Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 303, 2003 г.

Е. С. Дубцов

ОГРАНИЧЕННЫЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ШАРЕ

1. Введение

Рассмотрим комплексный шар $B = B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, $n \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{P}$ обозначает множество голоморфных многочленов в $\mathbb{C}^n$ и $\mathcal{H}ol(B)$ обозначает пространство голоморфных функций в B. Предположим, что линейное топологическое пространство $X \subset \mathcal{H}ol(B)$ замкнуто относительно умножения на многочлены $p \in \mathcal{P}$. Элемент $f \in X$ называется циклическим (слабо обратимым) в X, если произведение $f\mathcal{P}$ плотно в X.

В данной работе изучаются *ограниченные* циклические элементы в пространствах Бергмана $A^p(B)$, $0 < p < \infty$. Пусть $\nu = \nu_n$ обозначает меру Лебега в $\mathbb{C}^n$, нормированную условием $\nu(B) = 1$. По определению

$$A^p = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(B) \colon \|f\|_{A^p}^p = \int\limits_B |f(z)|^p \, d\nu(z) < \infty \right\}.$$

Для удобства изложения обозначим символом $PM(S)$ множество всех плюригармонических мер на сфере $S = \partial B$. По определению $\mu \in PM(S)$, если интеграл Пуассона

$$P[\mu](z) = \int\limits_S P(z,\zeta)\, d\mu(\zeta) = \int\limits_S \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^{2n}}\, d\mu(\zeta)$$

является плюригармонической функцией при $z \in B$. Также положим по определению $PM_+(S) = \{\mu \in PM(S) : \mu \geqslant 0\}$.

Итак, рассмотрим в A^p циклический элемент f. Имеем $f(z) \neq 0$ для всех $z \in B$, поэтому $\log|f|$ является плюригармонической функцией в шаре. Предположим, что $\|f\|_\infty \leqslant 1$, тогда $-\log|f| \geqslant 0$.

Работа поддержана грантами для молодых кандидатов наук PD02-1.1-7 Министерства образования РФ и PD03-1.1-107 Администрации Санкт-Петербурга.

Следовательно, $-\log|f| = P[\mu]$ для некоторой меры $\mu \in PM_+(S)$. Рассмотрим голоморфную функцию

$$F_\mu(z) = \exp\left(-\int\limits_S \left[\frac{2}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^n} - 1\right] d\mu(\zeta)\right), \quad z \in B.$$

Так как $\mu \in PM_+(S)$, то $\log|F_\mu| = -P[\mu] = \log|f|$. Следовательно, $f = \lambda F_\mu$ для некоторой унимодулярной константы $\lambda \in \mathbb{C}$. Таким образом, изначальный вопрос сводится к исследованию свойства цикличности для функции F_μ в терминах меры μ.

Отметим, что F_μ является классической сингулярной внутренней функцией, если $n = 1$ и μ – положительная сингулярная мера на единичной окружности. В этом случае полное описание циклических функций F_μ было получено Дж. Робертсом [1]. Также такое описание следует из результатов работы Б. Коренблюма [2].

Напомним, что вещественным модулем непрерывности меры μ называется функция

$$\omega(\mu; t) = \sup_{\zeta\in S} \mu(E(\zeta, t)) \quad (t > 0),$$

где $E(\zeta, t) = \{\xi \in S : |\zeta - \xi| < t\}$.

Результаты статьи [3] показывают, что функция F_μ является циклической в $A^p(B)$, $0 < p < \infty$, если $\omega(\mu; t) = O(t^{2n-1}\log\frac{1}{t})$. В настоящей работе будет получено менее ограничительное достаточное условие, которое можно считать дискретизацией оценки $\omega(\mu; t) = O(t^{2n-1}\log\frac{1}{t})$. Строгая формулировка дана ниже в §3.

2. Вспомогательные результаты

Так как многочлены плотны в пространствах Бергмана и функция F_μ ограничена, то цикличность вектора F_μ равносильна свойству $\|f_n F_\mu - 1\|_{A^p} \to 0$ для некоторых $f_n \in A^p$. Для упрощения технических деталей далее предполагается, что $p = 1$. В этом случае аппроксимационная конструкция основана на следующем результате, который называют теоремой о короне в пространстве Харди $H^2(B)$.

