Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 302, 2003 г.

Н. В. Проскурин

О СУММАХ КЛОСТЕРМАНА С ХАРАКТЕРАМИ

Введение. В этой статье мы докажем некоторые формулы для классических сумм Клостермана

$$Kl(c) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^*} e_q(x^{-1} + cx), \qquad c \in \mathbb{F}_q, \tag{1}$$

и для сумм Клостермана с характерами

$$Kl(c;\chi) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^*} e_q(x^{-1} + cx)\,\chi(x), \quad c \in \mathbb{F}_q, \quad \chi \in \widehat{\mathbb{F}}_q^*. \tag{2}$$

Здесь и далее,

$\mathbb{F}_q$ – конечное поле из q элементов,

$\mathbb{F}_q^*$ – мультипликативная группа поля $\mathbb{F}_q$,

$\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел,

$\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел,

$\widehat{\mathbb{F}}_q^*$ – группа всех комплексных характеров группы $\mathbb{F}_q^*$,

e_q – нетривиальный комплексный аддитивный характер $\mathbb{F}_q$,

ϵ – тривиальный характер группы $\mathbb{F}_q^*$, т.е. единица группы $\widehat{\mathbb{F}}_q^*$.

Формулы, данные ниже в двух теоремах, мы применяем затем к суммам Клостермана (1) и к суммам Салье, т.е. к суммам (2) с характером χ порядка 2. В частности, мы получаем некоторые соотношения ортогональности между векторами Клостермана и Салье (определения см. ниже).

Чтобы сформулировать результаты, нам будут нужны суммы Гаусса

$$G(c;\chi) = \sum_{z \in \mathbb{F}_q^*} e_q(cz)\,\chi(z), \quad G(\chi) = G(1;\chi); \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы фундаментальной математики”.

здесь $c \in \mathbb{F}_q$, $\chi \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}$. Первая теорема доставляет две формулы для "сверток" сумм Клостермана с характерами.

Теорема 1. *Если* $a, b \in \mathbb{F}_q^*$ *и* $\mu, \nu \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}$, *то*

$$\begin{aligned} Kl(a+b;\mu\nu) = \frac{1}{q} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{F}_q^*\\ m+n=1}} & Kl(am;\mu)\, Kl(bn;\nu)\, \mu(m)\, \nu(n) \\ & + \frac{1}{q}\, Kl(a;\mu)\, G(b;\nu) + \frac{1}{q}\, G(a;\mu)\, Kl(b;\nu) \end{aligned} \tag{4}$$

и также

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{F}_q\\ m+n=1}} Kl(am;\mu)\, Kl(bn;\nu) \\ & = \overline{\mu}(a)\, \overline{\nu}(b) \begin{cases} \lambda(c)\, Kl(c;\lambda), & \text{если} \quad c \neq 0, \\ G(\lambda) & \text{в противном случае}, \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

где $\lambda = \mu\nu$, $c = a + b$.

Формулы (4) и (5), по существу, идентичны в случае, когда μ и ν – тривиальные или квадратичные характеры. Однако, в общем случае они существенно различны. Это замечание относится равным образом и к паре формул (6–7) для "скалярных произведений", данных во второй теореме.

Теорема 2. *Если* $a, b \in \mathbb{F}_q^*$ *и* $\mu, \nu \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}$, *то*

$$\begin{aligned} G(a-b;\mu\overline{\nu}) = \frac{1}{q} \sum_{n\in\mathbb{F}_q^*} & Kl(an;\mu)\, \overline{Kl(bn;\nu)}\, \mu(n)\, \overline{\nu}(n) \\ & + \frac{1}{q}\, G(a;\mu)\, \overline{G(b;\nu)} \end{aligned} \tag{6}$$

и также

$$\frac{1}{q} \sum_{n\in\mathbb{F}_q} Kl(an;\mu)\, \overline{Kl(bn;\nu)} = \overline{\mu}(a)\, \nu(b)\, G(a-b,\overline{\mu}\nu). \tag{7}$$

Для доказательства мы применим стандартную технику преобразований Фурье и формулы Парсеваля. Можно заметить, что формула (3.3) из [1] влечет за собой формулы (4) и (5) в случае, когда q простое и $\mu = \nu = \epsilon$. Но мы заинтересованы, главным образом, в возможности включить в рассмотрение суммы Клостермана с характерами. Именно, пусть $q \not\equiv 0 \bmod 2$. Тогда существует единственный нетривиальный квадратичный характер κ группы $\mathbb{F}_q^*$, т.е. $\kappa \in \widehat{\mathbb{F}}_q^*$ с $\kappa \neq \epsilon$, $\kappa^2 = \epsilon$. Суммы Клостермана с характером κ – это суммы Салье

$$Sl(c) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^*} e_q(x^{-1} + cx)\,\kappa(x), \qquad c \in \mathbb{F}_q. \tag{8}$$

Наши общие формулы приводят к некоторым соотношениям для сумм Клостермана и сумм Салье. Рассмотрим сначала случай $\mu = \nu = \epsilon$.

