Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 307, 2003 г.

А. В. Васин

ПРЕДЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО ФУКСОВОЙ ГРУППЫ И ЛЕММА ДЫНЬКИНА

Введение. Пусть G – конечно-порожденная фуксова группа II рода. Предельное множество Λ такой группы является совершенным подмножеством единичной окружности $\mathbb{T}$ нулевой меры. Более того, Х. Поммеренке [7] доказал, что множество Λ является карлесоновым, т.е.

$$\sum |I_n| \log \frac{1}{|I_n|} < \infty,$$

где I_n – дуги, дополнительные к предельному множеству. Определив функцию $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \Lambda)$ – расстояние до Λ, легко понять, что последнее условие эквивалентно суммируемости функции $\log \frac{1}{\rho}$. В дальнейшем Н. А. Широков [5] анонсировал, а О. Семеновой [4] было доказано, что функция $\log \frac{1}{\rho}$ не только суммируема, но принадлежит классу BMO.

Главная цель данной работы – дать другое (более короткое) доказательство этого результата.

Применяемый подход состоит в геометрическом описании подмножеств $E \subset \mathbb{T}$ (без отношения к фуксовым группам), логарифм расстояния до которых принадлежит BMO. Полученная характеризация напоминает известную лемму Дынькина для пористых множеств. Определение пористого множества впервые появилось у А. М. Коточигова [3] и означает, что для любой дуги $I \subset \mathbb{T}$ найдется соизмеримая с ней дуга $J \subset I$, свободная от точек множества E. Леммой Дынькина называется следующее утверждение (которое, правда, в менее общей ситуации есть у Дж. Ленера [6]).

Лемма. *Пусть E – пористое множество в $\mathbb{T}$, тогда для некоторых констант $\alpha > 0$ и $c > 0$ и любой дуги $I \subset \mathbb{T}$ справедлива оценка*

$$\sum |J_k|^{1-\alpha} \leqslant c|I|^{1-\alpha}, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 02-01-00267.

где $UJ_k = I \setminus E$.

Последняя оценка использовалась в [2, 3, 5] в вопросах интерполяции аналитических классов Липшица. Заметим, что, логарифмируя, из (1) можно получить еще одно неравенство для пористых множеств:

$\exists c > 0\ \forall I \subset \mathbb{T}$

$$\sum |J_k| \log \frac{1}{|J_k|} \leqslant |I| \Big(\log \frac{1}{|I|} + c \Big), \tag{2}$$

где $UJ_k = I \setminus E$.

Условия (1) и (2) эквивалентны условию пористости и каждое из них влечет принадлежность функции $\log \frac{1}{\rho}$ классу BMO (на самом деле даже классу BLO функций ограниченной нижней осцилляции). Упомянутая геометрическая характеризация подмножеств E таких, что $\log \frac{1}{\rho} \in$BLO, имеет следующий вид.

Теорема 1. *Пусть* $E \subset \mathbb{T}$. *Следующие условия эквивалентны.*

а) *Множество* E *– слабо пористое, т.е. существуют две константы* c, $\delta > 0$ *такие, что для произвольной дуги* $I \subset \mathbb{T}$ *имеем*

$$\sum |J_k| > c|I|,$$

где сумма распространяется на все поддуги в I, *свободные от точек* E *и такие, что* $|J_k| > \delta |J|$ *для наибольшей свободной поддуги* $J \subset I$.

б) $\log \dfrac{1}{\rho(x)} \in BLO$.

С помощью проверки условия а) теоремы 1, в отношении фуксовых групп доказывается теорема Широкова–Семеновой, сформулированная ниже.

Теорема 2. *Пусть* G *– конечно-порожденная фуксова группа II рода с предельным множеством* Λ, $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \Lambda)$, *тогда*

$$\log \frac{1}{\rho(x)} \in BLO.$$

В ходе доказательства исследуются евклидовы соотношения между сторонами фундаментального многоугольника и выводится еще один результат О. Семеновой [4].

Теорема 3. *Пусть G – конечно-порожденная фуксова группа II рода без параболических элементов, тогда предельное множество Λ пористое.*

Теорема 1.1 доказывается в §1, свойства фундаментальных многоугольников и теорема 3 доказываются в §2. Окончание доказательства теоремы 2 помещено в §3.

Автор признателен Н. А. Широкову и А. М. Коточигову за внимание к работе.

