Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 301, 2003 г.

П. П. Никитин

РЕАЛИЗАЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ДВУСТРОЧЕЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ S_n В БЕСКВАДРАТНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФОРМАХ

1. Формулировки и определения

Представления симметрической группы изучаются достаточно давно (см., например, [1, 4, 2]), но их построение связано с привлечением некоторых специальных конструкций, таких как "модули Шпехта". Данная статья посвящена описанию более простой реализации представлений, отвечающих двустрочечным диаграммам. Автор благодарен А. М. Вершику за постановку задачи и многочисленные обсуждения.

Нам потребуются некоторые обозначения. Введем множество

$$\mathcal{F}_n^k = \left\{ \{i_1, \dots, i_k\} \mid 1 \leqslant i_j \leqslant n \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant k,\ i_p \neq i_q \text{ при } p \neq q \right\}$$

наборов из $k \leqslant n$ различных чисел (с учетом порядка) из промежутка от 1 до n. Для $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{F}_n^k$ и $j \in \{1, \dots, n\}$, $j \notin I$, положим $jI = \{i_1, \dots, i_k, j\} \in \mathcal{F}_n^{k+1}$. Для $\sigma \in S_k$ положим $\sigma * I = \{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}\}$; для $\sigma \in S_n$ положим $\sigma I = \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}$. Через x_I будем обозначать произведение $x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}$.

Пусть $A_{n,k}$ — векторное пространство *бесквадратных симметричных k-линейных форм* от n переменных, и пусть $A^0_{n,k}$ – подпространство пространства $A_{n,k}$, задающееся уравнениями вида "сумма по любому одномерному направлению равна нулю", т. е.

$$A_{n,k} = \Big\{ \sum_{I \in \mathcal{F}_n^k} c_I x_I \mid c_{\sigma * I} = c_I \text{ для любого } \sigma \in S_k \Big\}, \tag{1}$$

$$A^0_{n,k} = \Big\{ \sum c_I x_I \in A_{n,k} \mid \sum_{j \notin I'} c_{I'j} = 0 \text{ для любого } I' \in \mathcal{F}_n^{k-1} \Big\}. \tag{2}$$

Частично поддержано грантом РФФИ 02-01-00093 и грантом Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ номер НШ-2251.2003.1.

В пространстве $A_{n,k}$ имеется естественное действие симметрической группы S_n:

$$\sigma \cdot \sum_{I \in \mathcal{F}_n^k} c_I x_I = \sum_{I \in \mathcal{F}_n^k} c_{\sigma I} x_I, \quad \sigma \in S_n.$$

Подпространство $A^0_{n,k}$, очевидно, инвариантно относительно этого действия. Обозначим соответствующие представления группы S_n через $\pi_{n,k}$ и $\pi^0_{n,k}$. Будем обозначать модуль Шпехта, отвечающий диаграмме λ, через ν^λ.

Теорема 1.1.

$$\pi^0_{n,k} \cong \nu^{(n-k,k)}; \quad \pi_{n,k} \cong \sum_{\ell=0}^{k} \nu^{(n-\ell,\ell)}; \tag{3}$$

соответствующее разложение на ортогональные[1] *подпространства имеет вид*

$$A_{n,k} = \sum_{\ell=0}^{k} H_\ell, \quad H_0 = \Big\{ c \cdot \sum_{I \in \mathcal{F}_n^k} x_I \,|\, c \in \mathbb{C} \Big\}, \quad H_k = A^0_{n,k},$$

$$H_\ell = \Bigg\{ \sum_{I \in \mathcal{F}_n^{k-\ell}} \Bigg(x_I \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}_n^\ell,\ J \cap I = \emptyset} c_J x_J \Bigg) \Bigg| \sum_{j \notin J'} c_{J'j} = 0 \ \text{для любого}\ J' \in \mathcal{F}_n^{\ell-1} \Bigg\}. \tag{4}$$

Замечание. Для $A_{n,1}$ мы получим разложение натурального действия S_n в n-мерном пространстве на неприводимые компоненты:

$$A_{n,1} = H_0 + H_1;$$

$$H_0 = \{ c \cdot \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \,|\, c \in \mathbb{C} \}, \quad H_1 = \{ \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j x_j \,|\, \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j = 0 \}.$$

Для $A_{n,2}$ мы получим первое содержательное разложение на неприводимые компоненты, позволяющее создать представление

[1] Относительно инвариантного скалярного произведения $\langle \sum_I c_I x_I, \sum_I c'_I x_I \rangle = \sum_I c_I c'_I$.

