Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 303, 2003 г.

А. И. Храбров

ОЦЕНКИ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ СУММАМИ ПРОСТРАНСТВ ℓ_n^p, II

§1. Введение

В этой работе мы обсуждаем вопрос о том, как различные характеристики близости конечномерных пространств ведут себя на суммах пространств ℓ_n^p, то есть на пространствах вида $\ell_n^p \oplus \ell_n^q$. В качестве характеристик близости между пространствами X и Y (одинаковой конечной размерности) мы рассматриваем классическое расстояние Банаха–Мазура $d(X,Y)$, слабое расстояние Банаха–Мазура $\tilde{d}(X,Y)$, введенное в [14], и модифицированное расстояние $\partial(X,Y)$, введенное в [4]. Наш основной результат состоит в том, что для рассматриваемых пространств отношение $d(X,Y)/\tilde{d}(X,Y)$ ограничено. Отметим, что, как установлено в [4] и [14], на пространствах ℓ_n^p все три расстояния имеют одинаковый порядок роста и оцениваются друг через друга с абсолютными постоянными, а для сумм пространств ℓ_n^p отношение $d(X,Y)/\partial^2(X,Y)$ ограничено, но в некоторых случаях может быть сколь угодно малым. Хотя слабое расстояние Банаха–Мазура $\tilde{d}$ так же хорошо различает пространства $\ell_n^p \oplus \ell_n^q$ как и классическое, совсем по-другому оно ведет себя на суммах пространств различных размерностей. Так, оно практически „не видит разницы“ между пространствами $\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q$ и $\ell_n^p \oplus \ell_{2n}^q$ (точнее, $\tilde{d}(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^p \oplus \ell_{2n}^q) \le 3$ при любых p, $q \ge 1$ и $n \in \mathbb{N}$). Вместе с тем, модифицированное расстояние различает эти пространства достаточно четко, в этом случае мы имеем

$$\partial(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^p \oplus \ell_{2n}^q) \asymp n^{\frac{1}{3}\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|}.$$

В связи с последним результатом заметим, что вытекающее из него неравенство

$$d(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^p \oplus \ell_{2n}^q) \ge \partial(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^p \oplus \ell_{2n}^q) \ge cn^{\frac{1}{3}\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования РФ (грант №E00-1.037).

является, по-видимому, единственной известной оценкой снизу классического расстояния Банаха–Мазура между этими пространствами (вероятно, довольно грубой).

Напомним определения рассматриваемых расстояний и некоторые связанные с ними результаты. Мы будем считать, что все n-мерные нормированные пространства как векторные пространства совпадают с $\mathbb{R}^n$. Это позволяет нам в дальнейшем без специальных пояснений говорить как об объемах тел в n-мерных пространствах, так и о матрицах, соответствующих линейным операторам (в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^n$). Классическое расстояние Банаха–Мазура между n-мерными нормированными пространствами X и Y:

$$d(X,Y) = \inf\left\{\|T\|\cdot\|T^{-1}\| \mid T : X \to Y,\ T \text{ – изоморфизм}\right\}.$$

Рассмотрим оператор $U : X \to Y$ и положим

$$\tilde{\gamma}_Z(U) = \inf \sum \|W_k\|\|V_k\|,$$

где инфимум берется по всем представлениям $U = \sum W_k V_k$ при $V_k : X \to Z$ и $W_k : Z \to Y$. Согласно Томчак–Егерманн [14] определим слабое расстояние $\tilde{d}(X,Y)$ между нормированными пространствами X и Y по формуле

$$\tilde{d}(X,Y) = \max\{\tilde{\gamma}_Y(Id_X), \tilde{\gamma}_X(Id_Y)\}.$$

В этом случае

$$\tilde{d}(X,Y) = \sup\left\{\max\left\{\frac{\alpha(Id_Y)}{\alpha(Id_X)}, \frac{\alpha(Id_X)}{\alpha(Id_Y)}\right\} :\ \alpha \text{ – идеальная норма}\right\}. \tag{1}$$

Легко видеть, что всегда имеет место неравенство $\tilde{d}(X,Y) \leq d(X,Y)$. Как показал Рудельсон в работе [13], расстояния $d(X,Y)$ и $\tilde{d}(X,Y)$ могут существенно различаться. Точнее, существуют такие n-мерные нормированные пространства X_0 и Y_0, что

$$\frac{d(X_0,Y_0)}{\tilde{d}(X_0,Y_0)} \geq cn.$$

Там же доказано, что $\tilde{d}(X,Y) \leq cn^{\frac{13}{14}} \ln^{\frac{15}{7}} n$. Расстояние $\tilde{d}(X,Y)$ для симметрических пространств изучалось в работах Линденштраусса и Шанковского [10] и [11].

Для n-мерных банаховых пространств X и Y определим объемное отношение

$$\mathrm{Vr}(X,Y)=\left(\inf\left\{\frac{\mathrm{vol}B_X}{\mathrm{vol}UB_Y}:UB_Y\subset B_X\right\}\right)^{1/n},$$

где B_X и B_Y – единичные шары в пространствах X и Y. При $Y=\ell_n^2$ обобщенное объемное отношение $\mathrm{Vr}(X,\ell_n^2)$ совпадает с обычным объемным отношением $\mathrm{vr}(X)$. Очевидно, что всегда $\mathrm{Vr}(X,Y)\cdot\mathrm{Vr}(Y,Z)\geq\mathrm{Vr}(X,Z)$ и $\mathrm{Vr}(X,Y)\geq 1$.

