Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 301, 2003 г.

Ф. В. Петров

ПРЕДЕЛЬНАЯ ФОРМА ДИАГРАММ ЮНГА ДЛЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ СТАТИСТИК С СУПЕРПОЛИНОМИАЛЬНЫМ РОСТОМ ПОКАЗАТЕЛЯ

Пусть $f_k(x) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ik}x^i$ – последовательность формальных степенных рядов ($k = 1, 2, \dots$) с неотрицательными коэффициентами $a_{ik} \geqslant 0$. Будем писать $\lambda \vdash n$, если λ – разбиение натурального числа n на натуральные слагаемые (без учета порядка); обозначим через $t_k(\lambda)$ количество слагаемых, равных k, в разбиении $\lambda \vdash n\,(k = 1, 2, \dots)$.

Рассмотрим произведение

$$F(x) = \prod_{i=1}^{\infty} f_k(x^k) = \sum_n \left(\sum_{\lambda \vdash n} a(\lambda) \right) x^n,$$

где $a(\lambda)$ – *вес* разбиения λ – равен $a(\lambda) = a_{t_1(\lambda)1} \cdot a_{t_2(\lambda)2} \cdot \dots$. Положим $\mathrm{Prob}(\lambda) = a(\lambda)(\sum_{\lambda \vdash n} a(\lambda))^{-1}$. Числа $\mathrm{Prob}(\lambda)$, рассматриваемые как вероятности, задают меру на множестве разбиений числа n.

Заметим, что эта мера получается сужением на разбиения числа n меры $\frac{a(\lambda)x^n}{F(x)}$, заданной на всех разбиениях всех натуральных чисел и характеризующейся следующим свойством: вероятность того, что число k встречается в разбиении t_k раз, равна $\frac{a_{t_k,k} \cdot x^{k \cdot t_k}}{f_k(x^k)}$.

Такие меры были введены в [1] и названы мультипликативными статистиками на разбиениях; там же исследован вопрос о предельной форме порождаемой статистики на разбиениях при больших значениях n для случая $f_k(x) = (1 - x)^{-P(k)}$ (т.н. статистика *Бозе–Эйнштейна*), где $P(k)$ – полином (так для $P(k) \equiv 1$ получим равномерную статистику на разбиениях).

Работа поддержана грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ НШ-2251.2003.1 и грантом РФФИ 02-01-00093.

Мы рассмотрим случай $f_k(x) = (1-x)^{-P(k)}$, где $P(k) = e^{2\alpha\sqrt{n}(1+o(1))}$, $\alpha = \sqrt{\zeta(2)}$. Из формулы Харди–Рамануджана следует, что указанной асимптотике удовлетворяет функция числа разбиений $P(k) = p(k)$, а также любая функция $P(k)$, удовлетворяющая неравенствам $p(k)k^{-M} \leqslant P(k) \leqslant p(k)k^M$ для некоторого $M > 0$.

Результаты о предельных формах принято формулировать в терминах диаграмм Юнга. Диаграммой Юнга, соответствующей разбиению $n = s_1 + s_2 + s_3 + \dots$, $s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \dots$, будем называть множество точек первого квадранта с координатами $\{(x,y) |\ y \leqslant s_{[x]+1}\}$.

Мы будем пользоваться явной формулой для веса разбиения $n = t_1 \cdot 1 + t_2 \cdot 2 + \dots$:

$$a(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} C^{t_k}_{p(k)+t_k-1}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$; будем считать также, что $\varepsilon < 1/10$.

Назовем разбиение *странным*, если сумма слагаемых этого разбиения, лежащих вне отрезка $[(1-\varepsilon)\frac{\ln^2 n}{\alpha^2}, (1+\varepsilon)\frac{\ln^2 n}{\alpha^2}]$, больше εn.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N > 0$, что как только $n > N$, так сразу*

$$\mathrm{Prob}\{\lambda \vdash n : \sum_{i=(1-\varepsilon)\frac{\ln^2 n}{\alpha^2}}^{(1+\varepsilon)\frac{\ln^2 n}{\alpha^2}} t_i(\lambda) > n - \varepsilon n\} > 1 - \varepsilon.$$

Иными словами, для достаточно больших n суммарная вероятность странных разбиений меньше ε.

Доказательство. Для доказательства теоремы рассмотрим различные слагаемые в странном разбиении. Мы будем оценивать их вклад в сумму $\sum \ln C^{t_k}_{P(k)+t_k-1}$, равную логарифму веса.