§1. Слабо пористое множество

Пространство BLO (функций ограниченной нижней осциляции) описано в [8] и определяется как множество вещественных функций на $\mathbb{T}$, для которых

$$\sup_I \Big(\frac{1}{I}\int\limits_I f(x)d|x| - \operatorname*{ess\,inf}_{x\in I} f(x)\Big) < \infty.$$

Имеется близкое условие A_1 Макенхаупта для веса v:

$$\sup_I \Big(\frac{1}{I}\int\limits_I v(x)d|x| \cdot \operatorname*{ess\,inf}_{x\in I}\frac{1}{v(x)}\Big) < \infty.$$

Заметим, что если $v \in A^1$, то $\varphi = \log v \in$BLO, и обратно, если $\varphi \in$BLO, то $\varphi \in$BMO, а тогда (по теореме Джона–Ниренбеога) $e^{\varepsilon\varphi} \in A^1$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Обсуждая (слабую) пористость множества E, мы будем употреблять термин "свободная дуга", имея в виду дугу, свободную от точек множества E.

Доказательство теоремы 1. (Импликация б)⇒ а)).

Пусть $\log\frac{1}{\rho} \in$BLO, J – наибольшая из свободных дуг ($J \cap E = \varnothing$), содержащихся в I, тогда

$$\inf_I \ \log\frac{1}{\rho} = \log\frac{2}{|J|}.$$

По определению пространства BLO имеем

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_{|I|} \log\frac{1}{\rho(x)}\, d|x| \leqslant \log\frac{2}{|J|} + c_0$$

с единой константой для всех дуг $I \subset \mathbb{T}$. Вычисляя интеграл, получим

$$\frac{1}{|I|}\sum |J_k|\log\frac{2e}{|J_k|} \leqslant \log\frac{2}{|I|} + c_0,$$

где $\cup J_k = I \setminus E$ – объединение всех свободных дуг в I. Тогда

$$1 + c_0 \geqslant \frac{1}{|I|}\sum |J_k|\log\frac{|J|}{|J_k|} \geqslant \frac{1}{|I|}\sum_{|J_k|<\delta|J|} |J_k|\log\frac{|J|}{|J_k|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{|I|}\log\frac{1}{\delta}\sum_{|J_k|<\delta|J|}|J_k|.$$

Для остальных дуг J_k получим

$$\sum_{|J_k|\geqslant\delta|J|}|J_k| \geqslant \Big(1 - (c_0+1)\Big(\log\frac{1}{\delta}\Big)^{-1}\Big)|I|.$$

Выбирая δ столь малым, чтобы $c = 1 - (c_0+1)(\log\frac{1}{\delta})^{-1} > 0$, получим условие слабой пористости с константами c и δ.

Для доказательства обратной импликации а)$\Leftarrow$б) фиксируем дугу I^0 и пусть $\widetilde{J}^0 \subset I^0$ – наибольшая свободная дуга. Через J_k^0, $k = 1, \dots, \widetilde{k}$, обозначим все свободные дуги в I_0 с условием $|J_k^0| > \delta|\widetilde{J}^0|$. Пусть I_k^1 $(k \leqslant \widetilde{k}+1)$ – дополнительные дуги к J_k^0, лежащие в I^0. Условие слабой пористости дает

$$\sum_k |J_k^0| > c|I^0|,$$

откуда

$$\sum_k |I_k^1| < (1-c)|I^0|.$$

Продолжая подобным образом, на n-м шаге на каждой дополнительной дуге $I^n_{k_1\cdots k_n}$ выберем $\widetilde{k}_{n+1}$ свободных дуг $J^n_{k_1\cdots k_{n+1}}$ так, чтобы для дополнительных к ним свободных дуг $I^{n+1}_{k_1\cdots k_{n+1}}$ выполнялось соотношение

$$\sum_{k_{n+1}}\left|I^{n+1}_{k_1\cdots k_{n+1}}\right| \leqslant (1-c)\left|I^n_{k_1\cdots k_n}\right|. \tag{3}$$

По индукции для всех дополнительных дуг n-го шага получаем

$$\sum_{k_1\cdots k_{n+1}}\left|I^{n+1}_{k_1\cdots k_{n+1}}\right| \leqslant (1-c)^{n+1}|I^0|.$$