Величина $(\mathrm{Vr}(X,Y))^n$ рассматривалась Макбетом [12] и Леви [9] для множества выпуклых n-мерных тел. Там же доказана компактность этого множества в метрике $\ln\mathrm{Vr}(X,Y)+\ln\mathrm{Vr}(Y,X)$.

Положим

$$\partial(X,Y)=\inf\{\|T\|_{X\to Y}:|\det T|=1\}\cdot\inf\{\|T\|_{Y\to X}:|\det T|=1\}.$$

Расстояние $\partial(X,Y)$ неявно использовалось Гурарием, Кадецом и Мацаевым в работе [1] для вывода оценок расстояния Банаха–Мазура между пространствами ℓ_n^p и Глускиным в работе [2], где доказано существование n-мерных пространств X_1 и Y_1, для которых $\partial(X_1,Y_1)\geq cn$. Отсюда следует, что d- и ∂-диаметры компакта Минковского одинаковы по порядку. Расстояние $\partial(X,Y)$ изучается в работах [4, 5, 6, 7].

В работе [4] указан пример таких n-мерных нормированных пространств X_2 и Y_2, что

$$\frac{d(X_2,Y_2)}{\partial(X_2,Y_2)}\geq\sqrt{\frac{n}{e\ln n}},$$

для тех же пространств аналогичные рассуждения дают оценку

$$\frac{\tilde{d}(X_2,Y_2)}{\partial(X_2,Y_2)}\geq\sqrt{\frac{n}{e\ln n}}.$$

В работе [14] доказано, что для пространств Глускина с вероятностью, стремящейся к 1 с ростом n, $d(X,Y)\geq c_1n$ и $\tilde{d}(X,Y)\leq c_2\sqrt{n}$. Поскольку для пространств Глускина с вероятностью, стремящейся к 1, и $\partial(X,Y)\geq c_1n$, то существуют и такие n-мерные нормированные пространства X_3 и Y_3, что

$$\frac{\partial(X_3,Y_3)}{\tilde{d}(X_3,Y_3)}\geq c\sqrt{n}.$$

Стало быть, отношение $\partial(X,Y)/\tilde{d}(X,Y)$ может быть и велико и мало.

Суммы пространств $X \oplus Y$ мы понимаем в смысле ℓ^2, рассмотрение сумм других типов приведет к изменению некоторых констант. Запись $f \succ g$ или $g \prec f$ означает, что существует константа $c > 0$, для которой при всех допустимых x выполнено неравенство $f(x) \geq cg(x)$. Если $f \prec g$ и $f \succ g$, то мы пишем $f \asymp g$. Через $(\alpha)_+$ обозначена положительная составляющая числа α, т. е. $(\alpha)_+ = \max\{\alpha, 0\}$. Через p' мы обозначаем сопряженный с p показатель, иными словами $1/p + 1/p' = 1$.

В работе [5] для любых p, q, r и s устанавливается соотношение

$$\begin{gathered}\mathrm{Vr}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \asymp \\ \asymp (\min\{\mathrm{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^r) \cdot \mathrm{Vr}(\ell_n^q, \ell_n^s),\ \mathrm{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^s) \cdot \mathrm{Vr}(\ell_n^q, \ell_n^r)\})^{1/2}. \qquad (2)\end{gathered}$$

Расстояние $\partial(\ell_n^p \oplus \ell_n^q,\ \ell_n^r \oplus \ell_n^s)$ может быть найдено исходя из соотношения (2), равенства $\partial(X,Y) = \mathrm{Vr}(X,Y) \cdot \mathrm{Vr}(Y,X)$ и формул для объемных отношений $\mathrm{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^r)$, см. [5].

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. *При любых p, q, r, s имеет место соотношение*

$$\begin{gathered}d(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \asymp \tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q,\ \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \asymp \\ \asymp \min\{\max\{d(\ell_n^p, \ell_n^r), d(\ell_n^q, \ell_n^s)\}, \max\{d(\ell_n^q, \ell_n^s), d(\ell_n^q, \ell_n^r)\}\}.\end{gathered}$$

В частности, если p, $q \leq 2$, то

$$d(\ell_q^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^\infty) \asymp \tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^\infty) \asymp \sqrt{n}.$$

Теорема 1 дополняет результаты, следующие из соотношения (2). Таким образом, мы имеем полную информацию о расстояниях d, $\tilde{d}$ и ∂ между суммами пространств ℓ_n^p одинаковой размерности.

Теорема 2. *При любых p, q, r, s справедливы неравенства*

$$d(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \prec (\partial(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s))^2 \quad \text{и} \qquad (3)$$

$$d(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \prec \sqrt[4]{n}\,\partial(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s). \qquad (4)$$

Неравенства (3) и (4) неулучшаемы. Например, это следует из равенств $d(\ell_n^1 \oplus \ell_n^2, \ell_{2n}^{2n}) = \sqrt{n}$ и $\partial(\ell_n^1 \oplus \ell_n^2, \ell_{2n}^{2n}) = \sqrt[4]{n}$. Отметим еще серию примеров: $d(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^\infty) \asymp \sqrt{n}$ и $\partial(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^\infty) \asymp \sqrt[4]{n}$ при $1 \le p \le r \le q \le 2$.