Следствие 1. *Если* $a, b \in \mathbb{F}_q^*$, *то*

(a) $\displaystyle Kl(a+b) = \frac{1}{q} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{F}_q \\ m+n=1}} Kl(am)\,Kl(bn),$

(b) $\displaystyle \frac{1}{q} \sum_{n \in \mathbb{F}_q} Kl(an)\,Kl(bn) = \begin{cases} q-1, & \text{если} \quad a = b, \\ -1, & \text{если} \quad a \neq b. \end{cases}$

Для простого q формулы (a) и (b) следуют из (3.3) [1], а формулу (b) с $a = b$ можно найти у Салье [2]. Таким образом, обе формулы, по существу, известны.

Теперь пусть либо один из характеров μ, ν тривиален и другой порядока 2, либо оба характера порядка 2. Наши теоремы доставляют новые соотношения между суммами Клостермана и Салье.

Следствие 2. *Пусть* κ *– нетривиальный квадратичный характер группы* $\mathbb{F}_q^*$, $q \not\equiv 0 \bmod 2$. *Если* $a, b \in \mathbb{F}_q^*$, *то*

(a) $\displaystyle \kappa(a)\,Sl(a+b) = \frac{1}{q} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{F}_q \\ m+n=1}} Sl(am)\,Kl(bn),$

(b) $\displaystyle \kappa(ab)\,Kl(a+b) = \frac{1}{q} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{F}_q \\ m+n=1}} Sl(am)\,Sl(bn),$

(c) $\displaystyle \frac{1}{q} \sum_{n \in \mathbb{F}_q} Sl(an)\,Kl(bn) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a = b, \\ \kappa(1-b/a)\,G(\kappa), & \text{если} \quad a \neq b, \end{cases}$

(d) $\displaystyle \frac{1}{q}\sum_{n\in\mathbb{F}_q} Sl(an)\,\overline{Sl(bn)} = \begin{cases} q-1, & \textit{если} \quad a=b, \\ -\kappa(ab), & \textit{если} \quad a\neq b. \end{cases}$

Приведенным выше формулам можно дать элементарную геометрическую интерпретацию. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^q$, точки которого суть последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{F}_q}$ вещественных чисел x_n, индексированные элементами поля $\mathbb{F}_q$. Группа $\mathbb{F}_q^*$ действует на $\mathbb{R}^q$ перестановками компонент. Точнее говоря, $c\in\mathbb{F}_q^*$ переводит $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{F}_q}$ в ${}^c x=\{x_{cn}\}_{n\in\mathbb{F}_q}$. Мы можем определить вектор Клостермана

$$KV=\{Kl(n)/\sqrt{q}\,\}_{n\in\mathbb{F}_q}$$

и вектор Салье

$$SV=\{Sl(n)/G(\kappa)\}_{n\in\mathbb{F}_q}.$$

Как KV, так и SV – точки сферы радиуса $\sqrt{q-1}$ с центром в нуле в $\mathbb{R}^q$ (это видно из следствия 1 (b), следствия 2 (d) и приведенных ниже формул (9), (11–14)). Из следствия 2 (c) теперь видно, что вектор Клостермана KV ортогонален вектору Салье SV. Более того, следствие 2 (c) и (d) показывает, что сдвинутые вектора Салье ${}^c SV$ попарно “почти ортогональны” вектору Клостермана KV. Серию аналогичных соотношений ортогональности доставляет нам следствие 2 (a), поскольку $Sl(a+b)=0$, если $a+b$ не квадрат в $\mathbb{F}_q$.

1. Предварительные сведения. Для удобства ссылок, здесь собраны основные свойства рассматриваемых тригонометрических сумм.