Оценим на n-м шаге сумму свободных дуг $J^n_{\dots}$ через сумму дуг $I^n_{\dots}$, их содержащих, тогда по неравенству Гёльдера с $0 < \alpha < 1$ получим

$$\sum_m \sum_{k_1\cdots k_{n+1}} \left|J^n_{k_1\cdots k_{n+1}}\right|^{1-\alpha} \leqslant \sum_m \Big(\sum_{k_1\cdots k_{n+1}} \left|J^n_{k_1\cdots k_{n+1}}\right|\Big)^{1-\alpha} \#_n^\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \sum_m \Big(\sum_{k_1\cdots k_n} \left|I^n_{k_1\cdots k_n}\right|\Big)^{1-\alpha} \#_n^\alpha \leqslant \sum_n (1-c)^{n(1-\alpha)} I_0^{1-\alpha} \#_n^\alpha,$$

где $\#_n$ – число свободных дуг n-го шага, которое требует дальнейшей оценки. Все это следует рассуждениям статьи [2], где далее использовалась оценка $\#_n \leqslant 2^n$, так как для пористого множества на каждой дуге бралась одна наибольшая свободная. Мы докажем теорему, как только подберем константу c_1, не зависящую от дуги I^0, так, чтобы

$$\#_m < c_1^n \cdot \frac{I_0}{\widetilde{J}_0}. \tag{4}$$

Предположив, что оценка (4) получена, за счет выбора $\alpha > 0$ добъемся, чтобы

$$\lambda = (1-c)^{1-\alpha} c_1^\alpha < 1.$$

Тогда для суммы по всем свободным дугам

$$\sum \left|J_k\right|^{1-\alpha} \leqslant \left|I_0\right|^{1-\alpha} \frac{|I_0|}{|\widetilde{J}_0|} \sum \lambda^k \leqslant \frac{1}{1-\lambda} \frac{|I_0|}{|\widetilde{J}_0|^\alpha},$$

что дает нам условие Макенхаупта $\frac{1}{\rho^\alpha} \in A^1$. Логарифмируя, получим требуемое включение $\log\frac{1}{\rho} \in$BLO.

Итак, осталось доказать экспоненциальную оценку (4). Нам потребуются два факта.

Лемма 1. *Пусть I^{n+1} – одна из дополнительных дуг, смежная со свободной дугой J^n на n-м шаге. Тогда для наибольшей свободной дуги $\widetilde{J}^{n+1} \subset I^{n+1}$ верно одно из неравенств:*

$$1) \qquad |\widetilde{J}^{n+1}| > \delta |J^n|,$$
$$2) \qquad |\widetilde{J}^{n+1}| > \delta c |I^{n+1}|.$$

Доказательство. Если условие 1) не выполнено, тогда J^n – наибольшая свободная дуга для дуги $I = J^n \cup I^{n+1}$. Для остальных дуг в I получим $|J_k^{n+1}| < \delta|J^n|$. Ввиду слабой пористости $|J^n| > c(|J^n| + |I^{n+1}|)$. Уменьшая дугу J^n до дуги J так, чтобы $|J| = c(|J| + |I^{n+1}|)$, видим, что обязательно найдется дуга $J_k^{n+1} \subset I^{n+1}$ с условием

$$|J_k^{n+1}| > \delta|J| = \delta c\Big(|I^{n+1}| + |J|\Big) \geqslant \delta c|I^n|,$$

что и требовалось.

Лемма 2. *Пусть I – дуга, $J_1, \dots, J_{\widetilde{k}}$ – свободные дуги в I такие, что $|J_k| > \delta|\widetilde{J}|$ для наибольшей свободной дуги $\widetilde{J} \subset I$, тогда*

$$\widetilde{k} \leqslant \frac{|I|}{\delta|\widetilde{J}|}.$$

Доказательство. Очевидно, $\widetilde{k}\delta|\widetilde{J}| \leqslant \sum |J_k| \leqslant |I|$. Закончим доказательство теоремы:

$$\#_n = \sum_{k_1\cdots k_{n+1}} 1 = \sum_{k_1\cdots k_n} \widetilde{k}_{n+1} \leqslant \sum_{k_1\cdots k_n} \frac{\big|I^n_{k_1\cdots k_n}\big|}{\delta\big|\widetilde{J}^n_{k_1\cdots k_n}\big|} \text{ (по лемме 2)}$$
$$= \sum_{k_1\cdots k_{n-1}} \sum_{k_n} \frac{\big|I^n_{k_1\cdots k_n}\big|}{\delta\big|\widetilde{J}^n_{k_1\cdots k_n}\big|}.$$

