Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 303, 2003 г.

С. В. Кисляков

О ВМО–РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕТКАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ. II

Эта заметка посвящена уточнению главного результата статьи [1]. Приведем необходимые определения. Под *решеткой измеримых функций* мы будем понимать полное квазибанахово пространство E измеримых функций, удовлетворяющее следующему условию: если $f \in E$, $|g| \leqslant |f|$ п.в. и функция g измерима, то $g \in E$ и $\|g\| \leqslant \|f\|$. Решетка E обладает *свойством Фату*, если из условий $f_n \to f$ п.в. и $\|f_n\|_E \leqslant C$ вытекает, что $f \in E$ и $\|f\| \leqslant C$.

Для решетки E и числа $\alpha > 0$ зададим решетку E^α равенствами

$$E^\alpha = \{g : |g|^{1/\alpha} \in E\}, \quad \|g\|_{E^\alpha} = \||g|^{1/\alpha}\|_E^\alpha.$$

Легко понять, что E и E^α обладают или не обладают свойством Фату одновременно. Если решетка E банахова и $\alpha \geqslant 1$, то и решетка E^α – банахова.

Основным пространством с мерой в этой заметке будет произведение $(\mathbb{T}, m) \times (\Omega, \mu)$, где m – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$, а μ – дискретная мера с не более, чем счетным множеством атомов. Без потери общности будем считать, что Ω – не более, чем счетное множество, все точки которого имеют положительную меру. Условие дискретности меры μ, как и в [1], наложено по техническим причинам – без него не удается доказать главный результат.

Пусть N_+ – (граничный) класс В. И. Смирнова (см. [2]), а X – решетка измеримых функций на пространстве $(\mathbb{T} \times m) \times (\Omega, \mu)$. *Аналитическая часть* X_A пространства X определяется следующим образом:

$$X_A = \{f \in X : f(\cdot, \omega) \in N_+, \quad \forall \omega \in \Omega\}.$$

Для того, чтобы это определение не вело к вырождениям, наложим (как и в [1]) следующее условие на решетку X: если $f \in X$ и

При поддержке грантов РФФИ No. 02-01-00267 и “Ведущие научные школы” No. 2266.2003.1.

$f \neq 0$, то существует функция g в X такая, что $g \geqslant |f|$, $\|g\| \leqslant C\|g\|$ и $\log g(\cdot,\omega) \in L^1(\mathbb{T})$ при всех $x \in \Omega$. В дальнейшем это условие считается выполненным без каких бы то ни было оговорок.

Решетка X называется BMO-*регулярной*, если в ней выполнено более сильное условие: для каждой ненулевой функции f из X найдется функция g из X такая, что $g \geqslant |f|$, $\|g\| \leqslant C\|f\|$ и $\sup\limits_{\omega\in\Omega} \|\log g(\cdot,\omega)\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{T})} < C$ (разумеется, C зависит лишь от X, но не от f и g).

Понятие BMO-регулярности играет существенную роль в теории интерполяции пространств вида X_A (см. сводку результатов в [1, 3]). В [1] было получено описание BMO-регулярных решеток, позволившее ответить на несколько естественных и важных вопросов. Мы собираемся уточнить это описание.

Как и в [1], рассмотрим вспомогательное пространство с мерой $\mathbb{T}\times\Omega\times\mathbb{Z}$ (на $\mathbb{Z}$ рассматривается естественная "считающая" мера, имеющая единичные нагрузки во всех точках). Для $\lambda > 1$ введем пространство L^∞_λ измеримых функций f на $\mathbb{T}\times\Omega\times\mathbb{Z}$, удовлетворяющих неравенству $|f(x,\omega,n)| \leqslant C_f\lambda^n$ при всех значениях аргументов. Наименьшая из постоянных C_f считается нормой функции f в L^∞_λ. Положим $H^\infty_\lambda = (L^\infty_\lambda)_A$. Если Y – решетка измеримых функций на $\mathbb{T}\times\Omega$, а $s > 0$, то решетка $X(l^s)$ функций на $\mathbb{T}\times\Omega\times\mathbb{Z}$ определяется естественным образом, а $X_A(l^s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (X(l^s))_A$.

