Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 303, 2003 г.

Н. А. Часова, Ф. А. Шамоян

ДИАГОНАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ В ПОЛИКРУГЕ

Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_i| < 1, i = \overline{1,n}\}$ – единичный поликруг в n-мерном комплексном пространстве C^n, T^n – его остов, $L^{\vec{p}}(T^n)$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $0 < p_i < \infty$, $i = \overline{1,n}$ – пространства измеримых на T^n функций f, для которых конечна квазинорма:

$$\|f\|_{L^{\vec{p}}(T^n)} = \Big(\int\limits_T \cdots \Big(\int\limits_T \Big(\int\limits_T |f(\zeta)|^{p_1} dm_1(\zeta_1)\Big)^{\frac{p_2}{p_1}} dm_1(\zeta_2)\Big)^{\frac{p_3}{p_2}} \cdots dm_1(\zeta_n)\Big)^{\frac{1}{p_n}},$$

здесь $T = T^1$, dm_1 – обычная мера Лебега на T. Пусть далее $H(U^n)$ – множество всех голоморфных в U^n функций. Обобщенными пространствами Харди в поликруге U^n назовем классы

$$H^{\vec{p}} = H^{\vec{p}}(U^n) = \left\{ f \in H(U^n), \|f\|_{H^{\vec{p}}(U^n)} = \sup_{0<r<1} \|f_r\|_{L^{\vec{p}}} < +\infty \right\},$$

где $f_r(\zeta) = f(r\zeta)$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in T^n$. Очевидно, что при $p_1 = \dots = p_n = p$ пространства $H^{\vec{p}}(U^n)$ совпадают с классическими пространствами Харди $H^p(U^n)$ в поликруге (см. [1]).

Исследование пространств $H^{\vec{p}}(U^n)$ было начато авторами в работе [2]. Пусть теперь $f \in H^{\vec{p}}(U^n)$, тогда очевидно, что функция $D(f)(z) = f(z, \dots, z)$, $z \in U$, будет голоморфной в U. В работе мы получим полную характеризацию тех функций $\varphi \in H(U), U = U^1$, для которых справедливо представление $\varphi(z) = f(z,z), f \in H^{p_1,p_2}(U^2)$. Отметим, что в случае классических пространств Харди $H^p(U^n)$ аналогичная задача была поставлена У. Рудином в [1]. Полное решение этой задачи получено Ф. А. Шамояном в работе [3].

Для формулировки основного результата заметки введем сле-

Работа поддержана РФФИ (грант 01-01-00992).

дующее обозначение: пусть $0 < p, q < +\infty$,

$$A^{p,q} = \left\{ f \in H(U), ||f||_{A^{p,q}} = \left(\int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \right)^{\frac{q}{p}} dr \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \right\}.$$

Теорема. *Пусть* $f \in H^{p_1,p_2}(U^2), 1 \le p_1, p_2 < +\infty$, *тогда функция* $\varphi(z) = D(f)(z) = f(z,z)$ *принадлежит классу* A^{p_1,p_2}. *Обратно, если* $\varphi \in A^{p_1,p_2}$, *то можно построить в явном виде функцию* $f \in H^{p_1,p_2}$ *такую, что* $\varphi(z) = D(f)(z) = f(z,z), z \in U$, *т.е.* $D(H^{p_1,p_2}) = A^{p_1,p_2}$.

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма(см. [4, 5]). *Пусть* $B^s_{p_1,p_2,A}$, $s > 0$, $1 \le p_1, p_2 < +\infty$ – *класс голоморфных в* U *функций с граничными значениями из класса О. В. Бесова* $B^s_{p_1,p_2}$ *с соответствующей нормой. Тогда для произвольного линейного непрерывного функционала* $\Phi \in (B^s_{p_1,p_2,A})^*$ *существует единственная голоморфная в* U *функция* $g \in B^{-s}_{q_1,q_2}$, *где* $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1, i = 1,2$, *такая, что*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) \overline{g(\rho e^{i\varphi})} d\varphi, \tag{1}$$

причем

$$c_1 ||g||_{B^{-s}_{q_1,q_2}} \le ||\Phi|| \le c_2 ||g||_{B^{-s}_{q_1,q_2}}, \tag{2}$$

$c_i, i = 1,2$, – *положительные константы.*

Обратно, если $g \in B^{-s}_{q_1,q_2}$, *то формула* (1) *порождает линейный непрерывный функционал на* $B^s_{p_1,p_2}$, *для которого справедливы оценки* (2).