Разобъем внутреннюю сумму на две согласно лемме 1 ($\sum'$ распространяется на те индексы, для которых $\big|\widetilde{J}^n_{k_1\cdots k_n}\big| \geqslant \delta\big|\widetilde{J}^{n-1}_{k_1\cdots k_n}\big|$, а $\sum''$ – соответственно, на те индексы, для которых $\big|\widetilde{J}^n_{k_1\cdots k_n}\big| \geqslant c\delta\big|I^n_{k_1\cdots k_n}\big|$):

$$= \sum_{k_1\cdots k_{n-1}} \Big(\sum' + \sum''\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k_1\cdots k_{n-1}} \left(\frac{1}{\delta^2}\sum' \frac{\big|I^n_{k_1\cdots k_n}\big|}{\big|J^{n-1}_{k_1\cdots k_n}\big|} + \frac{1}{\delta^2 c}\sum'' 1\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k_1\cdots k_{n-1}} \left(\frac{1}{\delta^3} \cdot \frac{1}{\big|\widetilde{J}^{n-1}_{k_1\cdots k_{n-1}}\big|} \cdot \sum' \big|I^n_{k_1\cdots k_n}\big| + \frac{1}{\delta^2 c}\,\widetilde{k}_n\right).$$

Применяя для первого слагаемого внутри суммы оценку (3), а для второго слагаемого – лемму 2, продолжим

$$\leqslant \sum_{k_1\cdots k_{n-1}} \Big(\frac{1-c}{\delta^3}+\frac{1}{\delta^3 c}\Big)\ \frac{\big|I^{n-1}_{k_1\cdots k_{n-1}}\big|}{\big|\widetilde{J}^{n-1}_{k_1\cdots k_{n-1}}\big|}.$$

По индукции выводим, что

$$\#_n \leqslant \frac{1}{\delta}\Big(\frac{1-c}{\delta^2}+\frac{1}{\delta^2 c}\Big)^n\ \frac{|I^0|}{|\widetilde{J}^0|},$$

и оценка (4) получена с константой

$$c_1 = \frac{1-c}{\delta^2}+\frac{1}{\delta^2 c}.$$

§2. Свойства фундаментальных многоугольников

Пусть P – фундаментальный многоугольник Дирихле конечнопорожденной группы G II рода. Необходимые нам свойства таких многоугольников можно найти в книге [1].

Предложение 1. 1) *$g(P)\cap P=\varnothing$, $g\neq I$, $g\in G$;*

2) $\overline{U\{g(P): g\in G\}}=\overline{\mathbb{D}}$*;*
3) *для любой последовательности различных элементов $g_n\in G$ имеем $\operatorname{diam} g_n(P)\to 0$ при $n\to\infty$;*
4) *P – гиперболически выпуклое множество;*
5) *P имеет конечное число сторон и вершин.*

Стороны многоугольника – это либо отрезки геодезических, либо – свободные стороны, лежащие на $\mathbb{T}$. Вершины многоугольника, лежащие в $\mathbb{D}$, являются обыкновенными точками (принадлежащими области разрывности $\Omega=\overline{\mathbb{D}}\setminus\Lambda$ группы G). Некоторые из них – это неподвижные точки эллиптических элементов группы G. Вершины многоугольника, лежащие на окружности $\mathbb{T}$, в которых сходятся две геодезических, называются собственными вершинами и являются неподвижными точками параболических элементов группы G. Обе вершины свободной стороны называются несобственными вершинами и принадлежат множеству разрывности.

Фиксируем многоугольник Дирихле P_0. Определим инвариант двойного отношения [4]:

$$\eta = \inf \left\{ \frac{|\alpha-\beta|\ |\gamma-\delta|}{|\alpha-\gamma|\ |\beta-\delta|}, \right.$$

$$\left. \alpha,\beta,\gamma,\delta - \text{различные вершины многоугольника} \quad P_0 \right\}.$$

Для конечно-порожденной группы эта величина строго положительная и сохраняется под действием группы G. Еще один инвариант ξ_0 получим как нижнюю грань углов в непараболических вершинах многоугольника P_0. Пусть $V = V(P)$ – множество вершин многоугольника $P = g(P_0)$, $g \in G$.