Теорема. *Пусть Y – квазибанахова решетка измеримых функций на пространстве $\mathbb{T}\times\Omega$, причем решетка Y^α банахова при некотором $\alpha \in (0,1]$. Если решетка Y обладает свойством Фату, то следующие условия эквивалентны:*

1) *пространство Y BMO-регулярно;*

2) *для некоторых (эквивалентным образом, для всех) $s \in (0,\infty)$ и $\lambda > 1$ пространство $Y_A(l^s) + H^\infty_\lambda$ замкнуто в $Y(l^s) + L^\infty_\lambda$.*

Основная теорема в [1] отличалась от этой формулировки тем, что *сама* решетка Y предполагалась банаховой, число s должно было лежать на луче $[1,\infty)$, а вместо замкнутости суммы аналитических подпространств фигурировало более сильное условие K-замкнутости (кстати, теперь видно, что в *данной ситуации* замкнутость суммы и K-замкнутость в действительности равносильны). Остановимся на этом чуть подробнее. Пусть (E_0,E_1) – интерполяционная пара; на ее сумме E_0+E_1 обычно рассматривается норма $\|x\| = \inf\{\|e_0\|_0 + \|e_1\|_1 : x = e_0+e_1,\ e_0\in E_0, e_1\in E_1\}$.

Так будем поступать и мы. Следовательно, замкнутость суммы аналитических подпространств в условии 2) эквивалентна существованию такой константы C, что всякий раз, когда функция $\varphi \in Y_A(l^s) + H^\infty_\lambda$ разложена в сумму $\varphi = \alpha + \beta$ измеримых слагаемых с единичными нормами в пространствах $Y(l^s)$ и L^∞_λ, найдется разложение $\varphi = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}$, где функции $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ лежат в $Y_A(l^s)$ и H^∞_λ соответственно и каждая имеет норму не выше C в своем пространстве. (Заметим, что при доказательстве импликации $2 \Rightarrow 1$ постоянная из определения ВМО-регулярности оценивается в конечном итоге в терминах этой константы C и, разумеется, чисел λ и s).

На сумме $E_0 + E_1$ имеются и другие нормы, эквивалентные описанной выше; в частности, таковой при всяком $t > 0$ будет K-функционал

$$K_t(x; E_0, E_1) = \inf\{\|e_0\|_0 + t\|e_1\|_1 : x = e_0 + e_1, \quad e_0 \in E_0, e_1 \in E_1\}.$$

Условие K-замкнутости, наложенное в [1], требует, чтобы нормы $K_t(\cdot, Y_A(l^s),\ H^\infty_\lambda)$ и $K_t(\cdot, Y(l^s), L^\infty_\lambda)$ были эквивалентны на сумме аналитических подпространств *равномерно по* t.

Надо отметить, что возможность ослабить условие K-замкнутости в основной теореме из [1] лежала на поверхности и попросту оказалась незамеченной в то время. Распространение результата на квазибанаховы решетки Y требует дополнительных соображений.

Приступая к доказательству теоремы, отметим, что импликация 1) $\Rightarrow$ 2) (с произвольными s и λ и даже с K-замкнутостью вместо замкнутости суммы) проверяется ровно так же, как и соответствующее утверждение в [1]. Поэтому надо лишь вывести утверждение 1) из 2), если в последнем s и λ фиксированы.

Выберем натуральное число K таким образом, чтобы число $r = Ks$ было не меньше единицы, а пространство $X = Y^{1/K}$ было банаховым. Пусть еще $\Lambda = \lambda^{1/K}$. Докажем следующую лемму.

Лемма. *Существует постоянная A такая, что для каждой неотрицательной функции f из единичного шара пространства X, удовлетворяющей условию $\int \log f(\cdot, \omega)dm > -\infty$, $\omega \in \Omega$, существуют функции $V_n \in H^\infty(m \times \mu)$ $(n \in \mathbb{Z})$ такие, что*

$$|V_n| f \leqslant A\lambda^n, \quad |V_n| \leqslant A, \quad \Big\| \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \Lambda^{nr} |1 - V_n| \Big)^{1/r} \Big\|_X \leqslant A.$$

Эта лемма утверждает то же самое, что и лемма 10 из [1], причем, как и там, $r \geqslant 1$, а X – *банахова* решетка измеримых функций со свойством Фату (в силу условия теоремы). В [1] было показано, что тогда решетка X BMO-регулярна (именно при выводе BMO-регулярности пространства X из леммы нужна дискретность меры μ); вместе с ней, разумеется, BMO-регулярной будет и решетка Y.

Таким образом, все нововведения, вызванные отсутствием выпуклости в Y, происходят при доказательстве леммы. Отметим, в частности, следующее. Если сумма $Y_A(l^s) + H^\infty_\lambda$ замкнута в $Y(l^s) + L^\infty_\lambda$, то в случае, когда пространство Y – банахово со свойством Фату, а $s \geqslant 1$, автоматически будет $Y_A(l^s) + H^\infty_\lambda = (Y(l^s)+L^\infty_\lambda)_A$ (доказательство – такое же, как у леммы 3, пункт а, в [3]). Это обстоятельство неявно использовалось в [1]. При отказе от выпуклости равенство $Y_A(l^s)+H^\infty_\lambda = (Y(l^s)+L^\infty_\lambda)_A$ неясно априори, и его придется обходить.