Теорема 2.1 ([4]). *Пусть n, $J \geqslant 2$ и $f \in H^2(B)$. Предположим,* *что* $h_1, \dots, h_J \in H^\infty(B)$ *и*

$$1 \geqslant \sum_{j=1}^{J} |h_j(z)|^2 \geqslant \delta^2 > 0 \quad (z \in B),$$

где $\delta^2 \leqslant 1/4$. *Тогда существуют такие функции* $g_1, \dots, g_J \in H^2(B)$, *что*

$$\sum_{j=1}^{J} h_j g_j = f$$

и $\|g_j\|_{H^2} \leqslant \delta^{-T}$, *где* $T = T(n, J) > 0$.

Два следующих результата доставляют функции, удовлетворяющие условиям теоремы об H^2-короне.

Теорема 2.2 ([5]). *Пусть* $n \geqslant 2$. *Тогда для всех* $k \in \mathbb{N}$ *существуют такие однородные голоморфные многочлены* p_k^j, $1 \leqslant j \leqslant J(n)$, *что*

$$\deg p_k^j = k;$$

$$1 \geqslant \sum_{j=1}^{J(n)} |p_k^j(z)|^2 \geqslant \Delta^2(n) > 0 \quad \text{при} \quad |z| = 1.$$

Подчеркнем, что в последнем утверждении величины $J = J(n)$ и $\Delta = \Delta(n)$ не зависят от k. Следовательно, существуют $\alpha > 0$ и $k_0 = k_0(n) \in \mathbb{N}$, $k_0 \geqslant 2$, такие, что при $k \geqslant k_0$ имеет место оценка

$$J^2 \int_B |z|^{2k} \, d\nu(z) \leqslant k^{-2\alpha}.$$

Предложение 2.3. *Пусть* $0 < \rho \leqslant 3/4$. *Предположим, что мера* $\mu \in PM_+(S)$ *удовлетворяет условию* $\omega(\mu; \rho) \leqslant c_1 \rho^{2n-1} \log \frac{1}{\rho}$. *Тогда*

$$|F_\mu(z)| \geqslant \rho^{c_1 c_2}$$

при $|z| \leqslant 1 - \rho$ *для универсальной константы* $c_2 = c_2(n) > 0$.

Доказательство. Прежде всего оценим $\omega(\mu; 2^k\rho)$ для $k \in \mathbb{N}$. Для этого зафиксируем точку $\zeta \in S$ и рассмотрим шар $E_k = \{\xi \in S : |\zeta - \xi| < 2^k \rho\}$. Пусть $\{\zeta_m\}_{m=1}^M$ – максимальный набор точек из E_k, удовлетворяющих условию $|\zeta_j - \zeta_m| \geqslant \rho$ при $j \neq m$. Отметим, что шары $E(\zeta_j, \rho/2)$ не пересекаются и $(2n-1)$-мерный объем каждого из них равен $C(n)\rho^{2n-1}$. Так как $E(\zeta_j, \rho/2) \subset E(\zeta, (2^k+1)\rho)$, то получаем $M \leqslant C(n)2^{k(2n-1)}$. Теперь заметим, что шары $E(\zeta_j, \rho)$ покрывают множество E_k. Следовательно,

$$\omega(\mu; 2^k\rho) \leqslant C(n)2^{k(2n-1)}\omega(\mu; \rho).$$

Дальнейшие рассуждения являются стандартными. Пусть $\xi \in S$, тогда

$$-\log|F_\mu((1-\rho)\xi)| = \int\limits_S P((1-\rho)\xi, \zeta)\, d\mu(\zeta).$$

Для всех ξ, $\zeta \in S$ и всех $\rho \in [0,1]$ неравенство

$$C|(1-\rho)\xi - \zeta|^2 \geqslant \rho^2 + |\xi - \zeta|^2$$

имеет место для некоторой константы $C > 0$.

Следовательно,

$$P((1-\rho)\xi, \zeta) \leqslant \frac{C\rho}{\left(\rho^2 + |\xi-\zeta|^2\right)^n}.$$

Запишем интеграл по сфере в виде суммы интегралов по непересекающимся множествам $E(\xi, \rho)$ и $E\left(\xi, 2^{k+1}\rho\right) \setminus E\left(\xi, 2^k\rho\right)$, $k \geqslant 0$. Тогда оценки для $P((1-\rho)\xi, \zeta)$ и $\omega(\mu; 2^k\rho)$ гарантируют неравенства

$$\begin{aligned}
&-\log|F_\mu((1-\rho)\xi)| \\
&\leqslant c_1 C(n) \log\frac{1}{\rho}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(2^k\rho\right)^{2n-1}\frac{\rho}{\left(\rho^2 + 2^{2k-2}\rho^2\right)^n}\right) \\
&\leqslant c_1 C(n) \log\frac{1}{\rho}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2kn-k}}{1 + 2^{(2k-2)n}}\right) \leqslant c_1 C(n)\log\frac{1}{\rho}.
\end{aligned}$$

