_{j+1}^{-1}$ *– в этом случае положим*

$$\mathfrak{n}(W) = w_1 \cdots w_{j-1} w_{j+2} \cdots w_k; \tag{$\mathfrak{n}$.1}$$

либо $p > q$ *– в этом случае положим*

$$\mathfrak{n}(W) = w_1 \cdots w_{j-1} w_{j+1} w_j w_{j+2} \cdots w_k. \tag{$\mathfrak{n}$.2}$$

Из данного определения следует, что для каждого слова $W \in S^*$ *верны соотношения*

$$\pi(\mathfrak{n}(W)) = \pi(W); \quad |\mathfrak{n}(W)| \leqslant |W|.$$

Лемма 2. *Для каждого* $W \in S^*$ *найдется число* $r = r(W) \in \mathbb{N}$, *такое, что* $\mathfrak{n}^r(W) \in L_M$.

Доказательство. Введем на S^* отношение частичного порядка $\prec$, определяемое следующим образом. Пусть $X, Y \in S^*$. При $|X| < |Y|$ положим $X \prec Y$. При $|X| = |Y| = k$ и $X = s_{p_1}^{\delta_1} \dots s_{p_k}^{\delta_k}$, $Y = s_{q_1}^{\epsilon_1} \dots s_{q_k}^{\epsilon_k}$ положим $X \prec Y$, если для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$ выполняется $p_j < q_j$ и $p_i = q_i$ для каждого $i < j$.

Очевидно, для данного слова W существует лишь конечное число элементов S^*, меньших $(\prec)$ W. Кроме того, из определений ясно, что для каждого $V \notin L_M$ выполняется неравенство $\mathfrak{n}(V) \prec V$. Следовательно, найдется такое $r \in \mathbb{N}$, что $\mathfrak{n}^{r+1}(W) = \mathfrak{n}^r(W)$. Последнее же выполняется лишь в случае, когда $\mathfrak{n}^r(W) \in L_M$.

Определение. *В силу леммы 2 корректно определено отображение*

$$\tilde{\chi} : S^* \to L_M, \quad \text{где} \quad \tilde{\chi}(W) := \mathfrak{n}^{r(W)}(W).$$

Из данного определения следует, что для каждого слова $W \in S^*$ выполняются соотношения

$$\pi(\tilde{\chi}(W)) = \pi(W); \quad |\tilde{\chi}(W)| \leqslant |W|.$$

Определение. *Будем говорить, что слово* $V = v_1 \dots v_k$ *пропускает образующую* $w \in S$*, если для каждого* $i \in \{1, \dots, k\}$ *выполняются условия* $m_{v_i,w} = 0$ *и* $v_i \neq w^{-1}$. *(Таким образом, если слово* $V \in L_M$ *пропускает* w*, то* $\tilde{\chi}(Vw) = wV$.*)*

Лемма 3. *Пусть* $W \in L_M$, $w \in S$. *Тогда верно в точности одно из двух следующих утверждений:*

1. $W = UV$, *где* V *пропускает* w *и* $Uw \in L_M$, *при этом*

$$\tilde{\chi}(Ww) = UwV.$$

2. $W = Uw^{-1}V$, *где* V *пропускает* w, *при этом*

$$\tilde{\chi}(Ww) = UV.$$

Доказательство. Прямо следует из определений.

Доказательство предложения 4. Достаточно показать, что отображение $\pi|_{L_M} : L_M \to \mathcal{LF}$ является биекцией.

1. Сюръективность. Рассмотрим произвольный элемент $g \in \mathcal{LF}$ и слово $W \in \pi^{-1}(g)$. Из определения $\tilde{\chi}$ следует, что $\tilde{\chi}(W) \in L_M$. При этом, очевидно, $\pi|_{L_M}(\tilde{\chi}(W)) = \pi(W) = g$.

2. Инъективность. Опираясь на лемму 3, несложно показать, что для произвольных $W \in L_M$ и $w \in S$ выполняется равенство

$$\tilde{\chi}(Www^{-1}) = W,$$

а для всяких коммутирующих элементов $v, u \in S$ выполняется равенство

$$\tilde{\chi}(Wuv) = \tilde{\chi}(Wvu).$$

Отсюда следует, что для любых $U, V \in S^*$ и $w \in S$ выполняется равенство

$$\tilde{\chi}(UV) = \tilde{\chi}(Uww^{-1}V),$$

а для всяких коммутирующих элементов $v, u \in S$ выполняется равенство

$$\tilde{\chi}(UuvV) = \tilde{\chi}(UvuV).$$

Отсюда заключаем, что для любых $X, Y \in S^*$ при $\pi(X) = \pi(Y)$ верно $\tilde{\chi}(X) = \tilde{\chi}(Y)$. Таким образом, если $X, Y \in L_M$ и $\pi(X) = \pi(Y)$, то $X = \tilde{\chi}(X) = \tilde{\chi}(Y) = Y$. А это и означает, что $\pi|_{L_M}$ – инъективное отображение.