Многие формулируемые далее утверждения и неравенства справедливы лишь для достаточно больших n; это не оговаривается специально.

Мы будем пользоваться очевидными неравенствами

$$\frac{(a+b-1)^b}{b!} \geqslant C^b_{a+b-1} \geqslant \frac{a^b}{b!} \geqslant \left(\frac{a}{b}\right)^b$$

и $C^b_{a+b-1} \leqslant 2^{a+b-1}$ для натуральных a, b.

1. Пусть $k > \ln^4 n$. Тогда

$$\ln C^{t_k}_{P(k)+t_k-1} \leqslant t_k \ln(P(k)+t_k-1) \leqslant 2t_k \ln P(k) \leqslant 200 t_k \sqrt{k} \leqslant \frac{t_k k}{(\ln n)^{3/2}}.$$

Значит, сумма слагаемых, соответствующих пункту 1, не превосходит

$$(\ln n)^{-3/2} \sum t_k k \; = n(\ln n)^{-3/2}.$$

2. Пусть $k > (\ln n)^{3/2}$, но $P(k) \leqslant Mt_k$, где $M(\varepsilon)$ мы определим позже. Тогда $\ln C^{t_k}_{P(k)+t_k-1} \leqslant \ln 2^{Mt_k+t_k} \leqslant (M+1)t_k$, поэтому сумма слагаемых, соответствующих пункту 2, не превосходит

$$(M+1) \sum_{k \text{ из п. } 2} t_k \leqslant (M+1)(\ln n)^{-3/2} \sum_{k \text{ из п. } 2} t_k \cdot k \leqslant (M+1)\frac{n}{\ln^{3/2} n}.$$

3. Пусть $k \leqslant (\ln n)^{3/2}$. Тогда $P(k) < \sqrt{n}/3$ и $C^{t_k}_{P(k)+t_k-1} = C^{P(k)-1}_{P(k)+t_k-1} \leqslant C^{P(k)}_{2n} \leqslant (2n)^{P(k)}$, поэтому слагаемое, вносимое в сумму каждым конкретным k из пункта 3, не превосходит $P(k)\ln(2n) \leqslant \sqrt{n}\ln n$. Поскольку всего разных k из пункта 3 не больше, чем $(\ln n)^{3/2}$, сумма всех вносимых ими слагаемых не превосходит $\sqrt{n}(\ln n)^3$.

4. Пусть $(\ln n)^4 \geqslant k \geqslant (\ln n)^{3/2}$, $P(k) \geqslant Mt_k$, $t_k < n(\ln n)^{-10}$.

Сумма kt_k по всем k из пункта 4 не больше $n(\ln n)^{-2}$. А

$$\ln C^{t_k}_{P(k)+t_k-1} \leqslant t_k \ln(P(k)+t_k-1) \leqslant 2t_k \ln P(k) \leqslant kt_k,$$

так что сумма слагаемых, соответствующих пункту 4, не больше $n(\ln n)^{-2}$.

5. Пусть $(\ln n)^4 \geqslant k \geqslant (\ln n)^{3/2}$, $P(k) > Mt_k$, $t_k \geqslant n(\ln n)^{-10}$.

Зафиксируем число $\alpha' > \alpha$, которое определим позже. Имеем

$$\ln C^{t_k}_{P(k)+t_k-1} \leqslant \ln(P(k)+t_k-1)^{t_k} - \ln t_k! \leqslant$$

$$\leqslant t_k \ln(P(k)+t_k-1) - t_k \ln t_k + t_k \leqslant t_k \left(\ln\left(\frac{P(k)}{t_k}+1\right)+1\right) \leqslant$$

$$\leqslant t_k \left(\ln\frac{P(k)}{t_k}+2\right) \leqslant t_k \frac{\ln M + 2}{\ln M} \ln\frac{P(k)}{t_k} \leqslant$$

$$\leqslant t_k \left(1+\frac{2}{\ln M}\right)\left(2\alpha'\sqrt{k} - \ln t_k\right) \leqslant t_k \left(1+\frac{2}{\ln M}\right) {\alpha'}^2 \frac{k}{\ln t_k} \leqslant$$

$$\leqslant t_k \left(1+\frac{3}{\ln M}\right) {\alpha'}^2 \frac{k}{\ln n}.$$

Таким образом, для любого $\rho > 1$ можно подобрать α' и M так, что для k из пункта 5 выполняется неравенство $\ln C^{t_k}_{P(k)+t_k-1} \leqslant \rho\alpha^2 \frac{kt_k}{\ln n}$.