об общем случае:

$$A_{n,2} = H_0 + H_1 + H_2; \quad H_0 = \{c \cdot \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_{ij} | \ \ c \in \mathbb{C}\},$$

$$H_1 = \{ \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(x_i \sum_{1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i} c_j x_j \right) | \sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j = 0\},$$

$$H_2 = \{ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} c_{ij} x_{ij} | \sum_{1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i} c_{ij} = 0 \text{ для любого } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Теорема 1.2.

$$\mathrm{Res}_{S_{n-1}} \pi^0_{n,k} \cong \pi^0_{n-1,k} + \pi^0_{n-1,k-1}, \quad n > 2k; \tag{5}$$

$$\mathrm{Res}_{S_{n-1}} \pi^0_{n,k} \cong \pi^0_{n-1,k-1}, \quad n = 2k. \tag{6}$$

Существуют изоморфизмы α^k_n и β^k_n, для которых соответствующее разложение пространства $A^0_{n,k}$ на ортогональные компоненты имеет вид

$$A^0_{n,k} = \alpha_{n,k}(A^0_{n-1,k}) \bigoplus \beta_{n,k}(A^0_{n-1,k-1}). \tag{7}$$

Разложение (5) следует, в силу (3), из соответствующего факта для модулей $\nu^{(n-k,k)}$, поэтому содержательная часть теоремы 1.2 – построение изоморфизмов.

Доказательство теоремы 1.1 опирается на следующее предложение.

Предложение 1.1. *Существуют биекции S_n-модулей ϕ^k_n и ψ^k_n, удовлетворяющие равенствам*

$$A_{n,k} = \psi^k_n(A_{n,k-1}) \bigoplus A^0_{n,k}, \quad A^0_{n,k} = \phi^k_n(\nu^{(n-k,k)}).$$

Изоморфизмы (3) следуют из предложения непосредственно, разложение (4) следует из определения биекции ψ^k_n (см. ниже).

Для доказательства предложения над потребуются две леммы:

Лемма 1.1. *Существует инъективный гомоморфизм S_n-модулей*

$$\phi^k_n : \nu^{(n-k,k)} \to A^0_{n,k}.$$

Лемма 1.2. *Существует инъективный гомоморфизм S_n-модулей*

$$\psi^k_n : A_{n,k-1} \to A_{n,k}, \text{ при этом } \quad \psi^k_n(A_{n,k-1}) \perp A^0_{n,k}.$$

Предложение будет следовать из сформулированных лемм и соображений размерности.

2. Доказательства

Доказательство леммы 1.1. Мы будем пользоваться некоторыми фактами теории представлений симметрической группы (см., например, [3]). Рассмотрим модуль $M^{(n-k,k)}$, порожденный всеми таблоидами[2] $\{T\}$, отвечающими диаграмме $(n-k,k)$. Модуль Шпехта, отвечающий этой диаграмме (и задающий каноническую реализацию соответствующего неприводимого представления), можно задать как подмодуль этого модуля, порожденный элементами

$$v_T = \sum_{C(T)} \operatorname{sgn}(q)\{q\cdot T\}, \tag{8}$$

где $C(T)$ – подгруппа Юнга, сохраняющая столбцы таблицы.

Построим отображение $\bar\phi_n^k : M^{(n-k,k)} \to A_{n,k}$, сопоставив таблоиду

$$\{T\} = \begin{array}{|l|}\hline i_{k+1} \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ i_n \\ \hline i_1\ i_2\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ i_k \\ \hline\end{array}$$

форму $\sum_{J\in\mathcal{F}_n^k} c_J x_J$, у которой $c_{\sigma * I} = c_I = 1$ для $I=\{i_1,\dots,i_k\}$ и любого $\sigma\in S_k$, и $c_J=0$ в противном случае. Обозначим через ϕ_n^k сужение построенного отображения на подпространство, порожденное элементами v_T. Опираясь на формулу (8) несложно проверить, что любая форма $\phi_n^k(v_T)$ лежит в $A^0_{n,k}$, т.к. в любой из сумм из определения (2) либо все элементы равны 0, либо существует ровно два ненулевых элемента, равных 1 и -1.

