Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 303, 2003 г.

Е. С. Дубцов

СЛАБО ЦИКЛИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ С ЗАДАННЫМ МОДУЛЕМ

Введение

Рассмотрим единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и пространство Харди $H^p = H^p(\mathbb{D})$, $0 < p < \infty$. Пусть $\mathcal{P}$ – множество голоморфных многочленов. По определению вектор $f \in H^p$ называют циклическим, если произведение $f\mathcal{P}$ является плотным в H^p.

Пусть $m = m_1$ обозначает нормированную меру Лебега на единичной окружности $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. Напомним, что для каждой функции $f \in H^p$ граничные значения $f^*(\zeta)$ определены для m-почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$. Хорошо известно, что $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ и $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Таким образом, возникает следующая естественная задача. Пусть $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$ и $\log\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Требуется найти циклический вектор f, удовлетворяющий равенству $|f^*| = \varphi$. В силу классической теоремы В. И. Смирнова [1] поставленную задачу решает *внешняя* функция

$$\mathcal{O}_\varphi(z) = \exp\left(\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log\varphi(\zeta)\, dm(\zeta)\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

В настоящей работе рассматривается подобная задача в полидиске $\mathbb{D}^n$, $n \geqslant 2$, для ограниченной строго положительной функции φ, заданной на торе $\mathbb{T}^n$. Символом m_n обозначим нормированную меру Лебега на $\mathbb{T}^n$. Напомним, что пространство $H^p(\mathbb{D}^n)$ состоит из аналитических в полидиске функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_p^p = \sup_{0<r<1} \int\limits_{\mathbb{T}^n} |f(rz)|^p\, dm_n(z) < \infty.$$

Работа поддержана грантами для молодых кандидатов наук PD02-1.1-7 Министерства образования РФ и PD03-1.1-107 Администрации Санкт-Петербурга.

Общая теория пространств $H^p(\mathbb{D}^n)$ изложена в монографии У. Рудина [2].

Циклические векторы в полидиске. Предположим, что вектор $f \in H^p(\mathbb{D}^n)$ является циклическим. Тогда функция f не имеет нулей в полидиске, поэтому $\log|f|$ является плюригармонической функцией в $\mathbb{D}^n$. Напомним, что ядром Пуассона называют произведение

$$P(z,w) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1-|z_j|^2}{|z_j - w_j|^2} \quad (z \in \mathbb{D}^n,\ w \in \mathbb{T}^n).$$

Хорошо известно, что в рассматриваемом случае $\log|f(z)|$ совпадает с интегралом Пуассона

$$P[\log|f^*|](z) = \int_{\mathbb{T}^n} P(z,w) \log|f^*(w)|\, dm_n(w),$$

где f^* обозначает граничные значения ([2], теорема 4.4.6). Иными словами, уравнение $|f^*| = \varphi$ m_n-п.в. может иметь циклическое решение f лишь при существенном ограничении на *спектр* функции $\log\varphi$. Более того, в многомерном случае равенство $\log|f| = P[\log|f^*|]$ не всегда влечет цикличность вектора f.

Слабо циклические векторы в полидиске. Изложенные выше доводы мотивируют поиск решений уравнения $|f^*| = \varphi$ среди *слабо* циклических функций f. Пусть $0 < p < 1$. По определению $f \in H^p$ называют (H^p-)*слабо* циклическим вектором, если произведение $f\mathcal{P}$ *слабо* плотно в H^p. Более того, ниже предполагается, что функция φ ограничена и строго положительна. В этом случае равенство $|f^*| = \varphi$ (без дополнительных ограничений на f) автоматически налагает на функцию φ некоторое условие полунепрерывности снизу (подробнее см. [2], теорема 3.5.2). Таким образом, основной результат настоящей работы выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $0 < p < 1$. Предположим, что $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, $\varphi > 0$ и функция φ полунепрерывна снизу. Тогда существует такой H^p-слабо циклический вектор $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$, что $|f^*| = \varphi$ m_n-п.в.*

1. Вспомогательные результаты

Банахова оболочка. Предположим, что функционалы разделяют точки p-нормированного F-пространства X $(0 < p < 1)$. Напомним определение банаховой оболочки $\hat{X}$. Рассмотрим абсолютно выпуклую оболочку единичного шара из пространства X. Функционал Минковского такой оболочки является нормой, пополнение относительно которой является банаховым пространством $\hat{X}$. Хорошо известно ([3], см. также [4]), что банаховой оболочкой пространства $H^p(\mathbb{T}^n)$, $0 < p < 1$, является весовое пространство Бергмана $A_\alpha(\mathbb{D}^n)$, $\alpha = 1/p - 1$, состоящее из таких голоморфных в полидиске функций, что

$$\|f\|_{A_\alpha} = \int\limits_{\mathbb{D}^n} |f(z)| \prod_{j=1}^{n} (1 - |z_j|^2)^\alpha \, dV(z) < \infty,$$

где dV обозначает нормированную меру Лебега на полидиске $\mathbb{D}^n$.