Итак, пусть функция f удовлетворяет условию леммы. Положим $\varphi = f^K$, тогда $\varphi \in Y$ и $\|\varphi\|_Y \leqslant 1$. Далее, пусть $t \geqslant 1$ и пусть $\varphi_{n,t} = [(\varphi \vee \lambda^n) \wedge t\lambda^n]^{1/2}$ и

$$\Phi_{n,t}(\cdot,\omega) = \exp[\log\varphi_{n,t}(\cdot,\omega) + i\mathcal{H}(\log\varphi_{n,t}(\cdot,\omega))],$$

где $\mathcal{H}$ – оператор гармонического сопряжения, действующий по первой переменной ($\Phi_{n,t}$ – внешняя функция с модулем $\varphi_{n,t}$). В конечном итоге мы перейдем к пределу при $t \to \infty$, так что параметр t исчезнет; он был введен для того, чтобы обеспечить включение $\{\lambda^{n/2}\Phi_{n,t}\}_{n\in\mathbb{Z}} \in H^\infty_\lambda$, откуда следует, что

$$\Phi = \{\lambda^{n/2}\Phi_{n,t}\}_{n\in\mathbb{Z}} \in Y_A(l^s) + H^\infty_\lambda. \tag{1}$$

Оценим теперь норму последовательности Φ в сумме $Z = Y(l^s) + L^\infty_\lambda$. Для этого запишем $\lambda^{n/2}\Phi_{n,t} = \alpha_{n,t} + \beta_{n,t}$, где $\alpha_{n,t} = \lambda^{n/2}\Phi_{n,t}\chi_{\{\varphi>\lambda^n\}}$. Ясно, что $\|\{\beta_{n,t}\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{L^\infty_\lambda} \leqslant 1$ при всех t. Далее, простое вычисление показывает, что $(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_{n,t}|^s)^{1/s} \leqslant C\varphi$, где C зависит от λ и s, *но не от* t. Действительно, пусть $e_j = \{\lambda^j \leqslant \varphi < \lambda^{j+1}\}$, тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_{n,t}|^s \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^{sn/2}(\varphi\vee\lambda^n)^{1/2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\sum_{j\geqslant n} \lambda^{sn/2}\varphi^{s/2}\chi_{e_j}\big)$$
$$\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big(\sum_{n\leqslant j} \lambda^{ns/2}\lambda^{(j+1)s/2}\big)\chi_{e_j} \leqslant C(s,\lambda)\varphi^s.$$

Таким образом, $\|\{\alpha_{n,t}\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{Y(l^s)} \leqslant C\|\varphi\|_Y \leqslant C$ и $\|\Phi\|_Z \leqslant C+1$, равномерно по t. (В дальнейшем значение оценочной постоянной, обозначаемой буквой C, с индексами или без, может меняться даже в пределах одной формулы без дополнительных оговорок.)

Из включения (1) и условия теоремы вытекает, что

$$\|\Phi\|_{Y_A(l^s)+H^\infty_\lambda} \leqslant C'$$

(равномерно по t), т.е. $\lambda^{n/2}\Phi_{n,t} = \gamma_{n,t} + \delta_{n,t}$, где $\gamma_{n,t} \in Y_A$, $\delta_{n,t} \in H^\infty(m\times\mu)$ и

$$\Big\|\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma_{n,t}|^s\Big)^{1/s}\Big\|_Y \leqslant C, \quad |\delta_{n,t}| \leqslant C\lambda^n \quad (n\in\mathbb{Z}). \tag{2}$$

По-прежнему, C не зависит от t.

При $t\to\infty$ функции $\Phi_{n,t}$ сходятся п.в. к внешним функциям $\Phi_n = \exp(\log\varphi_n + i\mathcal{H}(\log\varphi_n))$, где $\varphi_n = (\varphi\vee\lambda^n)^{1/2}$. При этом $|\Phi_{n,t}| = \varphi_{n,t} \nearrow \varphi_n = |\Phi_n|$, так что в равенстве

$$\Phi_{n,t}\Phi_n^{-1} = \lambda^{-n/2}\Phi_n^{-1}\gamma_{n,t} + \lambda^{-n/2}\Phi_n^{-1}\delta_{n,t}$$