Для доказательства инъективности введем лексикографический порядок на таблоидах: $T<T'$, если для соответствующих вторых строк таблоидов $I=\{i_1<\ldots<i_k\}$ и $I'=\{i'_1<\ldots<i'_k\}$ выполнено $I<I'$ в смысле лексикографического порядка. Элементы $\{v_S\}$, когда S пробегает множество стандартных таблиц на диаграмме $(n-k,k)$, задают базис модуля Шпехта; лексикографический порядок позволяет линейно упорядочить как стандартные таблицы для диаграммы $(n-k,k)$, так и коэффициенты c_I формы $\sum_I c_I x_I$. Если мы рассмотрим элемент v_S, отвечающий стандартной таблице S, то в сумме (8) таблоид $\{S\}$, очевидно, строго больше остальных слагаемых в смысле лексикографического порядка. Поэтому для произвольного элемента

[2] Т.е., в данном случае, наборами из двух строк чисел, длины $n-k$ и k, без учета порядка в строках.

$\phi_n^k(\sum_S d_S v_S) = \sum_I c_I x_I$ старший в смысле порядка коэффициент c_I равен старшему коэффициенту d_S, что доказывает инъективность. $\square$

Доказательство леммы 1.2. Рассмотрим вложение $\psi_n^k : A_{n,k-1} \hookrightarrow A_{n,k}$, задаваемое следующим образом:

$$\psi_n^k\biggl(\sum_{I\in\mathcal{F}_n^{k-1}} c_I x_I\biggr) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} x_j \sum_{J\in\mathcal{F}_n^{k-1},\ j\notin J} c_J x_J.$$

Несложно понять, что

$$\psi_n^k\biggl(\sum_{I\in\mathcal{F}_n^{k-1}} c_I x_I\biggr) = \sum_{J'\in\mathcal{F}_n^{k}}\biggl(\sum_{J\in\mathcal{F}_n^{k-1},\ J\subset J'} c_J\biggr)x_{J'} = \sum_{J\in\mathcal{F}_n^{k-1}}\biggl(c_J\sum_{j\notin J} x_{jJ}\biggr), \tag{9}$$

при этом первое равенство доказывает корректность построенного отображения; второе равенство, вместе с определением (2), позволяет утверждать, что

$$\psi_n^k(A_{n,k-1})\perp A_{n,k}^0.$$

Докажем лемму по индукции. При $k=1$ имеем $\psi_n^1 : A_{n,0} \hookrightarrow A_{n,1}$, $\psi_n^1(a) = a\sum_{i=1}^n x_i$ – очевидная инъекция.

Пусть теперь отображение ψ_n^k инъективно, и пусть для некоторой формы $\sum_{I\in\mathcal{F}_n^k} c_I x_I$ выполнено $\psi_n^{k+1}(\sum_I c_I x_I) = 0$. Тогда, в силу (9), для любого набора индексов $J' = jJ \in \mathcal{F}_n^{k+1}$ имеем

$$0 = \sum_{I'\in\mathcal{F}_n^{k},\ I'\subset J'} c_{I'} = c_J + \sum_{I\in\mathcal{F}_n^{k-1},\ I\subset J} c_{jI}. \tag{10}$$

Для любого набора индексов $J \in \mathcal{F}_n^k$ и каких-либо чисел $p, q \notin J$ рассмотрим два набора индексов $J_1' = Jp$ и $J_2' = Jq$. Для $I \in \mathcal{F}_n^{k-1}$ введем элементы $c_I^p \equiv c_{pI}$, $c_I^q \equiv c_{qI}$. Равенство (10) позволяет нам утверждать, что для любого $J \in \mathcal{F}_n^k$

$$\sum_{I\in\mathcal{F}_n^{k-1},\ I\subset J} c_I^p - \sum_{I\in\mathcal{F}_n^{k-1},\ I\subset J} c_I^q = 0.$$