Найдем такое $w(\varepsilon) < 1$, что $2p - p^2 \leqslant w$, как только $|p-1| > \varepsilon/5$. Тогда для слагаемых странного разбиения, удовлетворяющих неравенству $|k\alpha^2/\ln^2 n - 1| > \varepsilon$ (напомним, что сумма таких слагаемых – назовем их *отклоняющимися* – с учетом кратности больше εn), имеем $2\alpha'\sqrt{k} - \ln t_k \leqslant w{\alpha'}^2 \frac{k}{\ln t_k}$, если только α' достаточно близко к α (надо положить $p = \frac{\ln t_k}{\sqrt{k}\alpha'}$).

Уменьшая при необходимости α' и увеличивая M так, что

$$\left(1+\frac{3}{\ln M}\right) {\alpha'}^2 w < w' = \frac{1+w}{2},$$

получим для отклоняющихся k оценку $\ln C^{t_k}_{P(k)+t_k-1} \leqslant w'\alpha^2 \frac{kt_k}{\ln n}$.

Таким образом, для странного разбиения сумма слагаемых из пункта 5 не превосходит

$$((1-\varepsilon)\rho + \varepsilon w')\alpha^2 \frac{n}{\ln n}$$

(поскольку сумма kt_k по отклоняющимся k не меньше εn, а общая сумма по всем k равна n).

Можно считать, что $(1-\varepsilon)\rho + \varepsilon w' < 1 - \varepsilon(1-w')/2$: достаточно выбрать ρ поменьше.

Итого, суммируя оценки пунктов 1–5, получаем, что для странного разбиения логарифм веса не превосходит

$$(1 - C(\varepsilon))\alpha^2 \frac{n}{\ln n},$$

где $C(e) = \varepsilon(1-w')/2 > 0$.

Предъявим теперь разбиение, логарифм веса которого больше $(1 - C(\varepsilon)/2)\alpha^2 \frac{n}{\ln n}$.

Это завершит доказательство теоремы, поскольку общее количество странных разбиений не превосходит $p(n)$ и, стало быть, их суммарный вес не превосходит $e^{-C(\varepsilon)\alpha^2 \frac{n}{2\ln n}} p(n) Q < \varepsilon Q$, где Q – вес того разбиения, которое мы собираемся предъявить. Стало быть, суммарная вероятность странных разбиений меньше ε.

Пусть в разбиении присутствуют $t = [n/k]$ слагаемых по $k = [\ln^2 n/\alpha^2]$. Тогда логарифм его веса не меньше

$$\ln C^t_{P(k)+t-1} \geqslant \ln(P(k))^t - \ln t! \geqslant t \ln \frac{P(k)}{t} = \alpha^2 \frac{n}{\ln n}(1 + o(1)).$$

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 1′. *Рассмотрим статистику Ферми–Дирака (см.* [1]*), соответствующую последовательности функций* $f_k(x) = (1 + x)^{P(k)}$. *Для этой статистики выполнено утверждение теоремы* 1.

Доказательство. Действительно, вес разбиения $\lambda : n = t_1 \cdot 1 + t_2 \cdot 2 + \ldots$ в случае Ферми–Дирака равен $\prod C^{t_i}_{P(i)} \leqslant \prod C^{t_i}_{P(i)+t_i-1}$, то есть не превосходит веса того же разбиения в случае Бозе–Эйнштейна. Это позволяет применить к весам странных разбиений полученные оценки сверху. С другой стороны, логарифм веса разбиения, в котором присутствуют $t = [n/k]$ слагаемых по $k = [\ln^2 n/\alpha^2]$, не меньше $\ln(P(k) - t)^t - \ln t! \geqslant t \ln(P(k)/t - 1) = \alpha^2 \frac{n}{\ln n}(1 + o(1))$.

Следующий пример взят из [2]. Рассмотрим матрицы $n \times n$ над конечным полем F_q. Будем называть (a, k)-*клеткой* (где $k \in \mathbb{N}$ и $a \in \overline{F}_q$ – корень многочлена над F_q) матрицу размера $k \times k$ вида

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Для каждого разбиения $\lambda \vdash m$ числа m рассмотрим (a, λ)-*блок* – блочную матрицу размера $m \times m$, состоящую из $t_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ (a, k)-клеток.