левая часть не превосходит по модулю единицы, а тогда из второго неравенства в (2) и оценки $|\Phi_n| \geqslant \lambda^{n/1}$ получается, что

$$|\lambda^{-n/2}\Phi_n^{-1}\delta_{n,t}| \leqslant C, \quad |\lambda^{-n/2}\Phi_n^{-1}\gamma_{n,t}| \leqslant C + |\Phi_{n,t}\Phi_n^{-1}| \leqslant C+1. \tag{3}$$

Можно выбрать такую последовательность $t_k \nearrow \infty$, что пределы $\delta_n = \lim\limits_{k\to\infty}\delta_{n,t_k}$ существуют при всех n в w^*-топологии пространства $H^\infty(m\times\mu)$. Введем ненадолго на множестве $\mathbb{T}\times\Omega\times\mathbb{Z}$ конечную меру ρ, эквивалентную исходной и такую, что $L^\infty_\lambda \subset L^2(\rho)$. Тогда элементы $\{\delta_{n,t_k}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ слабо сходятся к δ_n в $L^2(\rho)$, а слабую сходимость можно превратить в быструю сходимость по мере ρ после перехода к выпуклым комбинациям, а затем – к подпоследовательности. Отсюда легко получается, что для каждого $j\in\mathbb{N}$ можно найти набор $d_{k_1,j},\dots,d_{k_{s_j},j}$ неотрицательных чисел, в сумме дающих единицу, таким образом, чтобы $k_{1,j},\dots,k_{s_j,j} \geqslant j$ и соответствующие выпуклые комбинации

$$\Delta_n^{(j)} = d_{k_1,j}\delta_{n,t_{k_1}} + \dots + d_{k_{s_j},j}\delta_{n,k_{s_j}}$$

сходились п.в. к δ_n при $j\to\infty$ для каждого $n\in\mathbb{Z}$.

Обозначим через $\Gamma_n^{(j)}$ и $\Phi_n^{(j)}$ такие же выпуклые комбинации функций $\gamma_{n,t}$ и $\Phi_{n,t}$:

$$\Gamma_n^{(j)} = d_{k_1,j}\gamma_{n,k_1} + \cdots + d_{k_{s_j},j}\gamma_{n,k_{s_j}},$$
$$\Phi_n^{(j)} = d_{k_1,j}\Phi_{n,k_1} + \cdots + d_{k_{s_j},j}\Phi_{n,k_{s_j}}.$$

Тогда $\lambda^{n/2}\Phi_n^{(j)} = \Gamma_n^{(j)} + \Delta_n^{(j)}$, причем $\Phi_n^{(j)} \to \Phi_n$ п.в. при $j \to \infty$ для всех n. Следовательно, и функции $\Gamma_n^{(j)}$ сходятся п.в. при $j \to \infty$ к некоторым функциям γ_n (разумеется, лежащим в классе Смирнова). Поделив на внешнюю функцию $\lambda^{n/2}\Phi_n$, получим

$$\Phi_n^{(j)}\Phi_n^{-1} = \lambda^{-n/2}\Gamma_n^{(j)}\Phi_n^{-1} + \lambda^{-n/2}\Delta_n^{(j)}\Phi_n^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} u_n^{(j)} + v_n^{(j)}. \qquad (4)$$

Из оценок (3) следует, что $|v_n^{(j)}| \leqslant C$, $|u_n^{(j)}| \leqslant C+1$ (так что, в частности, $u_n^{(j)}$, $v_n^{(j)} \in H^\infty(\mathbb{T}\times\Omega)$). Левая часть в (4) не превосходит по модулю единицы и стремится к 1 п.в. при $j \to \infty$ для каждого n.

Теперь возведем равенство (4) в степень K, а затем в квадрат, группируя члены особым образом:

$$(\Phi_n^{(j)}\Phi_n^{-1})^{2k} = ((u_n^{(j)})^K + a_n^{(j)}v_n^{(j)})^2 = (u_n^{(j)})^K b_n^{(j)} + (v_n^{(j)})^2 c_n^{(j)};$$

здесь функции $a_n^{(j)}$, $b_n^{(j)}$ и $c_n^{(j)}$ лежат в $H^\infty(\mathbb{T}\times\Omega)$ и ограничены равномерно по n и j в терминах постоянной C. Обозначим слагаемые в последнем выражении в предыдущей формуле через $U_n^{(j)}$ и $V_n^{(j)}$. Тогда $U_n^{(j)}$, $V_n^{(j)} \in H^\infty(\mathbb{T}\times\Omega)$, $|U_n^{(j)}|$, $|V_n^{(j)}| \leqslant C'$ равномерно по n и j и

$$(\Phi_n^{(j)}\Phi_n^{-1})^{2K} = U_n^{(j)} + V_n^{(j)}. \qquad (5)$$

Далее, из второго неравенства в (2) вытекает оценка

$$|V_n^{(j)}\varphi| \leqslant C|v_n^{(j)}|^2\varphi = C\lambda^{-n}|\Delta_n^{(j)}|^2|\Phi_n^{-2}|\varphi \leqslant C\lambda^n\frac{\varphi}{\varphi\vee\lambda^n} \leqslant C\lambda^n. \qquad (6)$$