Доказательство теоремы. Пусть $f \in H^{p_1,p_2}(U^2), 1 \le p_1, p_2 < +\infty$, и $F(z) = D(f)(z) = f(z,z), z \in U$. Докажем, что $F \in A^{p_1,p_2}$. Имеем

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{T^2} \frac{f(t_1,t_2) dt_1 dt_2}{(t_1 - z)(t_2 - z)}, \quad z \in U.$$

Пусть теперь g – произвольная функция из $B^{\frac{1}{p_2}}_{q_1,q_2,A}$. Тогда имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{g(e^{i\theta})} d\theta}{(e^{i\theta_1} - re^{i\theta})(e^{i\theta_2} - re^{i\theta})} \right) \times$$

$$\times e^{i(\theta_1+\theta_2)} d\theta_1 d\theta_2. \qquad (3)$$

Имеет место равенство:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{g(e^{i\theta})} d\theta}{(e^{i\theta_1} - re^{i\theta})(e^{i\theta_2} - re^{i\theta})} = \overline{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{i\theta}) e^{2i\theta} e^{i(\theta_1+\theta_2)} d\theta}{(e^{i\theta} - re^{i\theta_1})(e^{i\theta} - re^{i\theta_2})}} =$$

$$= \overline{\frac{e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{i\theta}) e^{2i\theta}}{r(e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2})} \left[\frac{1}{e^{i\theta} - re^{i\theta_1}} - \frac{1}{e^{i\theta} - re^{i\theta_2}} \right] d\theta} =$$

$$= \overline{\frac{e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{r(e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2})} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{g(e^{i\theta}) e^{i\theta}}{e^{i\theta} - re^{i\theta_1}} - \frac{g(e^{i\theta}) e^{i\theta}}{e^{i\theta} - re^{i\theta_2}} \right) e^{i\theta} d\theta} =$$

$$= \overline{\frac{e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{r(e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2})}} \overline{[g_1(re^{i\theta_1}) - g_1(re^{i\theta_2})]},$$

где $g_1(z) = g(z)z, z \in U$. Тогда из (3) получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(re^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \frac{\overline{[g_1(re^{i\theta_1}) - g_1(re^{i\theta_2})]}}{r(e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2})} d\theta_1 d\theta_2. \qquad (4)$$

Преобразуем последний интеграл:

$$I = \frac{1}{(2\pi)^2 r} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) e^{i\theta_1} \overline{\left[\frac{g_1(re^{i\theta_1}) - g_1(re^{i\theta_2})}{1 - e^{i(\theta_2-\theta_1)}} \right]} d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$= \frac{1}{r(2\pi)^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta_1}, e^{i(\theta_1+t)}) \overline{\left[\frac{g(re^{i\theta_1}) - g(re^{i(\theta_1+t)})}{1 - e^{it}} \right]} e^{-i\theta_1} d\theta_1 dt.$$

Применяя последовательно неравенство Гёльдера с показателями p_1 и p_2, из (4) получаем:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\overline{F(re^{i\theta})}g(e^{i\theta})d\theta\right| \le \frac{1}{r(2\pi)^2}||f||_{H^{p_1,p_2}}||g||_{B^{\frac{1}{p_2}}_{q_1,q_2}}.$$

Используя лемму, отсюда получаем, что $F \in B^{-\frac{1}{p_2}}_{p_1,p_2}$, т.е.

$$\sup_{0<\rho<1}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|F(\rho e^{i\varphi})|^{p_1}d\varphi\right)^{\frac{p_2}{p_1}}d\rho\right)^{\frac{1}{p_2}} < +\infty,$$

причем $||F||_{A^{p_1,p_2}} \le c||f||_{H^{p_1,p_2}}$.