Каждая $n \times n$-матрица A над F_q подобна (с матрицей подобия из $\mathrm{GL}(\overline{F}_q, n)$) некоторой *жордановой* матрице, то есть блочной матрице, составленной из нескольких (a_i, λ_i)—блоков; причем для каждого (a, λ)-блока в A встретятся и все (a', λ)-блоки, где a' – другие корни минимального полинома для a.

Будем говорить, что две жордановы матрицы относятся к одному *типу классов сопряженности* матриц размера $n \times n$, если для каждого $d \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \vdash m$ количества (a, λ)-блоков, для которых d есть степень минимального полинома над F_q, одинаковы для обеих матриц.

Количество типов классов сопряженности не зависит от q, хотя при данном q некоторые типы не реализуются (так над F_2 не существует диагональных матриц размера 3×3 с различными собственными числами). Однако каждый тип реализуем при всех достаточно больших q. Так для матриц размера 2×2 существуют четыре типа классов сопряженности:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^* \end{pmatrix},$$

где $a, b \in F_q$ $(a \neq b)$; $(z-\eta)(z-\eta^*) \in F_q[z]$ – неприводимый квадратный трехчлен над F_q.

Количество $K(n)$ типов классов сопряженности матриц размера $n \times n$ имеет производящую функцию (см. [2])

$$\sum_{n=0}^{\infty} K(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^k)^{P(k)}}, \qquad \text{где} \quad P(k) = \sum_{d|k} p(d).$$

Отметим, что $P(k) = p(k)(1+o(1)) = e^{2\alpha\sqrt{k}(1+o(1))}$, поэтому из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Рассмотрим равномерную статистику на типах классов сопряженности матриц размера $n \times n$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N > 0$, что при $n > N$ ц вероятностью $p_n > 1-\varepsilon$ суммарный размер (a, λ)–блоков $(\lambda \vdash |\lambda|)$, удовлетворяющих неравенству $\left|\frac{|\lambda|\cdot\alpha^2}{\ln^2 n} - 1\right| > \varepsilon$, меньше εn. Иными словами, в типичном типе классов сопряженности блоки имеют размер $\frac{6}{\pi^2}\ln^2 n(1+o(1))$.*

Подвергнем диаграмму Юнга разбиения λ числа n аффинному преобразованию

$$(x, y) \to \left(\frac{x \ln^2 n}{\alpha^2 n}, \frac{y\alpha^2}{\ln^2 n}\right).$$

Получим подграфик монотонной кусочно-постоянной функции f_λ, интеграл от которой равен 1.

Теорема 3 (о предельной форме). *Функции f_λ сходятся в $L_1(\mathbb{R}^+)$ к индикатору отрезка $[0,1]$ по вероятности. Сходимость на любом отрезке $[a,b] \subset (0,1)$ равномерна.*

Доказательство. Зафиксируем достаточно маленькое $\varepsilon \in [0, 1/10]$. Рассмотрим полосу $|y-1| < \varepsilon$. Площадь части подграфика f_λ, соответствующая участку до входа в полосу, меньше ε с вероятностью $> 1-\varepsilon$. Аналогично, площадь части подграфика после выхода из полосы меньше ε с вероятностью $> 1-\varepsilon$. Значит, с вероятностью $> 1-2\varepsilon$ площадь подграфика, соответствующая участку внутри полосы, больше $1-2\varepsilon$. Отсюда легко следует, что L_1-норма разности $f_\lambda - \chi_{[0,1]}$ меньше 10ε с вероятностью $> 1-10\varepsilon$. Но отрезок $[a,b]$ при малом ε содержится в $[\varepsilon, 1-4\varepsilon]$, откуда следует второе утверждение теоремы.

Заметим, что развитым методом можно получить предельную форму для широкого класса функций $P(k)$ т.н. промежуточного роста. Именно, если $P(k) = e^{ak^\gamma(1+o(1))}$, $0 < \gamma < 1$, $a > 0$, то предельным разбиением (в смысле теорем 1 и 2) является разбиение, в котором доминирующая часть слагаемых равна

$$k_0 = \left(\frac{\ln n}{a(1-\gamma)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} (1 + o(1)).$$

Отметим, что для функций $P(k)$ суперэкспоненциального роста произведение $\prod(1-x^k)^{-P(k)}$ имеет нулевой радиус сходимости и соответствующая статистика не представляет интереса.