Иными словами, имеем $|F_\mu(z)| \geqslant \rho^{c_1 C(n)}$ при $|z| = 1 - \rho$. Если $|z| < 1-\rho$, то неравенство выполнено в силу принципа максимума для $1/F_\mu$. □

Выше были зафиксированы константы T, Δ, α и c_2. Положим

$$c_0 = \frac{\alpha}{3c_2T}; \quad K = \max\{k_0, (4/\Delta)^{1/c_0c_2}\}.$$

3. Приближение с помощью теоремы о короне

Дж. Робертс [1] использовал классическую теорему о короне для аппроксимации в пространствах Бергмана в единичном круге. Многомерная теорема о короне по-прежнему остается открытым вопросом. Поэтому для изучения цикличности в шаре ниже будет использована теорема об H^2-короне.

Лемма 3.1. *Пусть $f \in H^2(B)$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant K$. Предположим, что $\mu \in PM_+(S)$ и*

$$\omega\,(\mu; 1/k) \leqslant c_0 \frac{\log k}{k^{2n-1}}.$$

Тогда существует такая функция $g \in H^2(B)$, что $\|g\|_{H^2} \leqslant k^{\alpha/3}\|f\|_{H^2}$ и

$$\|F_\mu g - f\|_{A^1} \leqslant k^{-2\alpha/3}\|f\|_{H^2}.$$

Доказательство. С одной стороны, в силу предложения 2.3 оценка $|F_\mu(z)| \geqslant k^{-c_0 c_2}$ имеет место при $|z| \leqslant 1 - 1/k$.

С другой стороны, с помощью теоремы 2.2 построим однородные многочлены p_k^j. Имеем $\deg p_k^j = k$, следовательно, при $1 - 1/k \leqslant |z| < 1$ получаем

$$\sum_{j=1}^{J} |p_k^j(z)|^2 \geqslant \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2k} \Delta^2 \geqslant \frac{\Delta^2}{16} \geqslant k^{-2c_0 c_2},$$

так как $k \geqslant K$. Объединяя две оценки, получаем

$$|F_\mu(z)|^2 + \sum_{j=1}^{J} |p_k^j(z)|^2 \geqslant k^{-2c_0 c_2}$$

для всех $z \in B$. Следовательно, по теореме об H^2-короне для $\delta = k^{-c_0 c_2} \leqslant 1/4$ существуют такие функции $g_j \in H^2$, $0 \leqslant j \leqslant J$, что

$$F_\mu g_0 + \sum_{j=1}^{J} p_k^j g_j = f$$

и $\|g_j\|_{H^2} \leqslant k^{T c_0 c_2}\|f\|_{H^2} = k^{\alpha/3}\|f\|_{H^2}$ по определению константы c_0.

Отметим, что $|p_k^j(z)| \leqslant |z|^k$ и $\|g_j\|_{A^2} \leqslant \|g_j\|_{H^2}$. Также напомним, что $k \geqslant k_0$. Следовательно,

$$\|F_\mu g_0 - f\|_{A^1} \leqslant \sum_{j=1}^{J} \|p_k^j g_j\|_{A^1} \leqslant \sum_{j=1}^{J} \|p_k^j\|_{A^2}\|g_j\|_{A^2} \leqslant k^{-\alpha} k^{\alpha/3}\|f\|_{H^2}$$

в силу определяющего свойства константы α. □

Для конечной или бесконечной последовательности натуральных чисел k_j, $j \geqslant 1$, положим

$$D_\alpha\{k_j\} = \frac{1}{k_1^{2\alpha/3}} + \sum_{j\geqslant 2} \left(\frac{k_1 \dots k_{j-1}}{k_j^2}\right)^{\alpha/3}.$$