Предложение 2. *Для некоторой константы c_0, для любого многоугольника P и любой пары его вершин $\alpha,\beta \in V$ либо $\operatorname{diam} V \leqslant c_0|\alpha-\beta|$, либо найдется такая вершина $\gamma \in \mathbb{T}$, что для остальных вершин $\operatorname{diam} V \setminus \gamma \leqslant c_0|\alpha-\beta|$.*

В предложении утверждается, что у любого многоугольника может быть не более одной вершины на $\mathbb{T}$, удаленной от остальных.

Доказательство. Предполагая, что найдется пара удаленных вершин, придем к противоречию. Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть в многоугольнике P нашлись две пары вершин $\{\alpha,\beta\}$ и $\{\gamma,\delta\}$ такие, что для евклидовых расстояний выполнена оценка

$$|\alpha-\beta| < \varepsilon \operatorname{dist}(\{\alpha,\beta\};\{\gamma,\delta\}).$$

Тогда для инварианта η имеем:

$$\begin{aligned}
\eta &\leqslant \frac{|\alpha-\beta|\ |\gamma-\delta|}{|\alpha-\gamma|\ |\beta-\delta|} \leqslant (\text{по неравенству треугольника}) \\
&\leqslant \frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha-\gamma|\ |\beta-\delta|}\big(|\gamma-\alpha| + |\alpha-\beta| + |\beta-\delta|\big) \leqslant \\
&\leqslant |\alpha-\beta|\Big(\frac{1}{|\beta-\delta|} + \frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha-\gamma|\ |\beta-\delta|} + \frac{1}{|\alpha-\gamma|}\Big) \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon^2,
\end{aligned}$$

что противоречит произвольности числа ε.

Осталось показать, что если многоугольник все-таки имеет удаленную вершину, то эта вершина обязательно лежит на $\mathbb{T}$. Заметим, что уже сейчас имеется такая константа, что для любого многоугольника, для любой его пары вершин $\{\alpha,\beta\}$ и для

всех его вершин кроме, быть может, одной вершины γ, выполняется оценка
$$\operatorname{diam} V \setminus \gamma \leqslant c_1|\alpha-\beta|.$$
Предположим, что удаленная вершина γ не является концом свободной стороны, и покажем, что в этом случае γ – собственная вершина. У многоугольника P обязательно имеется свободная сторона, а γ является общим концом двух сторон – отрезков геодезических. Пусть A и B – точки пересечения этих геодезических с $\mathbb{T}$ такие, что многоугольник P содержится в треугольнике γAB, ограниченном отрезками геодезических γA и γB и свободной стороной AB. Очевидно, $\alpha B \subset AB$.

Лемма 3. $|A-B| \leqslant c_1(1+\pi)|\alpha-\beta|$.

Доказательство. Многоугольник P имеет на геодезических γA и γB еще по одной вершине (кроме γ) a и b, соответственно. Вершина a по доказанной части предложения лежит вблизи $\alpha\beta$:
$$\operatorname{dist}(a;\{\alpha,\beta\}) \leqslant c_1|\alpha-\beta|,$$
и далеко от вершины γ:
$$|\alpha-\gamma| \geqslant \operatorname{dist}(\gamma;\{\alpha,\beta\}) - c_1|\alpha-\beta|;$$
поэтому $|a-b| \leqslant \frac{\pi}{2}c_1|\alpha-\beta|$. Аналогично, для точек b и B получаем: $|b-B| \leqslant \frac{\pi}{2}c_1|\alpha-\beta|$. Поэтому
$$|A-B| \leqslant |A-a|+|a-b|+|b-B| \leqslant (1+\pi)c_1|\alpha-\beta|.$$

Закончим доказательство предложения 2.1. Если удаленная вершина γ лежит внутри $\mathbb{D}$, тогда геодезические γA и γB пересекаются под углом ξ. Пусть $\xi=\pi$, тогда кривая $A\gamma B$ – одна геодезическая и
$$\operatorname{dist}(\gamma;\{\alpha,\beta\}) \leqslant \frac{\pi}{2}|A-B| \leqslant \frac{\pi}{2}(1+\pi)c_1|\alpha-\beta|.$$
Если же $0<\xi<\pi$, то, кроме точек A и B, имеются еще две точки A' и B' пересечения геодезических γA и γB с $\mathbb{T}$. Будем считать, что точки на окружности расположены в порядке A, B, A', B'. Для угла ξ (см. [1]) имеем
$$\sin^2\frac{\xi}{2} = \frac{|A-B|\,|A'-B'|}{|A-A'|\,|B-B'|}.$$