Замечание. Из проведенного доказательства следует, что

$$\tilde{\chi} = \rho\pi = \chi.$$

То есть отображение $\tilde{\chi}$, определенное в настоящем параграфе, совпадает с отображением χ (см. §2). Далее вместо $\tilde{\chi}$ пишем χ.

Доказательство предложения 5. 1. Прямо следует из определения.

2. Пусть $g \in \mathcal{LF}$, и пусть $W \in \pi^{-1}g$ – такое слово, что $|W| = |g|$. Из определения χ следует, что $|\chi(W)| \leqslant |W|$. Вместе с тем, $\rho(g) = \chi(W)$. Следовательно, $|\rho(g)| = |\chi(W)| = |g|$.

3. Докажем стабильность слева. (Доказательство стабильности справа проводится аналогично.)

3.0. Рассмотрим набор $\{\mathcal{F}_{(i)}\}_{i\in\{1,\dots,n-1\}}$, где $\mathcal{F}_{(i)} := \langle s_i, s_{i+1} \mid \rangle$ – свободная группа с двумя образующими, являющаяся фактор-группой $\mathcal{LF}$ по нормальной подгруппе, порожденной множеством $\{s_1, \dots, s_n\} \setminus \{s_i, s_{i+1}\}$. Через $p_i : \mathcal{LF} \to \mathcal{F}_{(i)}$ обозначим естественную проекцию. Через $\rho_i : \mathcal{F}_{(i)} \to \{s_i, s_i^{-1}, s_{i+1}, s_{i+1}^{-1}\}^*$ будем обозначать каноническую нормальную форму в свободной группе $\mathcal{F}_{(i)}$.

3.1. Ясно, что, каковы бы ни были $g \in \mathcal{LF}$ и $W \in \pi^{-1}(g)$, слово $\rho_i(p_i g)$ получается удалением из W всех букв, входящих в множество $S \setminus \{s_i, s_i^{-1}, s_{i+1}, s_{i+1}^{-1}\}$ и последующей редукцией. Отсюда следует, что количество вхождений букв $s_i, s_i^{-1}, s_{i+1}, s_{i+1}^{-1}$ в слово W – не менее $|p_i(g)|$; в частности, $|W| \geqslant |p_i(g)|$. Более того, если $W = UV$, где V пропускает какую-то из букв $s_i, s_i^{-1}, s_{i+1}, s_{i+1}^{-1}$, то $|U| \geqslant |p_i(g)|$, поскольку буквы $s_i, s_i^{-1}, s_{i+1}, s_{i+1}^{-1}$ не входят в V по определению (пропускаемости).

3.2. Применив рассуждение п. 3.1 к случаям, описанным в формулировке леммы 3, получаем, что для произвольных $g \in \mathcal{LF}$ и $i \in \{1, \dots, n-1\}$ выполняется равенство

$$[\rho(gs_i^{\pm 1})]_{|p_i(g)|-1} = [\rho(g)]_{|p_i(g)|-1}.$$

Аналогичным способом выводится равенство $[\rho(gs_n^{\pm 1})]_{|p_{n-1}(g)|-1} = [\rho(g)]_{|p_{n-1}(g)|-1}$. Отсюда следует, что для произвольных $g \in \mathcal{LF}$ и $w \in S$ выполняется равенство

$$[\rho(gw)]_{d(g)} = [\rho(g)]_{d(g)}, \qquad (*)$$

где $d(g) := \min\{|p_i(g)| - 1\}_{1,\dots,n-1}$.

3.3. Обозначим через μ_i образ меры μ при проекции p_i. (Таким образом, $\mu_i(s_i) = \mu_i(s_{i+1}) = \mu_i(s_i^{-1}) = \mu_i(s_{i+1}^{-1}) = 1/(2n)$, $\mu_i(e) = 1 - 2/n$.) Каждая пара $(\mathcal{F}_{(i)}, \mu_i)$ определяет невырожденное случайное блуждание – блуждание $(\mathcal{LF}, \mu)$ "проецируется" на блуждания $(\mathcal{F}_{(i)}, \mu_i)$. Как известно, блуждание в свободной группе по мере μ_i невозвратно (см., например, [4]), т. е. для п. в. (по мере μ_i^∞) траектории блуждания $\eta = \{\eta_j\}$ в группе $\mathcal{F}_{(i)}$ выполняется

$$|\eta_j| \to \infty \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Отсюда в свою очередь следует, что для п. в. (по мере μ^∞) траектории блуждания $\tau = \{\tau_j\}$ в группе $\mathcal{LF}$ выполняется

$$d(\tau_j) \to \infty \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Последнее, вкупе с равенством $(*)$, очевидно, означает, что нормальная форма ρ является стабильной.

4. Группы, локально-свободные относительно графа

Теорема 1 позволяет описать границу Пуассона–Фюрстенберга в общем случае *группы, локально-свободной относительно графа* (см. [5]).