Лемма 3.2. *Пусть $\mu, \mu_j \in PM_+(S)$ и $\mu = \sum_j \mu_j$ (сумма конечна или бесконечна). Предположим, что*

$$\omega\,(\mu_j; 1/k_j) \leqslant c_0 \frac{\log k_j}{k_j^{2n-1}},$$

где $k_j \geqslant K$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $f_\varepsilon \in H^2(B)$, что $\|f_\varepsilon F_\mu - 1\|_{A^1} < D_\alpha\{k_j\} + \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $f_0 \equiv 1$. С помощью леммы 3.1 по индукции построим такие функции $f_j \in H^2$, $j = 1, 2, \dots$, что

$$\|f_j\|_{H^2} \leqslant k_j^{\alpha/3} \|f_{j-1}\|_{H^2};$$

$$\|F_{\mu_j} f_j - f_{j-1}\|_{A^1} \leqslant k_j^{-2\alpha/3} \|f_{j-1}\|_{H^2}.$$

Положим $\Sigma_0 = 0$ и $\Sigma_m = \sum_{j=1}^m \mu_j$ для $m \in \mathbb{N}$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}\|F_{\Sigma_m} f_m - 1\|_{A^1} &\leqslant \sum_{j=1}^m \|F_{\Sigma_j} f_j - F_{\Sigma_{j-1}} f_{j-1}\|_{A^1} \\ &\leqslant \sum_{j=1}^m \|F_{\Sigma_{j-1}}\|_\infty \|F_{\mu_j} f_j - f_{j-1}\|_{A^1} \\ &\leqslant \sum_{j=1}^m k_j^{-2\alpha/3} \|f_{j-1}\|_{H^2}.\end{aligned}$$

Заметим, что $\|f_{j-1}\|_{H^2} \leqslant (k_1 \dots k_{j-1})^{\alpha/3}$ при $j \geqslant 2$. Доказательство для конечного набора слагаемых μ_j завершено.

В случае бесконечного набора слагаемых μ_j имеем

$$\begin{aligned}\|F_\mu f_m - 1\|_{A^1} &\leqslant \|F_\mu f_m - F_{\mu-\Sigma_m}\|_{A^1} + \|F_{\mu-\Sigma_m} - 1\|_{A^1} \\ &\leqslant \|F_{\mu-\Sigma_m}\|_\infty D_\alpha\{k_j\} + \|F_{\mu-\Sigma_m} - 1\|_{A^1}.\end{aligned}$$

Остается заметить, что второе слагаемое стремится к нулю, так как $\|F_{\mu-\Sigma_m}\|_\infty \leqslant 1$ и $F_{\mu-\Sigma_m} \to 1$ поточечно при $m \to \infty$. □

Определение. *Мера $\mu \in PM_+(S)$ допускает α-гладкое разбиение, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $k_j \in \mathbb{N}$ и $\mu_j \in PM_+(S)$ такие, что*

$$D_\alpha\{k_j\} < \varepsilon;$$

$$\sum_j \mu_j = \mu;$$

$$\omega(\mu_j; 1/k_j) \leqslant C\frac{\log k_j}{k_j^{2n-1}}$$

для некоторой константы $C > 0$.

Теорема 3.3. *Предположим, что мера $\mu \in PM_+(S)$ допускает α-гладкое разбиение. Тогда функция F_μ является циклической в A^1.*

Доказательство. В определении гладко разбиваемой меры положим $\varepsilon = K^{-2\alpha/3}$. Так как $D\{k_j\} < \varepsilon$, то $k_j^{-2\alpha/3} < \varepsilon$ и, следовательно, $k_j > K$. Также зафиксируем столь большое $N \in \mathbb{N}$, что $C/N \leqslant c_0$. Тогда условия леммы 3.2 выполнены для мер μ/N и μ_j/N. Следовательно, функция $F_{\mu/N}$ является циклической в A^1. Таким образом, существуют многочлены p, $q \in \mathcal{P}$ такие, что $\|pF_{\mu/N} - 1\|_{A^1} < \varepsilon$ и $\|qF_{\mu/N} - p\|_{A^1} < \varepsilon$. Поэтому $\|qF_{2\mu/N} - 1\|_{A^1} < \varepsilon$. Повторяя это рассуждение, получаем свойство цикличности для функции F_μ в A^1. □

4. Меры, допускающие гладкое разбиение

Безусловно, мера $\mu \in PM_+(S)$ является собственным гладким разбиением, если $\omega(\mu; t) = O(t^{2n-1}\log\frac{1}{t})$.