Из определений (1), (2) немедленно следует

$$Kl(0)=-1, \quad Kl(c;\epsilon)=Kl(c)\in\mathbb{R} \tag{9}$$

для всех $c\in\mathbb{F}_q$, а из (3) следует,[1]

$$\begin{aligned} &G(\chi)=Kl(0,\overline{\chi}), \quad G(0;\chi)=\begin{cases} q-1, & \text{если} \quad \chi=\epsilon, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ &G(c,\chi)=\overline{\chi}(c)\,G(\chi), \quad G(c;\epsilon)=G(\epsilon)=-1 \end{aligned} \tag{10}$$

[1] Здесь и далее: $\overline{z}$ обозначает число, комплексно сопряженное с $z\in\mathbb{C}$; $\overline{\chi}$ обозначает функцию, сопряженную с комплексной функцией χ.

для всех $c \in \mathbb{F}_q^*$, $\chi \in \widehat{\mathbb{F}}_q^*$. Следующие хорошо известные формулы можно найти в [3]:

$$G(\chi)\, G(\overline{\chi}) = \chi(-1)\, q \quad \text{и} \quad |G(\chi)|^2 = q \tag{11}$$

для всех $\chi \in \widehat{\mathbb{F}}_q^*$ исключая $\chi = \epsilon$. Пусть теперь $q \not\equiv 0 \bmod 2$, так что определены характер κ порядка 2 и суммы Салье. Пусть $c \in \mathbb{F}_q^*$. Тогда

$$Sl(0) = G(\kappa), \tag{12}$$

$$Sl(c^2) = \{e_q(2c) + e_q(-2c)\}\, G(\kappa), \tag{13}$$

$$Sl(c) = 0, \text{ если } \kappa(c) \neq 1$$
$$(\text{т.е., если } c \text{ не квадрат в } \mathbb{F}_q). \tag{14}$$

Это известно из работы Салье [2] в случае простого q. Элегантное доказательство (13–14) дал Уилльямс [4]. Он тоже рассматривал только случай простого q, но его вычисления легко распространяются на общий случай.

2. О преобразовании Фурье. Преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции $f\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ есть функция $\mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$, определенная

$$\widehat{f}(c) = \sum_{m \in \mathbb{F}_q} f(m)\, e_q(cm), \quad c \in \mathbb{F}_q. \tag{15}$$

Формула обращения Фурье

$$f(c) = \frac{1}{q} \sum_{m \in \mathbb{F}_q} \widehat{f}(m)\, e_q(-cm), \quad c \in \mathbb{F}_q. \tag{16}$$

позволяет восстановить f по $\widehat{f}$. Далее, для каждой пары функций $f, g\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ имеют место формулы типа равенства Парсеваля:

$$\frac{1}{q} \sum_{n \in \mathbb{F}_q} \widehat{f}(n)\, \overline{\widehat{g}(n)} = \sum_{c \in \mathbb{F}_q} f(c)\, \overline{g(c)}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{q} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{F}_q \\ m+n=1}} \widehat{f}(m)\, \widehat{g}(n) = \sum_{c \in \mathbb{F}_q} f(c)\, g(c)\, e_q(c). \tag{18}$$

Обе формулы хорошо известны. Чтобы доказать, скажем, (18), мы записываем $f(c)$ как в (16), $g(c)$ аналогичным образом, и обращаем суммирование в правой части (18). Это приводит к

$$\sum_{c\in\mathbb{F}_q} f(c)\,g(c)\,e_q(c) = \frac{1}{q^2}\sum_{m,n\in\mathbb{F}_q} \widehat{f}(m)\,\widehat{g}(n)\sum_{c\in\mathbb{F}_q} e_q(c-cm-cn).$$

Остается заметить, что последняя сумма по c равна q, если $m+n=1$, и равна 0 в противном случае. Формула (17) может быть доказана аналогичным образом.

Для $a\in\mathbb{F}_q^*$ и $\mu\in\widehat{\mathbb{F}}_q^*$ определим функцию $f\colon\mathbb{F}_q\to\mathbb{C}$ условием $\widehat{f}(m)=Kl(am;\mu)$ для всех $m\in\mathbb{F}_q$. Покажем, что

$$f(0)=0 \quad \text{и} \quad f(c)=\mu(a^{-1}c)\,e_q(ac^{-1}) \quad \text{для} \quad c\in\mathbb{F}_q^*. \tag{19}$$

С этой целью рассмотрим обратное преобразование Фурье функции $\widehat{f}$. Из (16) и (2) следует

$$\begin{aligned} q\,f(c) &= \sum_{m\in\mathbb{F}_q} Kl(am;\mu)\,e_q(-cm)\\ &= \sum_{m\in\mathbb{F}_q}\Big\{\sum_{x\in\mathbb{F}_q^*} e_q(x^{-1}+amx)\,\mu(x)\Big\}e_q(-cm)\\ &= \sum_{x\in\mathbb{F}_q^*} e_q(x^{-1})\,\mu(x)\Big\{\sum_{m\in\mathbb{F}_q} e_q(amx-cm)\Big\}. \end{aligned}$$

Последняя сумма по m равна q, если $x=c/a$, и равна 0 в противном случае. Это влечет за собой (19).