Так как при таком порядке следования точек справедливо неравенство $|A'B'| \leqslant |BB'|$, то

$$|A-B| \geqslant \sin^2\frac{\xi_0}{2}|A-A'| \geqslant \sin^2\frac{\xi}{2}\operatorname{dist}(\gamma;\{\alpha,\beta\}),$$

поскольку точки γ, α, β лежат внутри круга диаметра $|A-A'|$. Тогда по лемме 3, пользуясь инвариантом ξ_0 углов, находим:

$$\frac{(1+\pi)c_1}{\sin^2\frac{\xi_0}{2}}\,|\alpha-\beta| \geqslant \operatorname{dist}\{\gamma;\{\alpha,\beta\}),$$

и поэтому вершина γ не может быть удаленной от $\{\alpha,\beta\}$. Определив $c_0 = c_1^2 \max\left(\dfrac{1+\pi}{\sin^2(\frac{\xi_0}{2})}; \pi(1+\pi)\right)$, получим все утверждения предложения 1.

Лемма 4. *Для любой дуги I найдется многоугольник P со свободной стороной $J\cap I \neq \varnothing$ и такой, что* $\operatorname{diam} P \geqslant c_2|I|$, *где c_2 не зависит от I.*

Доказательство. В противном случае для любого $\varepsilon > 0$ найдется дуга I такая, что для любого многоугольника P, свободная сторона которого пересекается с I, имеем $\operatorname{diam} P < \varepsilon|I|$. Множество Q таких многоугольников содержится в полосе шириной $\varepsilon|I|$, примыкающей к дуге I. Возьмем внешнюю огибающую (от дуги I) множества Q. Можно считать, что полоса – это множество точек $\{z = ze^{i\varphi} : |e^{i\varphi}-1| \leqslant \frac{|I|}{2}; r > 1-\varepsilon|I|\}$. В прямоугольнике $\{z = re^{i\varphi} : |e^{i\varphi}-1| < \varepsilon|I|, r > 1-\varepsilon|I|\}$ возьмем часть этой огибающей, являющейся стороной $\alpha\beta$ одного из многоугольников $P \in Q$. Такая сторона найдется, так как множество фундаментальных многоугольников не имеет предельных в $\mathbb{D}$. Пусть P_1 – многоугольник, граничащий с O по стороне $(\alpha\beta)$, тогда $P_1 \notin Q$ и его свободная сторона $\gamma\delta$ не пересекается с I. Тогда для его вершин $\{\alpha,\beta\}$ и $\{\gamma,\delta\}$ нарушается предложение 1 при $\varepsilon < c_0$.

Теперь все готово для доказательства теоремы 3. Описанная конструкция будет повторена при доказательстве теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Пусть группа G не содержит параболических элементов. Предположим, что предельное множество Λ не является пористым, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая дуга I, что для наибольшей свободной дуги $J \subset I$ имеем $|J| < \varepsilon|I|$.

Если существует такая свободная дуга J_0, что $J_0 \cap I = J$, то удалим дугу J из I. Поступив так с каждым из концов дуги I (по необходимости), получим новую дугу $\widetilde{I}$, $|\widetilde{I}| > (1-2\varepsilon)|I|$. Выберем многоугольник $\widetilde{P}$ (по лемме 4) с $\operatorname{diam} \widetilde{P} \geqslant c_2|\widetilde{I}|$. Так как для любой свободной стороны J этого многоугольника, лежащей в $\widetilde{I}$, $|J| < \varepsilon|I|$, то P имеет единственную удаленную вершину γ (несобственную) и свободную сторону $\gamma\delta$, так что $|\gamma - \delta| > (c_2(1-2\varepsilon) - c_0\varepsilon)|I|$. Сторона $\gamma\delta$ не содержится в $\widetilde{I}$, но вершина δ близка к остальным вершинам многоугольника P, а значит к одному из концов α дуги $\widetilde{I}$. Еще раз удалим из дуги $\widetilde{I}$ наименьшую дугу, содержащую все вершины многоугольника $\widetilde{P}$, за исключением γ. Поступив так с каждым из концов, получим новую дугу $\tilde{\widetilde{I}}$, $|\tilde{\widetilde{I}}| > (1 - 2\varepsilon - 2c_0\varepsilon)|I|$. Больше удалять ничего не требуется. Выберем по лемме 4 многоугольник $\tilde{\widetilde{P}}$ для дуги $\tilde{\widetilde{I}}$. Он имеет свободую сторону $\gamma'\delta'$ с далекой от дуги $\tilde{\widetilde{I}}$ вершиной $\gamma'(|\gamma' - \delta'| > c'|I|)$ и близкой δ'. Тогда дуги $\gamma'\delta'$ и $\gamma\delta$ пересекаются, что противоречит основному свойству фундаментальных многоугольников. Теорема 3 доказана.