Для более детального анализа условия о гладком разбиении напомним, что для меры $\mu \in PM_+(S)$ определены канонические срез-меры μ_ζ, $\zeta \in S$. Действительно, положим $u = P[\mu]$ и обозначим символами $\mathbb{D}$ и $\mathbb{T}$ единичный круг и единичную окружность. Тогда срез $u_\zeta(\lambda) = u(\lambda\zeta)$, $\zeta \in S$, $\lambda \in \mathbb{D}$, является положительной гармонической функцией и $\|u_{r\zeta}\|_{L^1(\mathbb{T})} = u(0) < \infty$ для всех $r \in (0,1)$. Следовательно, имеет место равенство $u_\zeta = P[\mu_\zeta]$ ($P[\mu_\zeta]$ – интеграл Пуассона в круге $\mathbb{D}$) для некоторой положительной меры μ_ζ, $\|\mu_\zeta\|_{M(\mathbb{T})} = \|\mu\|_{M(S)}$.

Предложение 4.1. *Пусть $0 < \rho \leqslant 3/4$ и μ – положительная мера на сфере S_n, $n \geqslant 1$. Тогда из условия $P[\mu](z) \leqslant c_1 \log\frac{1}{\rho}$ при $|z| =$*

$1-\rho$ следует оценка $\omega(\mu;\rho) \leqslant c_1 c_3 \rho^{2n-1} \log \frac{1}{\rho}$ для универсальной константы $c_3 = c_3(n) > 0$.

Доказательство. Для $\zeta \in S$ и $\xi \in E(\zeta,\rho)$ имеем $|(1-\rho)\xi - \zeta| \leqslant 2\rho$. Следовательно,

$$\frac{\mu(E(\zeta,\rho))}{\rho^{2n-1}} \leqslant c_3 P[\mu]((1-\rho)\zeta) \leqslant c_1 c_3 \log \frac{1}{\rho}$$

для всех $\zeta \in S$. □

Следствие 4.2. *Мера $\mu \in PM_+(S)$ допускает α-гладкое разбиение, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $k_j \in \mathbb{N}$ и $\mu_j \in PM_+(S)$ такие, что*

$$D_\alpha\{k_j\} < \varepsilon;$$

$$\sum_j \mu_j = \mu;$$

$$\omega\left((\mu_j)_\zeta; 1/k_j\right) \leqslant C \frac{\log k_j}{k_j^{2n-1}}$$

для некоторой универсальной константы $C > 0$ и для всех $\zeta \in S$.

Доказательство. Применим предложения 2.3 и 4.1 к мерам μ_j и $(\mu_j)_\zeta$. □

Отметим, что из равенства $\mu = \sum_j \mu_j$ следует, что $\mu_\zeta = \sum_j (\mu_j)_\zeta$ для всех $\zeta \in S$. Таким образом, если срезы μ_ζ *равномерно* (в смысле следствия 4.2) допускают α-гладкое разбиение, то функция F_μ является циклической. Здесь уместно напомнить, что для положительной меры $\nu \in M(\mathbb{T})$ существование α-гладкого разбиения не зависит от α и равносильно условию $\nu(K) = 0$ для всех множеств Карлесона $K \subset \mathbb{T}$ (см. [1]).

Теперь предположим, что для некоторой точки $\zeta \in S$ срез-мера μ_ζ не допускает α-гладкого разбиения. Тогда, с одной стороны, $\mu_\zeta(K) > 0$ для некоторого множества Карлесона K. С другой стороны, для всех функций $f \in A^1(B)$ срез-функции $f_\zeta(\lambda) = f(\lambda\zeta)$ принадлежат некоторому весовому пространству Бергмана в круге. Следовательно, функция F_μ не является циклической (детали аналогичны, например, доказательству предложения 4.2 в статье [3]).

Литература

1. J. W. Roberts, *Cyclic inner functions in the Bergman spaces and weak outer functions in H^p $(0 < p < 1)$.* — Illinois J. Math. **29** (1985), 25–38.
2. B. Korenblum, *A Beurling-type theorem.* — Acta Math. **138** (1977), 265–293.
3. Е. С. Дубцов, *Слабо внешние внутренние функции.* — Функц. анал. и его прил. **37** (2003), 7–15.
4. M. Andersson, *On the H^p corona problem.* — Bull. Sci. Math. **118** (1994), 287–306.
5. А. Б. Александров, *Собственные голоморфные отображени из шара в полидиск.* — ДАН СССР **286** (1986), 11–14.

Dubtsov E. S. Bounded cyclic functions in the ball.

With the help of the H^2-corona theorem we obtain a condition sufficient for cyclicity in the Bergman space A^1 in the ball.

Санкт-Петербургский
государственный университет
e-mail ed@ED8307.spb.edu

Поступило 10 июля, 2003 г.