Далее, с a и μ как и выше, определим функцию $f\colon\mathbb{F}_q\to\mathbb{C}$ условием $\widehat{f}(0)=0$, $\widehat{f}(m)=Kl(am;\mu)\,\mu(m)$ для $m\neq 0$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} &f(0) = -\frac{1}{q}\,G(a;\mu) \quad \text{и}\\ &f(c) = f(0)+\overline{\mu}(c)\,e_q(ac^{-1}) \quad \text{для} \quad c\in\mathbb{F}_q^*. \end{aligned} \tag{20}$$

Для доказательства мы опять обращаемся к (16) и (2), подставляем правую часть (2) в (16) и обращаем суммирование. Это приводит к

$$q\,f(c)=\sum_{x\in\mathbb{F}_q^*} e_q(x^{-1})\,\mu(x)\Big\{\sum_{m\in\mathbb{F}_q^*} e_q(amx-cm)\,\mu(m)\Big\}. \tag{21}$$

Для $c=0$ внутренняя сумма по m равна $\overline{\mu}(x)\,G(a;\mu)$ (см. (3) и (10)), что влечет за собой первую формулу в (20). Для $c\neq 0$, $\mu=\epsilon$ внутренняя сумма по m равна $q-1$, если $ax=c$, и равна -1 для всех других x. Следовательно, в этом случае имеем

$$q\,f(c)=q\,e_q(a/c)-\sum_{x\in\mathbb{F}_q^*}e_q(x^{-1})=1+q\,e_q(a/c),$$

что совпадает с (20) ввиду (10). Наконец, в общем случае $c\neq 0$, $\mu\neq\epsilon$, внутренняя сумма по m в (21) равна $\overline{\mu}(ax-c)\,G(\mu)$, если $ax\neq c$, и равна 0 в противном случае. Следовательно, в этом случае имеем

$$\begin{aligned}q\,f(c)&=G(\mu)\sum_x e_q(x^{-1})\,\mu(x)\,\overline{\mu}(ax-c)\\&=G(\mu)\sum_y e_q(y)\,\overline{\mu}(a-cy),\end{aligned}$$

где суммирование проводится по $x\in\mathbb{F}_q$, $x\neq 0, c/a$, в первой сумме, и по $y\in\mathbb{F}_q$, $y\neq 0, a/c$, – во второй. Заменяя y на $z=y-a/c$, мы получаем

$$q\,f(c)=G(\mu)\,e_q(ac^{-1})\,\overline{\mu}(-c)\sum_z e_q(z)\,\overline{\mu}(z).$$

Здесь суммирование по $z\in\mathbb{F}_q$, $z\neq 0$, $-a/c$, и сумма равна $G(\overline{\mu})-e_q(-ac^{-1})\,\overline{\mu}(-ac^{-1})$, см. (3). Теперь, воспользовавшись (10–11), мы получаем

$$\begin{aligned}q\,f(c)&=G(\mu)\,G(\overline{\mu})\,e_q(ac^{-1})\,\overline{\mu}(-c)-G(\mu)\,\overline{\mu}(a)\\&=q\,e_q(ac^{-1})\,\overline{\mu}(c)-G(a,\mu),\end{aligned}$$

что совпадает с (20).