Для функции $P(k) = c^k$, $c > 1$, радиус сходимости равен c и возникающая статистика совпадает со статистикой, возникающей для $f_k(x) = (1 - c^{-k}x)^{-c^k}$.

Заметим, что отношение $f_k(x^k)/\exp(x^k)$ равномерно на интервале $(0,1)$ сходится к 1. Это позволяет предположить, что предельная форма будет такая же, как и для $f_k(x) := \exp(x^k)$ (т.н. статистика квази-Больцмана). Действительно, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Для статистик, порождаемых функциями $F_1(x) := \prod(1-(x/c)^k)^{-c^k}$, $F_2(x) := \prod(1+(x/c)^k)^{[c^k]}$ и $F_0(x) := \prod e^{x^k}$, образ диаграммы Юнга большого числа n при гомотетии $(x,y) \to (x/\sqrt{n}, y/\sqrt{n})$ лежит между кривыми $y = -\ln(x+\varepsilon)$ и $y = -\ln(x-\varepsilon)$ с вероятностью $p_n > 1-\varepsilon$. Иными словами, одновременно для* *всех $\kappa \geqslant 0$ количество слагаемых разбиения, больших $\kappa\sqrt{n}$, заключено между $(\exp(-\kappa)-\varepsilon)\sqrt{n}$ и $(\exp(-\kappa)+\varepsilon)\sqrt{n}$ с вероятностью $p_n > 1-\varepsilon$.*

Доказательство. Положим $F_i(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_{ni}x^n$ $(i = 1, 2)$, $F_0(x) = e^{\frac{x}{1-x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_{n0}x^n$. Отметим, что для статистических сумм h_{ni} мультипликативных статистик, соответствующих функциям F_i $(i = 0, 1, 2)$, выполнены неравенства $h_{n2} \leqslant h_{n0} \leqslant h_{n1}$, поскольку вес каждого разбиения в случае F_1 не меньше, чем для F_0, а в случае F_2 – не больше, чем для F_0. Ближайшей нашей целью будет получение оценок $C^{-1}h_{n1} \leqslant h_{n0} \leqslant Ch_{n2}$, где постоянная $C > 0$ зависит лишь от c. Заметим, что из этого сразу будет следовать утверждение в случае Ферми–Дирака: вес каждого плохого (лежащего вне слоя между описанными кривыми) разбиения не увеличился, поэтому вероятность увеличилась не более чем в C раз, стало быть, суммарная вероятность также увеличилась не более чем в C раз.

Последовательность h_{n0} возрастает по n, и существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{h_{(n+1)0}}{h_{n0}} = 1$ (эти свойства вытекают из формулы $h_{ni} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}C_{n-1}^{k-1}$, которая в свою очередь следует из равенства $e^{\frac{x}{1-x}} = \sum \frac{1}{k!}x^k(1-x)^{-k}$). Отсюда же вытекают неравенства $Cn^{-2}e^{2\sqrt{n}} \leqslant h_{n0} \leqslant 2e^{2\sqrt{n}}$.

Положим $a_{k1}(x) := (1-(x/c)^k)^{-c^k}e^{-x^k}$ и $a_{k2}(x) := (1+(x/c)^k)^{[c^k]}e^{-x^k}$. Легко видеть, что произведение $Z_i(x) := \prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r_{ni}x^n$ конечно и положительно при $|x| < \sqrt{c}$, так что $r_n \leqslant M\rho^n$, где $\rho = c^{-1/3}$ и M – некоторая константа. Имеем $F_i(x) = Z_i(x)F_0(x)$, поэтому

$$h_{ni} = r_{0i}h_{n0} + r_{1i}h_{(n-1)0} + r_{2i}h_{(n-2)0} + \cdots + r_{ni}h_{00}.$$

Из указанных свойств последовательности $\{h_{n0}\}_{n=0}^{\infty}$ следует, что предел $\lim_{n\to\infty} \frac{h_{ni}}{h_{n0}}$ существует и равен $\sum_{n=0}^{\infty} r_{ni} = Z_i(1) > 0$. Отсюда следуют оценки $C^{-1}h_{n1} \leqslant h_{n0} \leqslant Ch_{n2}$.