В силу оценки $\tilde{d}(\ell_n^p, \ell_{an}^p) \le c(a)$ теорема 1 для расстояния $\tilde{d}$ может быть распространена на случай суммы пространств ℓ^p пропорциональных размерностей. Точнее, имеет место

Теорема 3. *Пусть $0 < \delta \le a, b, c, d \le \Delta$, тогда при любых p, q, r, s имеет место соотношение (все оценки с константами, зависящими только от δ и Δ)*

$$\tilde{d}(\ell_{[an]}^p \oplus \ell_{[bn]}^q, \ell_{[cn]}^r \oplus \ell_{[dn]}^s) \asymp \tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \asymp$$
$$\asymp \min\{\max\{d(\ell_n^p, \ell_n^r), d(\ell_n^q, \ell_n^s)\}, \max\{d(\ell_n^q, \ell_n^s), d(\ell_n^q, \ell_n^r)\}\}.$$

Приведем также теорему, позволяющую вычислять объемные отношения и модифицированное расстояние для сумм пространств ℓ_n^p разных размерностей.

Теорема 4. *При любых p, q, r, s имеет место соотношение*

$$\mathrm{Vr}^3(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^r \oplus \ell_n^s) \asymp$$
$$\asymp \min\{\mathrm{Vr}^2(\ell_{2n}^p, \ell_{2n}^r)\mathrm{Vr}(\ell_n^q, \ell_n^s), \mathrm{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^r)\mathrm{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^s)\mathrm{Vr}(\ell_n^q, \ell_n^r)\}.$$

В частности, $\mathrm{Vr}(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^q \oplus \ell_n^p) \asymp (\mathrm{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^q))^{1/3}$.

Следствие.

$$d(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^q \oplus \ell_n^p) \ge \partial(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^q, \oplus \ell_n^p) \asymp (d(\ell_n^p, \ell_n^q))^{1/3}.$$

Верхняя оценка в теореме 4 следует из логарифмической выпуклости объемного отношения относительно размерности (см. [4]):

$$\mathrm{Vr}(X_1 \oplus X_2, Y_1 \oplus Y_2) \le (\mathrm{Vr}(X_1, Y_1))^{\frac{n_1}{n_1+n_2}} \cdot (\mathrm{Vr}(X_2, Y_2))^{\frac{n_2}{n_1+n_2}}, \qquad (5)$$

где $\dim X_1 = \dim Y_1 = n_1$ и $\dim X_2 = \dim Y_2 = n_2$. Аналогично можно показать, что для любых целых положительных чисел a, b, c и d, удовлетворяющих условию $a + b = c + d$, верхняя оценка объемного отношения $\mathrm{Vr}(\ell_{an}^p \oplus \ell_{bn}^q, \ell_{cn}^r \oplus \ell_{dn}^s)$, получаемая исходя из логарифмической выпуклости, точна по порядку.

Вытекающее из теоремы 1 соотношение

$$d(X, Y) \asymp \tilde{d}(X, Y), \qquad (6)$$

которое имеет место для сумм двух пространств ℓ_n^p одинаковой размерности, для сумм трех пространств уже может не иметь места. Более того, соотношение (6) может нарушаться для сумм пространств ℓ^p разных размерностей. Например,

$$\tilde{d}(\ell_{2n}^1 \oplus \ell_n^2, \ell_{2n}^2 \oplus \ell_n^1) \le 3.$$

С другой стороны из теоремы 4 следует, что

$$d(\ell_{2n}^2 \oplus \ell_n^1, \ell_{2n}^1 \oplus \ell_n^2) \ge \mathrm{Vr}(\ell_{2n}^2 \oplus \ell_n^1, \ell_{2n}^1 \oplus \ell_n^2) \succ \sqrt[6]{n}.$$

§2. Вспомогательные утверждения

Пусть U – оператор, действующий из X в Y. Обозначим через $\pi_p(U)$, $\nu_p(U)$ и $\delta_p(U)$ p-абсолютно суммирующую, p-ядерную и p-доминированную норму оператора U. Отметим, что нормы $\pi_p(U)$ и $\nu_{p'}(U)$ являются двойственными. Если α – идеальная норма, двойственную к ней мы будем обозначать через α^*. В дальнейшем нам понадобится тождество $\alpha(Id_{\ell_n^r \to \ell_n^s})\alpha^*(Id_{\ell_n^s \to \ell_n^r}) = n$, справедливое для любой идеальной нормы α. Все подробности можно найти в монографии Пича [3].

Лемма 1 (Баумбах Г., Линде В., [8]). *Пусть* $1 \le p \le 2$. *Тогда*

$$\pi_p(Id_{l_n^q}) \asymp n^{\max\{1/2, \min\{1/p, 1/q'\}\}} = \begin{cases} n^{1/2} & \text{при } q \le 2, \\ n^{1/q'} & \text{при } 2 \le q \le p', \\ n^{1/p} & \text{при } p' \le q, \end{cases}$$

в частности, $\pi_p(Id_{\ell_n'}) \asymp n^{1/p}$.

Следствие. *Пусть* $2 \le p \le \infty$. *Тогда*

$$\nu_p(Id_{\ell_n^p}) \asymp n^{\min\{1/2, \max\{1/p, 1/q\}\}} = \begin{cases} n^{1/2} & \text{при } q \le 2, \\ n^{1/q} & \text{при } 2 \le q \le p, \\ n^{1/p} & \text{при } p \le q, \end{cases}$$

в частности $\nu_p(Id_{\ell_n^p}) \asymp n^{1/p}$.