Для наших целей является важным тот факт, что множество $E \subset H^p \subset A_\alpha$ слабо плотно в H^p тогда и только тогда, когда E является плотным в банаховом пространстве A_α. Иными словами, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что f является A_α-циклическим вектором.

Плюригармонические меры. Вещественная мера $\mu \in M(\mathbb{T}^n)$ называется плюригармонической, если $\hat{\mu}(q) = 0$ при $q \notin \mathbb{Z}_+^n \cup \mathbb{Z}_-^n$. В частности, мы будем использовать, что интеграл Пуассона плюригармонической меры $P[\mu](z)$ совпадает с

$$\operatorname{Re} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{2}{1 - z_j \overline{w}_j} - 1 \right) \, d\mu(w).$$

Основным техническим инструментом является следующий результат. Отметим, что без оценки интеграла Пуассона с помощью заданной мажоранты подобная теорема об исправлении хорошо известна (ср. [2], теорема 2.4.2).

Лемма 2. *Пусть ψ – неотрицательная полунепрерывная сверху функция на торе $\mathbb{T}^n$. Зафиксируем неограниченную возрастающую* *функцию* $\omega : [0,1) \to [2 + \max\limits_{\mathbb{T}^n} \psi, +\infty)$. *Тогда существует положительная сингулярная мера* ν *такая, что сумма* $\mu = \psi m_n + \nu$ *является плюригармонической мерой и* $P[\mu](z) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} \omega(|z_j|)$ *для всех* $z \in \mathbb{D}^n$.

Теперь мы немедленно обратимся к теореме 1 (доказательство леммы 2 будет изложено ниже).

2. Доказательство теоремы 1

Зафиксируем $0 < p < 1$ и $\alpha = \alpha(p) = 1/p - 1$. Напомним, что dV обозначает нормированную меру Лебега на $\mathbb{D}^n$. Зафиксируем такую мажоранту $\omega : [0,1) \to [2 + \max\limits_{\mathbb{T}^n} \psi, +\infty)$, что

$$\int\limits_{\mathbb{D}^n} \prod_{j=1}^{n} (1 - |z_j|^2)^\alpha \exp \sum_{j=1}^{n} \omega(|z_j|)\, dV(z) < \infty.$$

Не умаляя общности, предположим, что $0 < \varphi \leqslant 1$. Применив лемму 2 к функции $\psi = -\log \varphi$, получим плюригармоническую меру $\mu = \psi m_n + \nu$. Положим

$$F(z) = F_\mu(z) = \exp\left(-\int\limits_{\mathbb{T}^n} \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{2}{1 - z_j \overline{w}_j} - 1 \right] d\mu(w) \right), \quad z \in \mathbb{D}^n.$$

Тогда $F \in H^\infty(B)$. В силу замечания об интегралах Пуассона плюригармонических мер справедливо равенство $|F^*| = \varphi$ п.в., так как мера ν является сингулярной.

Наконец, отметим, что

$$|F(z)| = \exp(-P[\mu](z)) \geqslant \exp\Big(-\sum_{j=1}^{n} \omega(|z_j|) \Big).$$

Иными словами, $|1/F(z)| \leqslant \exp \sum\limits_{j=1}^{n} \omega(|z_j|)$. Таким образом, ограничение, наложенное на мажоранту ω, гарантирует, что $1/F \in A_\alpha(\mathbb{D}^n)$. Так как многочлены плотны в весовых пространствах Бергмана, то существуют полиномы P_k такие, что $P_k \to 1/F$ в пространстве $A_\alpha(\mathbb{D}^n)$. Умножая на ограниченную функцию F, получаем $P_k F \to 1$. Иными словами, F является A_α-циклическим вектором. Это завершает доказательство, так как $A_\alpha(\mathbb{D}^n)$ является банаховой оболочкой пространства $H^p(\mathbb{D}^n)$. □

3. Доказательство леммы 2

Удобно сначала изложить общую схему рассуждений.