Определение. *Пусть Y – граф с n вершинами и R – матрица инцидентности графа Y. Напомним, что R – симметричная $n \times n$ матрица из нулей и единиц; на пересечении i-го столбца и j-й строки стоит единица, если вершины графа i, j соединены ребром, и нуль – в противном случае (на диагонали стоят нули). Группой, локально-свободной относительно графа Y (группой ЛСОГ) будем называть группу*

$$\mathcal{F}_Y := \langle s_1, \dots, s_n \mid s_i s_j = s_j s_i,\ R(i,j) = 0 \rangle.$$

Группу $\mathcal{F}_Y$ будем называть неприводимой, если граф Y связен (т. е. матрица R эргодична).

Нетрудно видеть, что всякая группа ЛСОГ является прямой суммой неприводимых групп ЛСОГ. Поэтому задача описания границы Пуассона–Фюрстенберга групп ЛСОГ сводится к задаче описания границы Пуассона–Фюрстенберга неприводимой группы ЛСОГ.

Система образующих слоев. Назовем подмножество $B \subset S = \{s_1, \dots, s_m, s_1^{-1}, \dots, s_m^{-1}\}$ *слоем*, если B состоит из попарно коммутирующих элементов и, кроме того, не содержит пар взаимно обратных элементов (w и w^{-1}). В частности, каждый элемент S является слоем. Будем отождествлять слой с элементом группы, являющимся произведением всех элементов данного слоя. Множество всевозможных непустых слоев обозначим через $\mathcal{S}$. Очевидно, $\mathcal{S}$ является симметричной системой образующих группы $\mathcal{F}_Y$.

Марковский язык. Определим матрицу $\mathcal{M} = (m_{A,B})_{A,B \in \mathcal{S}}$, положив

$$m_{A,B} = 1, \quad \text{если} \quad \forall s_j^{\epsilon} \in B \ \exists s_i^{\delta} \in A : (R(i,j) = 1) \vee (s_j^{\epsilon} = s_i^{\delta}),$$

и

$$m_{A,B} = 0 \quad \text{в противном случае.}$$

Предложение 6. *Пусть $\mathcal{F}_Y$ – неприводимая группа, локально-свободная относительно графа Y, $\mathcal{S}$ – ее система образующих слоев, $\mathcal{M}$ – описанная выше матрица, $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ – марковский язык, задаваемый матрицей $\mathcal{M}$. Тогда отображение*

$$\varrho := (\pi|_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}})^{-1} : \mathcal{F}_Y \to \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$$

корректно определено и является нормальной формой в $\mathcal{F}_Y$.

Нормальная форма ϱ является эргодичной марковской, геодезической и двусторонне стабильной по отношению к равномерной мере на множестве $\mathcal{S}$.

Таким образом, в силу теоремы 1 нормальная форма ϱ является полной и множество всех задаваемых матрицей $\mathcal{M}$ бесконечных допустимых слов, снабженное соответствующей гармонической мерой, есть реализация границы Пуассона–Фюрстенберга группы $\mathcal{F}_Y$.

Доказательство предложения 6 может быть проведено по схеме вышеприведенных доказательств предложений 4 и 5. Так, для группы $\mathcal{F}_Y$ и ее системы образующих слоев естественным образом определяется операция нормализации (для каждой пары слоев A, B найдется либо такой (возможно, пустой) слой C, что $AB = C$; либо такая пара слоев C, D, что $AB = CD$ и $m_{C,D} = 1$).

Рутинная проверка, использующая операцию нормализации, показывает, что описанное в формулировке предложения 6 отображение ϱ является нормальной формой. Марковость и эргодичность этой формы прямо следует из определений, а для доказательства ее геодезичности достаточно снова обратиться к операции нормализации. Наконец, для доказательства двусторонней стабильности формы ϱ можно прибегнуть к приему, использованному в доказательстве двусторонней стабильности естественной нормальной формы в локально-свободной группе. Заметим, однако, что в данном случае доказательство стабильности справа не является калькой доказательства стабильности слева и требует проведения некоторых дополнительных рассуждений.

Литература

1. А. М. Вершик, *Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры.* — УМН **55**, вып. 4 (2000), 59–128.
2. A. Vershik, S. Nechaev, R. Bikbov, *Statistical properties of locally free groups with applications to braid groups and growth of random heaps.* — Comm. Math. Phys. **212**, no. 2 (2000), 469–501.
3. V. A. Kaimanovich, *The Poisson formula for groups with hyperbolic properties.* — Ann. Math. **152** (2000), 659–692.
4. Е. Б. Дынкин, М. Б. Малютов, *Случайное блуждание на группах с конечным числом образующих.* — ДАН СССР **173** (1961), 1042–1045.
5. P. Cartier, D. Foata, *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements.* — Lecture Notes in Math. **85** (1969).

Malyutin A. V. The Poisson–Furstenberg boundary of a locally free group.

Following the research plan outlined by A. M. Vershik in [1], we describe the Poisson–Furstenberg boundary of locally free groups in terms of infinite stable normal forms.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: malyutin@pdmi.ras.ru

Поступило 18 сентября 2003 г.