В случае Бозе–Эйнштейна веса разбиений, в которых много маленьких слагаемых, значительно возрастают при переходе от F_0 к F_1. Поэтому приходится использовать оценку на суммарную меру плохих разбиений в случае статистики квази-Больцмана. Именно, эта мера при больших n не превосходит $\theta^{\sqrt{n}}$ для некоторого $\theta(\varepsilon) < 1$. Это утверждение получается в процессе доказательства предельной теоремы для статистики квази-Больцмана и здесь опускается.

Теперь оценим в случае Бозе–Эйнштейна суммарный вес P разбиений, в которых наличествует $\beta\sqrt{n}$ слагаемых, больших $\kappa\sqrt{n}$, где точка (β, κ) не лежит в описанной области. Он равен коэффициенту при $t^{\beta\sqrt{n}}x^n$ в разложении функции

$$G_\kappa(x,t) := \prod_{l<\kappa\sqrt{n}} (1-(x/c)^l)^{-c^l} \cdot \prod_{l\geqslant\kappa\sqrt{n}} (1-t(x/c)^l)^{-c^l}.$$

Заметим, что $G_\kappa(x,t) = \left(\prod_{l<\kappa\sqrt{n}} e^{x^l} \cdot \prod_{l\geqslant\kappa\sqrt{n}} e^{tx^l}\right) Y_\kappa(x,t)$, где степенной ряд функции $Y_\kappa(x,t) = \sum_{k,m} y_{km}t^k x^m$ имеет неотрицательные коэффициенты $y_{km} \geqslant 0$ и $Y_\kappa(x,1) = Z_1(x)$, откуда $y_{km} \leqslant \sum_k y_{km} = r_m \leqslant M\rho^m$. Обозначим через x_{km} суммарный вес разбиений с k слагаемыми $\geqslant \kappa\sqrt{n}$ в разбиении числа m для статистики квази-Больцмана. Имеем

$$P = \sum_{k+k'=\beta\sqrt{n},\, m+m'=n} x_{km}y_{k'm'}.$$

Рассмотрим маленькое число ε_1 (выберем его потом). Заметим, что сумма слагаемых последней суммы, соответствующих $m' > \varepsilon_1\sqrt{n}$, не превосходит

$$Mn^2\rho^{\varepsilon_1\sqrt{n}} \max_{m\leqslant n} x_{km} \leqslant 2Mn^2 e^{(2+\varepsilon_1\ln\rho)\sqrt{n}}.$$

Для остальных слагаемых точка (β_1, κ_1), где $\beta_1 = k/\sqrt{m}$, $\kappa_1 = \kappa\sqrt{\frac{n}{m}}$, будет достаточно близка к (β, κ) и будет выполняться неравенство $|\beta - e^{-\kappa}| > \varepsilon/2$ (при подходящем выборе ε_1; отметим, что одно и то же $\varepsilon_1(\varepsilon)$, не зависящее от n, можно выбрать для всех плохих точек (β, κ)).

Значит, для таких слагаемых будет выполняться оценка $x_{km} \leqslant e^{(2-\theta(\varepsilon/2))\sqrt{n}}$.

Отсюда получается оценка $P \leqslant Ce^{(2-\theta')\sqrt{n}}$ при некотором $\theta' > 0$. Суммируя по тем парам (β, κ), для которых числа $\kappa\sqrt{n}$, $\beta\sqrt{n}$ натуральны и не превосходят n, получаем оценку того же вида на суммарный вес плохих разбиений в случае Бозе-Эйнштейна.

Автор благодарен А. М. Вершику за постановку задачи, полезные обсуждения и содействие при написании данной заметки, а также Н. В. Цилевич за тщательное редактирование и помощь при подготовке рукописи к печати.

Литература

1. А. М. Вершик, *Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации.* — Функц. анал. и прил. **30**, вып. 2 (1996), 19–30.
2. J. A. Green, *The characters of the finite general linear groups.* — Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 402–447.

Petrov F. V. The limit shape of Young diagrams for multiplicative statistics with superpolynomial growth.

We obtain the limit shape of Young diagrams for a class of multiplicative statistics. In particular, we find the limit shape corresponding to J. Green's function enumerating the characters of $\mathrm{GL}(n, F_q)$.

С.-Петербургский государственный университет
E-mail: Fedor@FP5607.spb.edu

Поступило 15 сентября 2003 г.