Лемма 2. (Пич А., [3]). Пусть $1 \le p \le \infty$. Тогда

$$\delta_2(Id_{\ell_n^p}) = \frac{n}{d(\ell_n^2, \ell_n^p)} = \begin{cases} n^{3/2-1/p} & \text{при } p \le 2, \\ n^{1/2+1/p} & \text{при } p \ge 2. \end{cases}$$

Лемма 3. *Пусть* $T : X \oplus Y \to X \oplus Y$ *и* $T = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$. *Тогда* $\max\{\pi_p(U), \pi_p(V)\} \le \pi_p(T) \le 2\sqrt{2}\max\{\pi_p(U), \pi_p(V)\}$.

Доказательство. Нижняя оценка очевидна, поскольку норма π_p не возрастает при переходе к сужению. Докажем верхнюю оценку. Будем считать, что $p \ge 1$. В случае $p < 1$ изменятся некоторые константы. Пусть $M = \max\{\pi_p(U), \pi_p(V)\}$ и $z_k = x_k + y_k$, где $x_k \in X$, $y_k \in Y$. Тогда

$$\sum_{k=1}^m \|Tz_k\|^p \le 2^{p-1}\left(\sum_{k=1}^m \|Ux_k\|^p + \sum_{k=1}^m \|Vy_k\|^p\right) \le$$

$$\le 2^{p-1}M^p \sup\left\{\sum_{k=1}^m (|(x_k, x')| + |(y_k, y')|)^p : x' \in B_{X^*}, y' \in B_{Y^*}\right\}. \tag{7}$$

Рассмотрим векторы x' и y', на которых достигается последний супремум. Пусть A множество таких индексов k, для которых $(x_k, x')(y_k, y') \ge 0$. Можно считать, что сумма по $k \in A$ составляет не менее половины от суммы по всем индексам k (в противном случае заменим y' на $-y'$). Тогда правая часть (7) не превосходит величины

$$2^p M^p \sum_{k\in A}(|(x_k, x')| + |(y_k, y')|)^p \le 2^p M^p \sum_{k=1}^m |(x_k, x') + (y_k, y')|^p \le$$

$$\le 2^{3p/2}M^p \sup\left\{\sum_{k=1}^m |(z_k, z')|^p : z' \in B_{Z^*}\right\}.$$

Следовательно, $\pi_p(T) \le 2\sqrt{2}M$.

Следствие. *Если* $1 \le p \le 2$, *то* $\pi_p(Id_{\ell_n^q \oplus \ell_n^r}) \asymp \sqrt{n}$ *при* $q, r \le 2$ *и* $\pi_p(Id_{\ell_n^q}) \asymp n^{\min\{1/p, \max\{1/q', 1/r'\}\}}$ *в противном случае. В частности* $\pi_p(Id_{\ell_n^{p'} \oplus \ell_n^q}) \asymp n^{1/p}$ *при любом* q.

§3. Оценка величин $\tilde\gamma_{\ell_n^p}(Id_{\ell_n^q})$

Теорема 5. *При всех* p *и* q *имеет место соотношение* $\tilde\gamma_{\ell_n^p}(Id_{\ell_n^q}) \asymp d(\ell_n^p, \ell_n^q)$, *причем, если* $(p-2)(q-2) \ge 0$, *то "*$\asymp$*" превращается в равенство.*

Лемма 4. *Для любого n-мерного пространства X справедливо равенство* $\tilde{\gamma}_{\ell_n^2}(Id_X) = d(\ell_n^2, X)$.

Доказательство. Ясно, что $\tilde{\gamma}_{\ell_n^2}(Id_X) \le d(\ell_n^2, X)$. Пусть $\tilde{\gamma}_{\ell_n^2}(Id_X)$ реализуется на факторизации $Id_X = \sum_{k=1}^m W_k V_k$. Рассмотрим операторы $V : X \to \ell_{mn}^2$ и $W : \ell_{mn}^2 \to X$, определяемые формулами $Vx = (\alpha_1^{-1} v_1 x, \ldots, \alpha_m^{-1} v_m x)$ и $W(y_1, \ldots, y_n) = \alpha_1 w_1 y_1 + \ldots + \alpha_m w_m y_m$. При $\alpha_k^2 = \|w_k\|/\|v_k\|$ имеем $\|V\| \le \sqrt{\tilde{\gamma}_{\ell_n^2}(Id_X)}$ и $\|W\| \le \sqrt{\tilde{\gamma}_{\ell_n^2}(Id_X)}$. Заметим, что $WV = Id_X$. Следовательно, операторы $W' : X \to \operatorname{Im} W = \ell_n^2$ и $V' = V|_{\operatorname{Im} W} : \ell_n^2 = \operatorname{Im} W \to X$ будут взаимно обратны. Таким образом, $d(X, \ell_n^2) \le \|W'\|\|V'\| \le \tilde{\gamma}_{\ell_n^2}(Id_X)$. □

Следствие 1. *Для любых n-мерных нормированных пространств X и Y имеет место неравенство*

$$\tilde{\gamma}_Y(Id_X) \ge \frac{d(\ell_n^2, X)}{d(\ell_n^2, Y)}.$$

Доказательство. Положим $Z = \ell_n^2$ в неравенстве треугольника $\tilde{\gamma}_Y(Id_X)\tilde{\gamma}_Z(Id_Y) \ge \tilde{\gamma}_Z(Id_X)$. □

Следствие 2. *При $1 \le p \le q \le 2$ или $2 \le q \le p \le \infty$ имеем*

$$\tilde{\gamma}_{\ell_n^q}(Id_{\ell_n^p}) = \tilde{d}(\ell_n^p, \ell_n^q) = d(\ell_n^p, \ell_n^q).$$