3. Доказательство теоремы 1. Начнем с доказательства (5). Мы воспользуемся формулой Парсеваля (18) с

$$\widehat{f}(m)=Kl(am;\mu),\qquad \widehat{g}(n)=Kl(bn;\nu).$$

Левая часть (18) равна левой части (5). Мы имеем формулы (19) для f и аналогичные формулы для g, именно

$$g(0)=0\quad\text{и}\quad g(c)=\nu(b^{-1}c)\,e_q(bc^{-1})\quad\text{для}\quad c\in\mathbb{F}_q^*. \tag{22}$$

Мы видим, что правая часть (18) равна

$$\sum_{c\in\mathbb{F}_q^*} \mu(a^{-1}c)\,\nu(b^{-1}c)\,e_q(ac^{-1}+bc^{-1}+c) = \overline{\mu}(a)\,\overline{\nu}(b)\,R(a+b),$$

где

$$R(a+b) = \sum_{c\in\mathbb{F}_q^*} \mu(c)\,\nu(c)\,e_q((a+b)c^{-1}+c).$$

Очевидно, $R(0) = G(\mu\nu)$, что совпадает с (5). Если $a+b \neq 0$, мы можем заменить c на $(a+b)z$ и получить

$$\begin{aligned} R(a+b) &= \mu(a+b)\,\nu(a+b) \sum_{z\in\mathbb{F}_q^*} \mu(z)\,\nu(z)\,e_q(z^{-1}+(a+b)z) \\ &= \mu(a+b)\,\nu(a+b)\,Kl(a+b;\mu\nu), \end{aligned}$$

что совпадает с (5).

Чтобы доказать (4) мы воспользуемся формулой Парсеваля (18) с $\widehat{f}(0) = \widehat{g}(0) = 0$,

$$\widehat{f}(m) = Kl(am;\mu)\,\mu(m), \quad \widehat{g}(n) = Kl(bn;\nu)\,\nu(m)$$

для $mn \neq 0$. Левая часть (18) равна сумме по m, n в (4). Мы имеем формулы (20) для f и аналогичные формулы для g, именно

$$g(0) = -\frac{1}{q}\,G(b;\nu) \quad \text{и} \quad g(c) = g(0)+\overline{\nu}(c)\,e_q(bc^{-1}) \quad \text{для} \quad c \in \mathbb{F}_q^*. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь правую часть (18). С (20), (23) мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{c\in\mathbb{F}_q} f(c)\,g(c)\,e_q(c) = f(0)\,g(0) &\sum_{c\in\mathbb{F}_q} e_q(c) \\ &+ f(0) \sum_{c\in\mathbb{F}_q^*} \overline{\nu}(c)\,e_q(bc^{-1}+c) \\ &+ g(0) \sum_{c\in\mathbb{F}_q^*} \overline{\mu}(c)\,e_q(ac^{-1}+c) \\ &+ \sum_{c\in\mathbb{F}_q^*} \overline{\mu}(c)\,\overline{\nu}(c)\,e_q(ac^{-1}+bc^{-1}+c). \end{aligned}$$

Первая сумма по c в правой части равна 0. Заменив c на c^{-1} в трех других суммах и сравнив с определением (2), мы находим

$$\sum_{c\in\mathbb{F}_q} f(c)\, g(c)\, e_q(c) = f(0)\, Kl(b;\nu) + g(0)\, Kl(a;\mu) + Kl(a+b;\mu\nu). \quad (24)$$

С $f(0)$, $g(0)$ из (20), (23), правая часть в (24) равна

$$-\frac{1}{q}G(a;\mu)\, Kl(b;\nu) - \frac{1}{q}G(b;\nu)\, Kl(a;\mu) + Kl(a+b;\mu\nu),$$

что и требовалось.

4. Доказательство теоремы 2. Начнем с доказательства (7). Мы воспользуемся формулой Парсеваля (17) с

$$\widehat{f}(n) = Kl(an;\mu), \quad \widehat{g}(n) = Kl(bn;\nu).$$

Левая часть (17) равна левой части (7). Мы имеем формулы (19) для f и аналогичные формулы (22) для g. Правая часть (17) равна

$$\sum_{c\in\mathbb{F}_q^*} \mu(a^{-1}c)\, e_q(ac^{-1})\, \overline{\nu(b^{-1}c)\, e_q(bc^{-1})} = \overline{\mu}(a)\, \nu(b) \sum_{c\in\mathbb{F}_q^*} \mu(c)\, \overline{\nu}(c)\, e_q((a-b)c^{-1}),$$

что трансформируется в $\overline{\mu}(a)\,\nu(b)\, G(a-b,\overline{\mu}\nu)$ заменой c на c^{-1}, что и требовалось.