Индукционная конструкция. Зафиксируем функцию ψ. Положим по определению $\varphi_0 = 1 + \max_{\mathbb{T}^n} \psi > \psi$ и $R_j(z) = (z_1 z_2 \cdots z_n)^j$. В качестве индукционной гипотезы предположим, что построен плюригармонический многочлен φ_k такой, что $\varphi_k > \psi$ на $\mathbb{T}^n$.

Шаг $k{+}1$. Зафиксируем $\tau_{k+1} > 0$ и выберем полином ψ_{k+1} такой, что $\varphi_k > \psi_{k+1} > \psi$ на торе и

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} (\psi_{k+1} - \psi)^{\frac{1}{2}}\, dm_n < \tau_{k+1}.$$

Предположим, что $\hat{\varphi}_k(q) = 0$ при $|q| \geqslant M$. Тогда положим

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + (\varphi_k - \psi_{k+1}) \operatorname{Re} R_{j_{k+1}}$$

для столь большого индекса j_{k+1}, что φ_{k+1} является плюригармоническим многочленом и

$$\hat{\varphi}_{k+1}(q) = \hat{\varphi}_k(q) \quad \text{при} \quad |q| \leqslant 2M. \tag{1}$$

Таким образом, по индукции получены плюригармонические многочлены $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что $\varphi_k > \psi \geqslant 0$ и $\|\varphi_k\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} = 1 + \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}$. Условие на спектр многочлена $\varphi_{k+1} - \varphi_k$ гарантирует *-слабую сходимость $\varphi_k m_n \to \pi$ для некоторой положительной плюригармонической меры $\pi = \pi(\psi, J, \tau)$, где $J = \{j_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\tau = \{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Отображение $T : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ будем называть сдвигом, если $Tz = z \cdot w$ для некоторого элемента $w \in \mathbb{T}^n$. Ниже полиномы R_{j_k} будут заменены на $\beta_k R_{j_k} \circ T_k$, где $\beta_k \in \{\pm 1\}$ и T_k являются сдвигами. Выбор β_k и T_k будет основан на следующем вспомогательном результате.

Лемма 3 ([5]). *Пусть f, $g \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}^n)$, $f \geqslant 0$ и $\|g\|_\infty \leqslant 1$. Тогда существуют знак $\beta \in \{\pm 1\}$ и сдвиг T такие, что*

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} f[1 + \beta g \circ T]^{1/2}\, dm_n \leqslant \left(1 - \frac{1}{8} \int\limits_{\mathbb{T}^n} |g|^2\, dm_n\right) \int\limits_{\mathbb{T}^n} f\, dm_n.$$

Доказательство леммы 2. Выполним изложенные выше индукционные построения, налагая дополнительные ограничения и используя вспомогательные последовательности. Дополнительным индукционным предположением является оценка $\varphi_k(z) < \sum\limits_{j=1}^{n} \omega(|z_j|)$, которая, очевидно, верна при $k = 0$ для всех $z \in \mathbb{D}^n$.

Построим по индукции последовательности $J \subset \mathbb{N}$, $\tau \subset (0,1)$, $\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\beta_k \in \{\pm 1\})$ и последовательность сдвигов $T = \{T_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для этого на шаге с номером $k+1$ положим

$$\tau_{k+1} = \frac{1}{32} \int\limits_{\mathbb{T}^n} (\varphi_k - \psi)^{1/2} \, dm_n$$

и зафиксируем многочлен ψ_{k+1}, $\varphi_k > \psi_{k+1} > \psi$.

Пусть $\ell > j_k$. Применив лемму 3 к функциям $f = (\varphi_k - \psi_{k+1})^{1/2}$ и $g = \operatorname{Re} R_\ell$, получаем знак $\beta_{k+1}^{\ell} \in \{\pm 1\}$ и сдвиг T_{k+1}^{ℓ} такие, что

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{T}^n} [\varphi_k - \psi_{k+1}]^{1/2} \left[1 + \operatorname{Re}\left(\beta_{k+1}^{\ell} R_\ell \circ T_{k+1}^{\ell}\right)\right]^{1/2} dm_n \\ &\leqslant \left(1 - \frac{1}{8} \int\limits_{\mathbb{T}^n} [\operatorname{Re} R_\ell]^2 \, dm_n\right) \int\limits_{\mathbb{T}^n} (\varphi_k - \psi_{k+1})^{1/2} \, dm_n \qquad (2) \\ &= \frac{15}{16} \int\limits_{\mathbb{T}^n} (\varphi_k - \psi_{k+1})^{1/2} \, dm_n. \end{aligned}$$