Доказательство. Положим в предыдущем следствии $X = \ell_n^p$ и $Y = \ell_n^q$, далее воспользуемся тождеством

$$d(\ell_n^2, \ell_n^p) = d(\ell_n^2, \ell_n^q) d(\ell_n^p, \ell_n^q). \qquad \square$$

Доказательство теоремы 5. Пусть $(p-2)(q-2) \ge 0$. Случаи $1 \le q \le p \le 2$ и $2 \le p \le q \le \infty$ рассмотрены в следствии 2. Равенство в случае $1 \le p \le q \le 2$ или $2 \le q \le p \le \infty$ получается с помощью подстановки $\alpha = \delta_2$ в (1). Пусть $q < 2 < p$, положим в (1) $\alpha = \pi_{p'}$, получим оценку $\tilde{\gamma}_{\ell_n^q}(Id_{\ell_n^{p'}}) \succ n^{1/2-1/p}$. Подстановка $\alpha = \nu_{q'}$ дает $\tilde{\gamma}_{\ell_n^q}(Id_{\ell_n^p}) = \tilde{\gamma}_{\ell_n^{q'}} \succ n^{1/q-1/2}$. Стало быть, $\tilde{\gamma}_{\ell_n^q}(Id_{\ell_n^p}) \asymp d(\ell_n^p, \ell_n^q)$. Оставшийся случай $p < 2 < q$ получается в результате перехода к сопряженным пространствам. □

§4. Оценка расстояний между $\ell_n^p \oplus \ell_n^q$ и $\ell_n^r \oplus \ell_n^s$

Отметим несколько свойств величин $\tilde{\gamma}_{Y_1 \oplus Y_2}(Id_{X_1 \oplus X_2})$.

Лемма 5. *Для любых нормированных пространств X, Y и Z имеют место неравенства*

1) $\tilde{\gamma}_{Z\oplus Z}(Id_{X\oplus Y}) \leq \tilde{\gamma}_Z(Id_X) + \tilde{\gamma}_Z(Id_Y)$;

2) $2\tilde{\gamma}_Z(Id_{X\oplus Y}) \geq \tilde{\gamma}_Z(Id_{X\oplus X})$;

3) $\min\{\tilde{\gamma}_Y(Id_X),\, \tilde{\gamma}_Z(Id_X)\} \geq \tilde{\gamma}_{Y\oplus Z}(Id_X)$.

Доказательство. 1. Пусть $\tilde{\gamma}_Z(Id_X)$ и $\tilde{\gamma}_Z(Id_Y)$ реализуются на факторизациях $Id_X = \sum w_k v_k$ и $Id_Y = \sum w'_k v'_k$. Рассмотрим операторы

$$V_k = \begin{pmatrix} v_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V'_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v'_k \end{pmatrix}, \quad W_k = \begin{pmatrix} w_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{и} \quad W'_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w'_k \end{pmatrix}.$$

Тогда $\sum (W_k V_k + W'_k V'_k) = Id_{X\oplus Y}$ и

$$\tilde{\gamma}_{Z\oplus Z}(Id_{X\oplus Y}) \leq \sum (\|W_k\|\|V_k\| + \|W'_k\|\|V'_k\|) = \tilde{\gamma}_Z(Id_X) + \tilde{\gamma}_Z(Id_Y).$$

2. Пусть $\tilde{\gamma}_Z(Id_{X\oplus Y})$ реализуется на факторизациях $Id_{X\oplus Y} = \sum w_k v_k$. Рассмотрим операторы $V_k = v_k|_X \times 0 : X\oplus X \to Z$, $W_k = \mathrm{Pr}_X w_k \times 0 : Z \to X\oplus X$, $V'_k = 0\times v_k|_X : X\oplus X \to Z$ и $W'_k = 0\times \mathrm{Pr}_X w_k : Z \to X\oplus X$. Для них справедливы оценки, аналогичные п. 1.

3. Пусть $\tilde{\gamma}_Y(Id_X)$ достигается на $v_k : X \to Y$ и $w_k : Y \to X$. Рассмотрим операторы $V_k = v_k \times 0 : X \to Y\oplus Z$ и $W_k = w_k \,\mathrm{Pr}_Y : Y\oplus Z \to X$. Далее аналогично. □

Следствие. *При любых $1 \leq p, q, r \leq \infty$ имеет место соотношение* $\tilde{\gamma}_{\ell^r_{2n}}(Id_{\ell_n^p \oplus \ell_n^q}) \asymp \max\{d(\ell_n^p, \ell_n^r), d(\ell_n^q, \ell_n^r)\}$.

Доказательство. Заметим, что $d(\ell^p_{2n}, \ell^p_n \oplus \ell^p_n) \leq \sqrt{2}$, поэтому по пункту 2 леммы заключаем, что

$$\tilde{\gamma}_{\ell^r_{2n}}(Id_{\ell^p_n \oplus \ell^q_n}) \geq \frac{1}{2}\tilde{\gamma}_{\ell^r_{2n}}(Id_{\ell^p_n \oplus \ell^p_n}) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\tilde{\gamma}_{\ell^r_{2n}}(Id_{\ell^r_{2n}}) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\tilde{\gamma}_{\ell^r_{2n}}(Id_{\ell^p_{2n}}) \asymp d(\ell^p_{2n}, \ell^r_{2n}) \asymp d(\ell^p_n, \ell^r_n).$$

