Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 303, 2003 г.

Н. А. Широков

НУЛИ ФУНКЦИЙ ИЗ H^∞ НА ГИПЕРПЛОСКОСТЯХ В $\mathbb{B}^n$

Пусть $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ – открытый единичный шар, $n \geqslant 2$, $H^\infty = H^\infty(\mathbb{B}^n)$ – пространство всех функций, голоморфных и ограниченных в $\mathbb{B}^n$. Далее (a,b), a, $b \in \mathbb{C}^n$ – обычное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, $|a| = \sqrt{(a,a)}$. Если $a \in \mathbb{B}^n$, то положим $T_a = \{z \in \mathbb{B}^n : (z,a) = |a|^2\}$; если $A \subset \mathbb{B}^n$ – некоторое дискретное подмножество, то $T_A \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{a\in A} T_a$. Через ZH^∞ обозначим совокупность всех подмножеств $\Lambda \subset \mathbb{B}^n$ таких, что найдется функция $f \in H^\infty$, $f \not\equiv 0$, но $f\big|_\Lambda \equiv 0$. В настоящей работе мы рассмотрим некоторые условия на множество A, необходимые для включения $T_A \in ZH^\infty$. Поскольку $H^\infty(\mathbb{B}^n) \subset N(\mathbb{B}^n)$, где $N(\mathbb{B}^n)$ – класс Неванлинны в $\mathbb{B}^n$ (см. определение в [1, 2]), мы можем привлечь известное необходимое условие на нуль-множество для $N(\mathbb{B}^n)$. В результате (см. [3, 4]) получится следующее: если $A = \{a_\nu\}_{\nu=1}$, $T_A \in ZH^\infty$, то

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - |a_\nu|\right)^n < \infty. \tag{1}$$

Некоторые локальные необходимые условия на множество $T_A \in ZH^\infty$ вблизи какой-нибудь точки $\xi_0 \in \partial\mathbb{B}^n$ были найдены в [3]. Наконец, существенный результат о структуре множеств из ZH^∞ получен А. Б. Александровым [4]. Он установил, что для любых чисел r_ν, $0 < r_\nu < 1$, удовлетворяющих соотношению (1), найдутся $a_\nu \in \mathbb{B}^n$ такие, что $|a_\nu| = r_\nu$, и функция $f_0 \in H^\infty(\mathbb{B}^n)$, $f \not\equiv 0$, для которой $f\big|_{T_A} \equiv 0$, $A = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} T_{a_\nu}$.

Для класса H^∞, в отличие от $N(\mathbb{B}^n)$ (для последнего соотношение (1) в точности эквивалентно включению $T_A \in ZN(\mathbb{B}^n)$), условие (1) должно дополняться некоторыми условиями, опреде-

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 02-01-00267 и гранта Министерства образования РФ PD 02-1.1-107.

ляющими в каком-то смысле "рассредоточенность" точек a_ν по всему шару $\mathbb{B}^n$.

Перейдем к определениям и формулировкам. Пусть $0 < q < 1$, $\zeta_0 \in \partial\mathbb{B}^n$. Через $E_q(\zeta_0)$ обозначим следующий эллипсоид:

$$E_q(\zeta_0) = \Big\{ z \in \mathbb{B}^n : |z|^2 - |(z,\zeta_0)|^2 \leqslant q\big(1 - |(z,\zeta_0)|^2\big) \Big\}. \tag{2}$$

(Впервые множество $E_q(\zeta_0)$ в контексте условий, необходимых для включения $T_A \in ZH^\infty$, было использовано в [3] при определении (ρ, c, q)-клинов.) При $0 < \delta < \frac{1}{2}$ положим

$$K_{\delta,q}(\zeta_0) = E_q(\zeta_0) \cap \Big\{ z \in \mathbb{B}^n : \delta \leqslant 1 - |(z,\zeta_0)|^2 \leqslant 2\delta \Big\}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in H^\infty$, $f(\mathbb{O}) \neq 0$, $f\big|_{T_A} \equiv 0$, $0 < q < 1$.

(a) *Существует постоянная* $c_1 = c_1(n, q, |f(\mathbb{O})|, \|f\|_{H^\infty})$, *не зависящая от* δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, *и точки* $\zeta_0 \in \partial\mathbb{B}^n$, *такая, что*

$$\sum_{a \in A \cap K_{\delta,q}(\zeta_0)} (1 - |a|) \leqslant c_1, \tag{4}$$

$K_{\delta,q}(\zeta_0)$ *определено в* (3), *каждая точка* $a \in A$ *считается в сумме* (4) *столько раз, сколько входит в* A.