Кроме того (напомним, что $r = Ks \geqslant 1$, а $X = Y^{1/K}$),

$$\Big\|\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{ns}|u_n^{(j)}|^{Ks}\Big)^{1/s}\Big\|_Y = \Big\|\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{ns}|u_n^{(j)}|^r\Big)^{1/r}\Big\|_X^K$$
$$\leqslant \sup_{t\geqslant 1}\Big\|\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{ns}|\lambda^{-n/2}\Phi_n^{-1}\gamma_{n,t}|^r\Big)^{1/r}\Big\|_X^K$$

в силу выпуклости (пространство X банахово, а при всяком j последовательность $\{u_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ есть выпуклая комбинация нескольких последовательностей вида $\{\lambda^{-n/2}\Phi_n^{-1}\gamma_{n,t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$). Снова переходя к пространству Y, перепишем последний супремум в виде

$$\sup_{t\geqslant 1}\big\|\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{ns}|\lambda^{-n/2}\Phi_n^{-1}\gamma_{n,t}|^{Ks}\big)^{1/s}\big\|_Y.$$

В силу второго неравенства в (3) показатель степени Ks в последнем выражении можно уменьшить до s за счет появления константы перед знаком верхней грани. После этого, воспользовавшись неравенством $|\Phi_n|\geqslant\lambda^{n/2}$, получим

$$\big\|\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{ns}|U_n^{(j)}|^s\big)^{1/s}\big\|_Y\leqslant C\big\|\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{ns}|u_n^{(j)}|^{Ks}\big)^{1/s}\big\|_Y$$
$$\leqslant C\sup_{t\geqslant 1}\big\|\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{-ns/2}|\Phi_n^{-1}|^s|\gamma_{n,t}|^s\big)^{1/s}\big\|_Y\leqslant C\sup_{t\geqslant 1}\big\|\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\gamma_{n,t}|^s\big)^{1/s}\big\|_Y.$$

Обратившись к первому неравенству в (2), получаем окончательно

$$\big\|\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{ns}|U_n^{(j)}|^s\big)^{1/s}\big\|_Y\leqslant C. \tag{7}$$

Заметим теперь, что при любых n и j каждая из функций $U_n^{(j)}$ и $V_n^{(j)}$ является полиномом от $u_n^{(j)}$ и $v_n^{(j)}$ с коэффициентами, зависящими лишь от K, но не от n и j. Поэтому почти всюду существуют пределы $U_n=\lim\limits_{j\to\infty}U_n^{(j)}$, $V_n=\lim\limits_{j\to\infty}V_n^{(j)}$. Это – функции из $H^\infty(\mathbb{T}\times\Omega)$, равномерно ограниченные в терминах констант, участвующих в формулировке теоремы и леммы. Предельный переход в (5), (6) и (7) ведет к формулам

$$1=U_n+V_n,\quad |V_n\varphi|\leqslant C\lambda^n,\quad \|(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{ns}|U_n|^s)^{1/s}\|_Y\leqslant C$$

(в последнем случае используется свойство Фату в пространстве Y). Вспомнив, что $\varphi=f^K$, из второго соотношения находим: $|V_nf|=|V_n|^{1-1/K}(|V_n|f^K)^{1/K}\leqslant C'\Lambda^n$, где $\Lambda=\lambda^{1/K}$. В третьем соотношении можно заменить $|U_n|^s$ на $|U_n|^{Ks}$, увеличив константу C. Это ведет к неравенству

$$\|(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Lambda^{nr}|1-V_n|^r)^{1/r}\|_X\leqslant C''.$$

Лемма доказана. $\bullet$

Литература

1. С. В. Кисляков, *О* BMO-*регулярных решетках измеримых функций.* — Алгебра и анализ, **14** (2002), N 2.
2. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* — Гостехиздат, М.-Л. (1950).
3. S. V. Kislyakov, *On* BMO-*regular couples of lattices of measurable functions.* — Studia Math., **159** (2003), 277–290.

Kislyakov S. V. On BMO-regular lattices of measurable functions. II.

The main result of the paper [1] is refined slightly and extended to certain quasi-Banach lattices.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 ноября 2003 г.