Аналогично получаем оценку $\tilde{\gamma}_{\ell^r_{2n}}(Id_{\ell^p_n\oplus\ell^q_n}) \succ \tilde{\gamma}_{\ell^r_n}(Id_{\ell^q_n})$. Далее по пункту 1 леммы имеем

$$\tilde{\gamma}_{\ell^r_{2n}}(Id_{\ell^p_n\oplus\ell^q_n}) \le \tilde{\gamma}_{\ell^r_n}(Id_{\ell^p_n}) + \tilde{\gamma}_{\ell^r_n}(Id_{\ell^q_n}) \le 2\max\{d(\ell^p_n, \ell^r_n), d(\ell^q_n, \ell^r_n)\},$$

откуда и следует верхняя оценка. □

Докажем справедливость теоремы 1 при $r = s$. Верхняя оценка является следствием элементарного неравенства $d(X\oplus X, Y\oplus Z) \le \max\{d(X,Y), d(X,Z)\}$, нижняя вытекает из предыдущего следствия:

$$\tilde{d}(\ell^p_n \oplus \ell^q_n, \ell^r_n \oplus \ell^r_n) \succ \tilde{\gamma}_{\ell^r_{2n}}(Id_{\ell^p_n\oplus\ell^q_n}) \asymp \max\{d(\ell^p_n, \ell^r_n), d(\ell^q_n, \ell^r_n)\}.$$

В частности, если $p \ge 2$ или $q \ge 2$, то

$$d(\ell^p_n \oplus \ell^q_n, \ell^1_n \oplus \ell^1_n) \asymp d(\ell^p_n \oplus \ell^q_n, \ell^1_{2n}) \asymp \sqrt{n}.$$

Лемма 6. *При любых $1 \le p, q, r, s \le \infty$ имеет место соотношение*

$$\tilde{\gamma}_{\ell^r_n\oplus\ell^s_n}(Id_{\ell^p_n\oplus\ell^q_n}) \succ \frac{1}{d(\ell^r_n, \ell^s_n)} \cdot \max\{d(\ell^p_n, \ell^r_n), d(\ell^p_n, \ell^s_n), d(\ell^q_n, \ell^r_n), d(\ell^q_n, \ell^s_n)\}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\tilde{\gamma}_{\ell^r_n\oplus\ell^q_n}(Id_{\ell^p_n\oplus\ell^q_n}) \ge \frac{\tilde{\gamma}_{\ell^r_{2n}}(Id_{\ell^p_n\oplus\ell^q_n})}{\tilde{\gamma}_{\ell^r_{2n}}(Id_{\ell^r_n\oplus\ell^s_n})} \asymp \frac{\tilde{\gamma}_{\ell^r_{2n}}(Id_{\ell^p_n\oplus\ell^q_n})}{d(\ell^r_n, \ell^s_n)} \asymp$$
$$\asymp \frac{\max\{d(\ell^p_n, \ell^r_n), d(\ell^q_n, \ell^r_n)\}}{d(\ell^r_n, \ell^s_n)}.$$

Оценка

$$\tilde{\gamma}_{\ell^r_n\oplus\ell^s_n}(Id_{\ell^p_n\oplus\ell^q_n}) \succ \frac{\max\{d(\ell^p_n, \ell^s_n), d(\ell^q_n, \ell^s_n)\}}{d(\ell^r_n, \ell^s_n)}$$

получается, если числа r и s поменять местами. □

Лемма 7. 1. *Если $p \ge 2 \ge q$ и $2 \ge r \ge s$, то*

$$\tilde{d}(\ell^p_n \oplus \ell^q_n, \ell^r_n \oplus \ell^s_n) \succ n^{\max\{1/2-1/p, |1/s-1/q|, 1/r-1/2\}}.$$

2. *Если $p \ge q \ge 2 \ge r \ge s$, то*

$$\tilde{d}(\ell^p_n \oplus \ell^q_n, \ell^r_n) \succ n^{\max\{1/2-1/p, 1/s-1/2\}}.$$

3. *Если $2 \ge p \ge q$, $2 \ge r \ge s$, то*

$$\tilde{d}(\ell^p_n \oplus \ell^q_n, \ell^r_n \oplus \ell^s_n) \succ n^{\max\{|1/r-1/p|, |1/q-1/s|\}}.$$

4. *Если* $p \geq 2 \geq q$ *и* $r \geq 2 \geq s$, *то*

$$\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \succ n^{\max\{|1/p-1/r|,\, |1/q-1/s|\}}.$$

Доказательство. 1. Для доказательства оценки

$$\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q,\ \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \succ n^{1/2-1/p}$$

нужно положить в соотношении (1) $\alpha = \pi_{p'}$. Докажем неравенство $\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \succ n^{|1/q-1/s|}$. Заметим, что (пусть для определенности $s \geq q$)

$$\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \geq \frac{\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^2)}{\tilde{d}(\ell_n^r \oplus \ell_n^s, \ell_{2n}^2)} \asymp \frac{n^{1/q-1/2}}{n^{1/s-1/2}} = n^{1/q-1/s}.$$

Оставшееся неравенство следует из оценки

$$\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \geq \frac{\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^1)}{\tilde{d}(\ell_n^r \oplus \ell_n^s, \ell_{2n}^1)} \asymp \frac{\sqrt{n}}{n^{1-1/r}} = n^{1/r-1/2}.$$

2. Неравенство $\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \succ n^{1/2-1/p}$ следует из (1), если положить $\alpha = \pi_{p'}$. Второе неравенство получается при переходе к двойственным пространствам.