Теперь докажем обратное утверждение: если $F \in A^{p_1,p_2}$, мы построим функцию $f \in H^{p_1,p_2}$ такую, что $D(f)(z) = f(z,z) = F(z), z \in U$. Используя интегральное представление функции F (см. [6]), имеем

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_U \frac{F(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}dm_2(\zeta), \quad z \in U,$$

где $dm_2(\zeta)$ – плоская мера Лебега. Положим

$$f(z_1,z_2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_U \frac{F(\zeta)dm_2(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z_1)(1-\overline{\zeta}z_2)}. \tag{5}$$

Очевидно, что $D(f) = F$. Докажем, что $f \in H^{p_1,p_2}$. Используем двойственность пространств H^{p_1,p_2} и H^{q_1,q_2}, где $\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i} = 1, i = 1,2$ (см. [2]). Пусть $\psi \in H^{q_1,q_2}$. Учитывая равенство (5), имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\varphi_1}, re^{i\varphi_2})\overline{\psi(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})}d\varphi_1 d\varphi_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_U F(\zeta)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\overline{\psi(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})}d\varphi_1 d\varphi_2}{(1-\overline{\zeta}re^{i\varphi_1})(1-\overline{\zeta}re^{i\varphi_2})}dm_2(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_U F(\zeta)\overline{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\psi(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}d\varphi_1 d\varphi_2}{(e^{i\varphi_1}-r\zeta)(e^{i\varphi_2}-r\zeta)}}dm_2(\zeta) =$$

$$= 2\pi \int\limits_U F(\zeta)\overline{\psi(r\zeta, r\zeta)}dm_2(\zeta).$$

Используя доказанную первую часть теоремы, получаем:

$$\left|\int\limits_{T^2} f(r\zeta_1, r\zeta_2)\overline{\psi(\zeta_1,\zeta_2)}dm_2(\zeta)\right| \le$$

$$\le c||F||_{A^{p_1,p_2}}||D(\psi)||_{A^{q_1,q_2}} \le c_1||F||_{A^{p_1,p_2}}||\psi||_{H^{q_1,q_2}}.$$

Остается применить двойственность между пространствами H^{p_1,p_2} и H^{q_1,q_2}.

В итоге получаем $||f||_{H^{p_1,p_2}} \le c_2||F||_{A^{p_1,p_2}}$.

Теорема доказана полностью.

Литература

1. Рудин У. *Теория функций в поликруге.* — Мир, М. (1974).
2. Шамоян Ф. А., Часова Н. А. *Описание линейных непрерывеных функционалов в пространствах Харди со смешанными нормами в поликруге.* — Современные методы теории функций и смежные вопросы: тезисы докладов Воронежской зимней математической школы. Воронеж (2001), 285–286.
3. Шамоян Ф. А. *Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n), 0 < p < \infty$.* — Мат. сборник **107(149)**, No. 3(11) (1978), 446–462.
4. Трибель Ш. *Теория функциональных пространств.* Мир, М. (1986).
5. Пеллер В. В., Хрущев С. В. *Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные Гауссовские процессы.* — Успехи мат. наук **37**, Вып. 1(223) (1982), 53–124.
6. Djrbashian M. M., Shamoyan F. A. *Topics in the theory of A^p_α spaces.* — Leipzig: Teubner-Texte **105** (1988), 200.

Chasova N. A., Shamoyan F. A. The diagonal mapping in general Hardy spaces in the polidisk.

For $p = (p_1, p_2)$, $1 < p_i < +\infty, i = 1, 2$, let H^{p_1,p_2} be the Hardy class on the bidisk with mixed norm. We give a complete discription of all holomorphic function φ in the unit disk that are representable in the form $\varphi(z) = f(z, z), |z| < 1$, with $f \in H^{p_1,p_2}$.

Брянский
государственный университет
E-mail: root@shamoyan.bitmcnit.bryansk.su

Поступило 23 мая 2003 г.