Положим $\varphi_{k+1}^{\ell} = \varphi_k + (\varphi_k - \psi_{k+1}) \operatorname{Re}\left(\beta_{k+1}^{\ell} R_\ell \circ T_{k+1}^{\ell}\right)$, соблюдая ограничения из стандартной индукционной конструкции. Отметим, что при $\ell \to \infty$ сходимость $R_\ell \to 0$ равномерна на компактных подмножествах полидиска. Следовательно, дополнительное индукционное предположение $\varphi_{k+1}^{\ell}(z) < \sum\limits_{j=1}^{n} \omega(|z_j|)$ выполнено для всех достаточно больших индексов ℓ.

Далее, по определению величины τ_{k+1} имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} (\psi_{k+1} - \psi)^{1/2} \, dm_n < \frac{1}{32} \int\limits_{\mathbb{T}^n} (\varphi_k - \psi)^{1/2} \, dm_n.$$

Таким образом, свойство (2) и определение величины τ_{k+1} гарантируют следующие оценки:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{T}^n} \left(\varphi_{k+1}^{\ell} - \psi\right)^{1/2} dm_n &\leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^n} \left(\varphi_{k+1}^{\ell} - \psi_{k+1}\right)^{1/2} dm_n \\
&\quad + \int\limits_{\mathbb{T}^n} \left(\psi_{k+1} - \psi\right)^{1/2} dm_n \\
&\leqslant \frac{15}{16} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \left(\varphi_k - \psi_{k+1}\right)^{1/2} dm_n + \tau_{k+1} \\
&\leqslant \frac{31}{32} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \left(\varphi_k - \psi\right)^{1/2} dm_n
\end{aligned} \tag{3}
$$

для всех достаточно больших индексов $\ell \in \mathbb{N}$.

Окончательно, полагаем $j_{k+1} = \ell$ и $\varphi_{k+1} = \varphi_{k+1}^{\ell}$ для столь большого индекса $\ell \in \mathbb{N}$, что выполнены все вышеперечисленные ограничения.

Индукция доставляет плюригармоническую меру $\pi = \pi(\psi, J, \tau, \beta, T)$. Проверим, что мера π обладает требуемыми свойствами.

1. Свойство (3) и условие лакунарности (1) гарантируют, что разность $\pi - \psi m_n$ является положительной *сингулярной* мерой (ср. [6], §1, где рассматриваются меры на комплексной сфере).

2. Так как $\varphi_k(z) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} \omega(|z_j|)$ для всех $z \in \mathbb{D}^n$ и всех $k \geqslant 1$, то *-слабая сходимость $\varphi_k m_n \to \pi$ гарантирует, что $P[\mu](z) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} \omega(|z_j|)$ для всех $z \in \mathbb{D}^n$.

Доказательство леммы 2 (и теоремы 1) завершено. □

Литература

1. В. И. Смирнов, *Sur les valeurs limites des fonctions, regulières à l'interieur d'un cercle.* — Ж. Ленингр. физ.-мат. об-ва **2**, № 2 (1929), 22–37.
2. У. Рудин, *Теория функций в поликруге.* М., Мир, 1974.
3. A. B. Aleksandrov, *Essays on non locally convex Hardy spaces.* — Lect. Notes Math., Springer-Verlag **864** (1981), 1–89.
4. A. P. Frazier, *The dual space of H^p of the polydisc for* $0 < p < 1$. — Duke Math. J. **39** (1972), 369–379.
5. А. Б. Александров, *Внутренние функции на компактных пространствах.* — Функц. анал. и его прил. **18**, № 2 (1984), 1–13.

6. E. Doubtsov, *Little Bloch functions, symmetric pluriharmonic measures and Zygmund's dichotomy.* — J. Funct. Anal. **170** (2000), 286–306.

Dubtsov E. S. Weakly cyclic vectors with a given modulus.

Let H^p be the Hardy space in the polydisc. Denote by $\mathcal{P}$ the set of all holomorphic polynomials. A vector $f \in H^p$ is called weakly cyclic if the product $f\mathcal{P}$ is weakly dense in H^p, $0 < p < 1$. We construct weakly cyclic vectors with a prescribed lower semicontinuous modulus of the boundary values.

Санкт-Петербургский
государственный университет
e-mail ed@ED8307.spb.edu

Поступило 10 июля, 2003 г.