3. Сначала покажем, что $\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \succ n^{|1/r-1/p|}$. Предположим, что $p \geq r$. Справедливы соотношения

$$\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \geq \frac{\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^1)}{\tilde{d}(\ell_n^r \oplus \ell_n^s, \ell_{2n}^1)} \asymp \frac{n^{1-1/p}}{n^{1-1/r}} = n^{1/r-1/p}.$$

Для доказательства оценки $\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \succ n^{|1/s-1/r|}$ будем считать, что $q \geq s$ (при этом требуемое ранее условие $p \geq r$ может и не иметь места). Получаем:

$$\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \geq \frac{\tilde{d}(\ell_n^r \oplus \ell_n^s, \ell_{2n}^2)}{\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^2)} \asymp \frac{n^{1/s-1/2}}{n^{1/q-1/2}} = n^{1/q-1/s}.$$

4. Неравенство $\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \succ n^{|1/p-1/r|}$ следует из (1), если положить $\alpha = \pi_{p'}$ (при $p \geq r$) и $\alpha = \pi_{r'}$ (в противном случае). Второе неравенство получается, если перейти к сопряженным пространствам: $\tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) = \tilde{d}(\ell_n^{p'} \oplus \ell_n^{q'}, \ell_n^{r'} \oplus \ell_n^{s'}) \asymp n^{|1/q'-1/s'|}$.
□

Доказательство теоремы 1. Верхняя оценка $d(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s)$ очевидна. Докажем нижнюю. Можно считать, что $p \geq q$, $r \geq s$. В этом случае

$$\min\{\max\{d(\ell_n^p, \ell_n^r), d(\ell_n^q, \ell_n^s)\}, \max\{d(\ell_n^q, \ell_n^s), d(\ell_n^q, \ell_n^r)\}\} = \\ = \max\{d(\ell_n^p, \ell_n^r), d(\ell_n^q, \ell_n^s)\}.$$

С помощью перехода к сопряженным пространствам можно добиться того, что из чисел p, q, r и s хотя бы два не превосходят 2. А меняя, если нужно, местами пары (p, q) и (r, s), можно добиться выполнения неравенства $p \geq r$. В результате мы получим один из четырех случаев взаимного расположения чисел p, q, r и s. Каждый из этих случаев рассмотрен в лемме 7. Осталось заметить, что в указанных случаях левые части оценок леммы 7 равны $\max\{d(\ell_n^p, \ell_n^r), d(\ell_n^q, \ell_n^s)\}$. $\square$

Замечание. В случае пространств ℓ_n^p мы имели соотношения

$$\tilde{\gamma}_X(Id_Y) \asymp \tilde{\gamma}_Y(Id_X) \asymp d(X, Y).$$

Для сумм $\ell_n^p \oplus \ell_n^q$ величины $\tilde{\gamma}_X(Id_Y)$ и $\tilde{\gamma}_Y(Id_X)$ могут существенно различаться. Например,

$$\tilde{\gamma}_{\ell_n^2 \oplus \ell_n^\infty}(Id_{\ell_{2n}^2}) \leq 2 \quad \text{и} \quad \tilde{\gamma}_{\ell_{2n}^2}(Id_{\ell_n^2 \oplus \ell_n^\infty}) \succ \sqrt{n}.$$

Доказательство теоремы 2. Неравенство (3) следует из теоремы 1 и соотношения (2) с помощью непосредственных вычислений. Неравенство (4) получается в результате перемножения формулы (3) и оценки $d(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \prec \sqrt{n}$, также вытекающей из теоремы 1. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 4. Оно основано на модификации неравенства Адамара, а также оценках норм оператора через смешанную норму $\|T\| = \sum_{k=1}^n \|Te_k\|_{\ell_n^2}$, где e_k – k-й базисный вектор в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 8. *Пусть $T : \mathbb{R}^{(a+b)n} \to \mathbb{R}^{(a+b)n}$ и $T = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{(a+b)n}$. Тогда при любых α и $\beta > 0$, удовлетворяющих условию $\alpha^a \beta^b = 1$, справедливо неравенство*

$$\prod_{i=1}^{(a+b)n} \left(\alpha \sum_{j=1}^{an} a_{ij}^2 + \beta \sum_{j=an+1}^{(a+b)n} a_{i,j}^2 \right) \geq (\det T)^2.$$

Лемма 9 (см. [4]). *Пусть* $T : \ell_n^p \to \ell_n^q$, $1 \le p, q \le \infty$. *Тогда*

1) $\|T\|_{\ell_n^p \to \ell_n^q} \ge n^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+ -1} \cdot \|T\|$ *при* $(p-2)(q-2) \ge 0$,

2) $\|T\|_{\ell_n^p \to \ell_n^q} \ge n^{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right)_+ -\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \cdot \|T\|$ *при* $(p-2)(q-2) \le 0$,

3) $\|T\|_{\ell_n^p \to \ell_n^q} \ge 2^{-1/2} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-1} \cdot \|T\|$ *при* $1 \le q \le 2 \le p$.