Это значит, что

$$\phi_n^k\Bigl(\sum c_I^p x_I\Bigr) = \phi_n^k\Bigl(\sum c_I^q x_I\Bigr),$$

следовательно, в силу индукционного предположения, $c_{pI} = c_{qI}$ для любого $J \in \mathcal{F}_n^k$ и любых $p, q \notin J$, откуда следует требуемая инъективность. $\square$

Для доказательства предложения 1.1 теперь достаточно проверки равенства $\dim(A_{n,k-1}) + \dim(\nu^{(n-k,k)}) = \dim(A_{n,k})$, опирающейся на прямой подсчет:

$$\dim(A_{n,k}) = C_n^k, \text{ и } \dim(\nu^{(n-k,k)}) = \frac{n!}{k!(n-k+1)!}(n-2k+1),$$

где вторая размерность может быть вычислена, например, по формуле крюков.

Для доказательства разложения (4) заметим, что, во-первых,

$$\psi_n^k \cdot \psi_n^{k-1} \cdot \ldots \cdot \psi_n^{\ell+1}\Big(\sum_{I \in \mathcal{F}_n^\ell} c_I x_I\Big) = \sum_{J \in \mathcal{F}_n^{k-\ell}} x_J \Bigg(\sum_{I \in \mathcal{F}_n^k,\ I \cap J = \emptyset} c_I x_I\Bigg),$$

и, во-вторых, если $A_{n,k} = \sum_{\ell=0}^k H_\ell$, то (полагая $A_{n,0}^0 = A_{n,0} = \mathbb{C}$)

$$H_\ell = \psi_n^k \cdot \psi_n^{k-1} \cdot \ldots \cdot \psi_n^{\ell+1}(A_{n,\ell}^0), \quad 0 \leqslant \ell \leqslant k.$$

Доказательство теоремы 1.2. Достаточно построить изоморфизмы $\alpha_n^k : A_{n-1,k}^0 \hookrightarrow A_{n,k}^0$ и $\beta_n^k : A_{n-1,k-1}^0 \hookrightarrow A_{n,k}^0$. Пусть $f \in A_{n-1,k}^0$; обозначим $\alpha_n^k(f) = \sum_{I \in \mathcal{F}_n^k} [\alpha_n^k(f)]_I x_I$ и положим

$$[\alpha_n^k(f)]_I = f_I, \quad I \in \mathcal{F}_{n-1}^k; \quad [\alpha_n^k(f)]_I = 0, \quad I \in \mathcal{F}_n^k,\ n \in I. \tag{11}$$

$$\begin{aligned} [\beta_n^k(f)]_I &= [\psi_{n-1}^k(f)]_I, \quad I \in \mathcal{F}_{n-1}^k; \\ \sum_{j=1}^n [\beta_n^k(f)]_I &= 0, \text{ для любого } I \in \mathcal{F}_{n-1}^k. \end{aligned} \tag{12}$$

Корректность отображения β_n^k – прямое вычисление; корректность отображения α_n^k, инъективность обоих отображений и S_{n-1}-инвариантность образов очевидны. Ортогональность образов $\alpha_n^k(A_{n-1,k}^0) \perp \beta_n^k(A_{n-1,k-1}^0)$ непосредственно следует из ортогональности пространств $A_{n-1,k}^0$ и $A_{n-1,k-1}^0$. Поэтому разложение (7), как и изоморфизм (5) для $n = 2k$, следует из соображений размерности. $\square$

Литература

1. Г. Джеймс, *Теория представлений симметрических групп.* — М., Мир (1982).
2. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла.* — М., Мир (1985).
3. W. Fulton, *Young Tableaux.* — Cambridge University Press (1997).
4. G. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group.* — Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 16, Addison-Wesley (1981).

Nikitin P. P. A realization of the irreducible representations of S_n corresponding to 2-row diagrams in square-free symmetric multilinear forms.

The article gives a simple realization of the representations of S_n corresponding to 2-row diagrams and an explicit description of the corresponding branching rule. The representations form a subgraph of the Young graph, and they are realized in square-free symmetric multilinear forms.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

22 сентября 2003 г.

E-mail: pnik@AN4760.spb.edu