§3. Доказательство теоремы 2

Пусть группа G содержит параболические элементы. Наша цель – для произвольной дуги I оценить сумму $\sum |J_k|$ свободных дуг J_k таких, что дуги J_k соизмеримы с самой большой свободной дугой $J \subset I$. Предположим, что множество Λ не является пористым; вообще говоря, это так для группы с параболическими элементами, но мы пока этого не знаем. Пусть для любой свободной дуги $J \subset I$ имеем $|J| < \varepsilon|I|$. Применим конструкцию удаления крайних свободных дуг из I (размеров $< \varepsilon|I|$), следуя теореме 3. Получим, что существует многоугольник P с $\operatorname{diam} P > c|I|$ и γ – удаленная собственная вершина многоугольника P. Переведем дробно-линейным преобразованием окружность $\mathbb{T}$ в вещественную прямую $\mathbb{R}$ так, чтобы точка γ перешла в 0, а $-\gamma$ в ∞, 0 в i. Параболический элемент, связанный с γ, перейдет в преобразование $g(z) = \frac{z}{rz+1}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Если ограничиться только малыми дугами окружности (длины не выше $\pi/2$), то все расстояния на прямой изменятся не более, чем в k раз (с универсальной константой). Итак, имеем дугу $I \subset \mathbb{R}$ и многоугольник P_0 со свободной стороной $J = (\alpha, \beta) \subset I$, причем $|J| < \varepsilon|I|$, $\operatorname{diam} P_0 > c|I|$.

Пусть $\Delta_0 = (0, \alpha_0, \alpha_1)$ – криволинейный треугольник, ограниченный геодезическими $(0, \alpha_0)$ и $(0, \alpha_1)$ и отрезком $(\alpha_0, \alpha_1) \subset \mathbb{R}$ и содержащий многоугольник P_0. Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_0$. Рассмотрим орбиту $\{\alpha_n = g^n(\alpha_0)\}$ точки α_0. Так как $\operatorname{diam} P_0 > c|I|$, то $|\alpha_0| > c|I|$. Для дуги (α_0, α_1) получим $|\alpha_0 - \alpha_1| < c_1|J_0| < c_1\varepsilon|I|$, откуда

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \frac{r\alpha_0^2}{r\alpha_0 + 1} < \frac{c_1}{c_2}\varepsilon\alpha_0.$$

Следовательно, $r\alpha_0 < 2\frac{c_1}{c_2}\varepsilon$. Не теряя общности, считаем, что α_0 – наибольшая по абсолютной величине точка орбиты, содержащаяся в I. Так как $\frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{\alpha_k} \to 0$ (что, кстати, и нарушает пористость множества Λ) при $k \to +\infty$, то для многоугольника $P_k = g^k(P_0)$ и его свободной стороны $J_k \subset (\alpha_k, \alpha_{k-1})$ вершина 0 также является удаленной, откуда $\alpha_{k-1} - \alpha_k < c_0|J_k|$. Выберем число n такое, что $\frac{1}{r\alpha_0} \leqslant b < \frac{2}{r\alpha_0}$, тогда $\alpha_n = \frac{\alpha_0}{nr\alpha_0 + 1} \in [\frac{\alpha_0}{3}; \frac{\alpha_0}{2}]$, а для дуги $(\alpha_k\alpha_{k-1})$ при $k = 1, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned}|\alpha_k - \alpha_{k-1}| &= \frac{r\alpha_0^2}{(kr\alpha_0 + 1)((k-1)r\alpha_0 + 1)} \geqslant \frac{1}{9}r\alpha_0^2 = \\ &= \frac{1}{9}|\alpha_0 - \alpha_1| \cdot (1 + r\alpha_0) \geqslant \frac{1}{9}|\lambda_0 - \alpha_1|.\end{aligned}$$

Поэтому для суммы свободных дуг многоугольников P_k при $k = 1, \dots, n$ справедливы оценки

$$\sum_{k=1}^{n} |J_k| \geqslant \frac{c_0}{2}|I| \quad \text{и} \quad |J_k| > \frac{c_0}{9}|J_0|,$$

независимо от того, принадлежит точки 0 дуге I или нет.