Лемма 10. *Пусть оператор* $T : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^{3n}$ *имеет вид*

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{8}$$

где $T_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *и* $|\det T| = 1$. *Тогда при любых вещественных* α_1, α_2, α_3, α_4 *справедливо неравенство*

$$K = n^{\alpha_1}(\|T_{11}\| + \|T_{12}\| + \|T_{21}\| + \|T_{22}\|) + n^{\alpha_2}(\|T_{13}\| + \|T_{23}\|)+$$
$$+n^{\alpha_3}(\|T_{31}\| + \|T_{32}\|) + n^{\alpha_4}\|T_{33}\| \ge 3n^{\frac{1}{3}\min\{2\alpha_1+\alpha_4,\, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\}}.$$

Доказательство. Уменьшив α_3 или α_4, мы можем добиться выполнения равенства $2\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Положим $\lambda = \alpha_1 - \alpha_2$. Пусть $A_k = \|T_{11}e_k\|_{\ell_n^2}$, $B_k = \|T_{12}e_k\|_{\ell_n^2}$, $C_k = \|T_{13}e_k\|_{\ell_n^2}$. Оценим снизу сумму

$$n^{\alpha_1}(\|T_{11}\|+\|T_{12}\|)+n^{\alpha_2}\|T_{13}\| = n^{\alpha_1}\sum_{k=1}^n A_k + n^{\alpha_1}\sum_{k=1}^n B_k + n^{\alpha_2}\sum_{k=1}^n C_k \ge$$
$$\ge n^{\alpha_2}\sum_{k=1}^n \left(n^\lambda A_k + n^\lambda B_k + C_k\right) \ge n^{\alpha_2}\left[\prod_{k=1}^n (n^\lambda A_k + n^\lambda B_k + C_k)\right]^{1/n} =$$
$$= n^{(2\alpha_1+\alpha_2)/3}\left[\prod_{k=1}^n \left(n^{\lambda/3}A_k + n^{\lambda/3}B_k + n^{-2\lambda/3}C_k\right)\right]^{1/n}.$$

Аналогичные оценки получаются для сумм $n^{\alpha_1}(\|T_{21}\| + \|T_{22}\|) + n^{\alpha_2}\|T_{23}\|$ и $n^{\alpha_3}(\|T_{31}\| + \|T_{32}\|) + n^{\alpha_4}\|T_{33}\|$. Сложим эти оценки, воспользуемся неравенством о средних, и к получившемуся произведению применим модифицированное неравенство Адамара для $a = 2$, $b = 1$, $\alpha = n^{\lambda/3}$ и $\beta = n^{-2\lambda/3}$. $\square$

Доказательство теоремы 4. Из равенства

$$\mathrm{Vr}(X,Y) = \inf\{\|T\|_{Y\to X} : |\det T| = 1\} \cdot \left(\frac{\mathrm{vol}B_X}{\mathrm{vol}B_Y}\right)^{1/n}$$

следует, что достаточно оценить снизу величину $\|T\|_{\ell^r_{2n}\oplus\ell^s_n\to\ell^p_{2n}\oplus\ell^q_n}$ при условии $|\det T| = 1$. Оператор T можно представить в виде (8) и оценить снизу суммой норм операторов T_{ij}, действующих между некоторыми пространствами ℓ^p_n. Каждая из таких норм оценивается по лемме 9, в результате получается выражение, которое оценивается снизу по лемме 10. Верхняя оценка получается из логарифмической выпуклости объемного отношения (5). □

В заключении автор выражает признательность Б. М. Макарову за внимание к работе.

Литература

1. В. И. Гурарий, М. И. Кадец, В. И. Мацаев, *О расстояниях между конечномерными аналогами пространств* L^p. — Мат. сб. **170** (112), No. 4 (1966), 481–489.
2. Е. В. Глускин, *Диаметр компакта Минковского примерно равен n.* — Функц. ан. и его прил. **15**, No. 1 (1981), 72–73.
3. А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М. (1982).
4. А. И. Храбров, *Оценки расстояний между суммами пространств* ℓ^p_n. — Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1, Вып. 3, No. 17 (2000), 56–62.
5. А. И. Храбров, *Обобщенные объемные отношения и расстояние Банаха–Мазура.* — Мат. Заметки **70**, No. 6 (2001), 918–926.
6. А. И. Храбров, *Экстремальные объемные отношения для сумм нормированных пространств.* — В сб. Проблемы математического анализа. Вып. 21. Новосибирск, Научная книга, (2000), 264–275.
7. А. И. Храбров, *Расстояния между пространствами с безусловными базисами.* — В сб. Проблемы математического анализа. Вып. 23. Новосибирск, Тамара Рожковская. (2001), 206–220.
8. G. Baumbach, W. Linde, *Asymptotic behaviour of p-absolutely summing norms of identity operators.* — Math. Nachr. **78** (1977), 193–196.
9. F. W. Levi, *Über zwei Sätze von Herrn Besicovitch.* — Arch. Math. **3**, (1952), 125–129.
10. J. Lindenstrauss, A. Szankowski, *The relation between the distance and the weak distance for spaces with a symmetric basis.* — Geometrical aspects of functional analysis (1985/86), 21–38, Lect. Notes Math., 1267, Springer, Berlin–New York (1987).
11. J. Lindenstrauss, A. Szankowski, *The weak distance between Banach spaces with a symmetric basis.* — J. Reine Angew. Math. **373** (1987), 108–147.
12. A. M. Macbeath, *A compactness theorem for affine equivalence-classes of convex regions.* — Canad. J. Math. **3**, No. 1 (1951), 54–61.
13. M. Rudelson, *Estimates of the weak distance between finite-dimensional Banach spaces.* — Israel J. Math. **89**, No. 1–3 (1995), 189–204.
14. N. Tomczak-Jaegermann, *The weak distance between finite-dimensional Banach spaces.* — Math. Nachr. **119** (1984), 291–307.

Khrabrov A. I. Estimates of the distances between sums of the spaces ℓ_n^p, II.

We study classical, modified, and weak Banach–Mazur distances between sums of ℓ_n^p spaces. We calculate explicitly the classical and weak Banach–Mazur distances between sums of ℓ_n^p-spaces and establish bounds for the ratios of these distances between sums of ℓ_n^p-spaces.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: aih@AK2994.spb.edu

Поступило 30 мая 2003 г.