Чтобы доказать (6) воспользуемся формулой Парсеваля (17) с

$$\widehat{f}(n) = Kl(an;\mu)\,\mu(n), \quad \widehat{g}(n) = Kl(bn;\nu)\,\nu(n)$$

для $n \neq 0$, $\widehat{f}(0) = \widehat{g}(0) = 0$. Эти функции являются преобразованиями Фурье функций f и g из (20), (23). Левая часть (17) равна сумме по n в (6). С (20), (23) правая часть (17) есть

$$\begin{aligned}\sum_{c\in\mathbb{F}_q} f(c)\,\overline{g(c)} = f(0)\,\overline{g(0)}\,&\sum_{c\in\mathbb{F}_q} 1\\ &+ f(0)\sum_{c\in\mathbb{F}_q^*}\nu(c)\,e_q(-bc^{-1})\\ &+\overline{g(0)}\sum_{c\in\mathbb{F}_q^*}\overline{\mu}(c)\,e_q(ac^{-1})\\ &+\sum_{c\in\mathbb{F}_q^*}\overline{\mu}(c)\,\nu(c)\,e_q(ac^{-1}-bc^{-1}).\end{aligned}$$

Здесь первая сумма по c в правой части равна q. Заменив c на c^{-1} в других суммах, мы преобразуем их в суммы Гаусса (3). Именно, мы находим что правая часть (17) равна

$$f(0)\,\overline{g(0)}\,q + f(0)\,\overline{G(b;\nu)} + \overline{g(0)}\,G(a;\mu) + G(a-b;\mu\overline{\nu}).$$

Подставив $f(0), g(0)$ из (20), (23), мы получаем правую часть (6).

5. Доказательство следствий. Мы начнем с доказательства следствия 1. Любая из формул (4–5) теоремы 1 с $\mu=\nu=\epsilon$ влечет за собой (a); нужно только заметить, что $G(a;\epsilon)=G(b;\epsilon)=G(\epsilon)=Kl(0)$, см. (9–10). Аналогичным образом (b) следует из формул (6), (7) теоремы 2.

Чтобы доказать следствие 2 нам следует взять $\mu=\kappa$ и затем взять $\nu=\epsilon$ для доказательства (a), (c) и $\nu=\kappa$ для доказательства (b), (d). Ради краткости, рассмотрим детально только пункт (b). Мы применим теорему 1. С $\mu=\nu=\kappa$ мы имеем $\mu\nu=\epsilon$, и формула (4) превращается в

$$\begin{aligned}Kl(a+b) = \frac{1}{q}&\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{F}_q^*\\ m+n=1}} Sl(am)\,Sl(bn)\,\kappa(mn)\\ &+\frac{1}{q}\,Sl(a)\,G(b;\kappa)+\frac{1}{q}\,G(a;\kappa)\,Sl(b),\end{aligned}\tag{25}$$

а формула (5) превращается в

$$\frac{1}{q}\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{F}_q\\ m+n=1}} Sl(am)\,Sl(bn)$$

$$= \kappa(ab) \begin{cases} Kl(a+b), & \text{если} \quad a+b \neq 0, \\ G(\epsilon) & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{26}$$

Ввиду (9–10), имеем $G(\epsilon) = Kl(0)$. Следовательно, (26) совпадает с (b). Если же мы предпочтем вывести (b) из (25), а не из (26), нам следует умножить обе части (25) на $\kappa(ab)$ и заметить, что (14) влечет за собой $Sl(c)\,\kappa(c) = Sl(c)$, и что из (10), (12) следует $\kappa(c)\,G(c;\kappa) = G(\kappa) = Sl(0)$ для всех $c \in \mathbb{F}_q^*$. Так мы получаем

$$\kappa(ab)\,Kl(a+b) = \frac{1}{q} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{F}_q^* \\ m+n=1}} Sl(am)\,Sl(bn) + \frac{1}{q}\,Sl(a)\,Sl(0) + \frac{1}{q}\,Sl(0)\,Sl(b),$$

и остается только включить внешние слагаемые в правой части в сумму по m, n как слагаемые соответствующие парам $(m,n) = (1,0), (0,1)$.

Литература

1. D. H. Lehmer, E. Lehmer, *The cyclotomy of Kloosterman sums*, Acta Arithm. **12**, No. 4 (1967), 385–407.
2. H. Salié, *Über die Kloostermanschen Summen* $S(u,v;q)$, Math. Z. **34** (1931), 91–109.
3. K. Ireland, M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, Second eq. Grad. Texts in Math., 84. Springer-Verlag, 1990.
4. K. S. Williams, *Note on Salié's sum*, Proc. Amer. Math. Soc. **30**, No. 2 (1971), 393–394.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 19 сентября 2003 г.