Осталось показать, что дуга $J_0 \subset (\alpha_1, \alpha_0)$ соизмерима с самой большой дугой $\widetilde{J} \subset I$. Конструкция многоугольника не использовала самую большую дугу. Заметим, что если обе дуги $\widetilde{J}$ и J_0 лежат по одну сторону от 0, то из включения $\widetilde{J} \subset (\alpha_{k-2}, \alpha_k)$ для некоторого k выводим

$$\begin{aligned}|\widetilde{J}| &\leqslant |\alpha_{k-2} - \alpha_k| \leqslant |\alpha_0 - \alpha_{-2}| = \\ &= \frac{r\alpha_0^2}{1 - 2r\alpha_0} = |\alpha_0 - \alpha_1|\frac{1 + r\alpha_0}{1 - 2r\alpha_0} \leqslant c'|J_0|,\end{aligned}$$

так как $r\alpha_0 < \varepsilon$.

Если же дуги $\widetilde{J}$ и J_0 лежат по разные стороны от 0, то $\widetilde{J} \subset (\alpha_{-n+2}; \alpha_{-n})$.

Пусть β_0 – наиболее далекая от точки 0 слева точка орбиты $\{\alpha_n\}$ и пусть $\beta_1 = g^{-1}(\beta_0)$. Если $|\beta_0 - \beta_1| > |\alpha_0 - \alpha_1|$, то

$$\frac{r|\beta_0|^2}{1 + r|be_0|} > \frac{r|\alpha_0|^2}{1 + r|\alpha_0|}.$$

Но функция $f(x) = \frac{rx^2}{1+rx}$ возрастает при $x > 0$, поэтому $|\beta_0| > \alpha_0$ – противоречие с выбором α_0. Поэтому для дуги $\widetilde{J}$ справедлива еще и оценка $|\widetilde{J}| < |\alpha_0 - \alpha_{-2}|$ и далее, по доказанному, получаем, что $|\widetilde{J}| < c'|J_0|$.

Таким образом, для всех дуг I (длины не больше $\pi/2$) и таких, что в них нет свободных дуг J с $|J| > \varepsilon|I|$, условие слабой пористости доказано. Поскольку для остальных дуг это условие, очевидно, выполняется, теорема 2 доказана полностью. $\square$

Литература

1. А. Бердон, *Геометрия дискретных групп.* Наука, М. (1986).
2. Е. М. Дынькин, *Множества свободной интерполяции для классов Гёльдера.* — Мат. сборник **109(151)**, No. 1(5) (1979), 107–128.
3. А. М. Коточигов, *Интерполяция аналитическими функциями, гладкими вплоть до границы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **30** (1972), 167–169.
4. О. Л. Семенова, *Некоторые свойства предельных множеств фуксовых групп.* Дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук, СПГУ, С.-Петербург (1999).
5. Н. А. Широков, *Фуксовы группы с карлесоновыми предельными множествами.* — Функц. анализ и его прил. **24**, No. 24 (1990), 92–93.
6. J. Lehner, *Discontinuous groups and automorphic function.* — Providence: AMS (1964).
7. Ch. Pommerenke, *On automorphic forms and Carleson sets.* — Michigan Math. J. **23**, 2 (1976), 129–136.
8. Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции.* Мир, М. (1984).

Vasin A. V. The limit set of a Fuchsian group and Dyn'kin's lemma.

A geometric description (like Dyn'kin's lemma for the porous sets) of the sets $E \subset \mathbb{T}$ such that $\log \operatorname{dist}^{-1}(x, E)$ has bounded lower oscillation (BLO) is given. As a corollary, a new proof of the Shirokov–Semenova theorem on the limit set of a finitely generated Fuchsian group of the second kind is obtained.

С.-Петербургский государственный
университет водных коммуникаций

Поступило 25 ноября 2003 г.