(b) *Если* $0 < q < \frac{1}{2}$, *то существует постоянная* $c_2 = c_2(n, q, |f(\mathbb{O})|, \|f\|_{H^\infty})$, *не зависящая от* $\zeta_0 \in \partial\mathbb{B}^n$, *для которой справедлива оценка*

$$\sum_{a \in A \cap E_q(\zeta_0)} (1 - |a|) \leqslant c_2. \tag{5}$$

Следующее утверждение показывает, что условие (4), как и условие (1), является неулучшаемым ограничением на A, необходимым для того, чтобы $T_A \in ZH^\infty$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < q < 1$. *Существуют постоянные* $c_3 = c_3(n, q)$ *и* $c_4 = c_4(n, q) > 0$ *такие, что для всякого* δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, *можно указать множество* $A_\delta \subset \mathbb{B}^n$ *и функцию* $f_\delta \in H^\infty$ *такие, что* $f_\delta(\mathbb{O}) = 1$, $\|f_\delta\|_{H^\infty} \leqslant c_3$, $f_\delta\big|_{T_A} = 0$ *и выполнено условие*

$$\sum_{a \in A_\delta \cap K_{\delta,q}(\zeta_0)} (1 - |a|) \geqslant c_4 \tag{6}$$

для всякого $\zeta_0 \in \partial\mathbb{B}^n$.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что если U – унитарное преобразование в $\mathbb{C}^n$, то $U(T_a) = T_{Ua}$,

$$U(E_q(\zeta_0)) = E_q(U\zeta_0), \quad U(K_{\delta,q}(\zeta_0)) = K_{\delta,q}(U\zeta_0).$$

Так как $f(U\mathbb{O}) = f(\mathbb{O})$, $\|f(Uz)\|_{H^\infty} = \|f\|_{H^\infty}$, то достаточно установить (4) и (5) при $\zeta_0 = e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Положим $E_q = E_q(e_0)$, $K_{\delta,q} = K_{\delta,q}(e_0)$, $z = (z_1, z')$, $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\mathbb{O} = \mathbb{O}_{\mathbb{C}^n} = (0, \mathbb{O}')$. Из (2) и (3) получаем

$$E_q = \Big\{ z = (z_1, z') \in \mathbb{B}^n : |z'|^2 \leqslant q(1 - |z_1|^2) \Big\}, \tag{2'}$$

$$K_{\delta,q} = E_q \cap \Big\{ z = (z_1, z') \in \mathbb{B}^n : \delta \leqslant 1 - |z_1|^2 \leqslant 2\delta \Big\}. \tag{3'}$$

Установим вначале часть (b). Пусть $\varphi(z_1) = f(z_1, \mathbb{O}')$. Тогда $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$, $\mathbb{D}$ – единичный круг в $\mathbb{C}$, $\|\varphi\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leqslant \|f\|_{H^\infty(\mathbb{B}^n)}$, $\varphi(0) = f(\mathbb{O}) \neq 0$. Далее, обозначим через $z_1(a)$ такое число, что $(z_1(a), \mathbb{O}') \in T_a$. Тогда при $a = (a_1, a')$ имеем:

$$z_1(a) \cdot \overline{a}_1 = |a|^2 = |a_1|^2 + |a'|^2,$$

$$\begin{aligned} 1 - |z_1(a)| = 1 - \frac{|a_1|^2 + |a'|^2}{|a_1|} = \frac{|a_1| - |a_1|^2 - |a'|^2}{|a_1|} \geqslant \\ \geqslant \frac{|a_1| - |a_1|^2 - q(1 - |a_1|^2)}{|a_1|}. \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что при $0 < q < \frac12$ часть суммы в (5), распространенная на те $a \in A$, для которых $|a_1| \leqslant 1 - \frac12\,\frac{1-2q}{1-q}$, ограничена в силу (1). Если же $r \overset{\text{def}}{=} 1 - |a_1| \leqslant \frac12\,\frac{1-2q}{1-q}$, то

$$\begin{aligned} \frac{|a_1| - |a_1|^2 - q(1 - |a_1|^2)}{|a_1|} \geqslant 1 - r - (1 - r)^2 - q(2r - r^2) = \\ = r(1 - 2q)\Big(1 - r\frac{1 - q}{1 - 2q}\Big) \geqslant r\frac{1 - 2q}{2} \geqslant \frac{1 - 2q}{2}(1 - |a|). \end{aligned} \tag{8}$$

Теперь (7), (8) и обычное условие Бляшке для функций из $H^\infty(\mathbb{D})$ завершает доказательство части (b):

$$\sum_{\substack{a \in E_q \\ |a_1| \geqslant 1 - \frac12\,\frac{1-2q}{1-q}}} (1 - |a|) \leqslant \frac{2}{1 - 2q} \sum (1 - |z_1(a)|) \leqslant c\Big(q, |\varphi(0)|, \|\varphi\|_{H^\infty}\Big).$$

При доказательстве части (а) можно, не ограничивая в силу (1) общности, считать, что $0 < \delta < \frac{1-q}{8}$. Разобьем единичную сферу $S \subset \mathbb{C}^{n-1}$ на $c(q)$ областей $\sigma_1, \dots, \sigma_{c(q)}$ таким образом, чтобы для любых z', $\zeta' \in \sigma_j$ выполнялось соотношение

$$|1 - (z', \zeta')| < \frac{1-q}{16}. \tag{9}$$

Выберем произвольно точки $z'_{j0} \in \sigma_j$ и положим

$$A_j = \Big\{ a = (a_1, a') \in A \colon \frac{1}{4}\big(1 - |a_1|^2\big) \leqslant |a'|^2 \leqslant q\big(1 - |a_1|^2\big), \frac{a'}{|a'|} \in \sigma_j \Big\},$$

$$\widetilde{A} = \Big\{ a = (a_1, a') \in A \colon |a'|^2 < \frac{1}{4}\big(1 - |a_1|^2\big) \Big\}.$$

Тогда $A = \widetilde{A} \bigcup \bigcup\limits_{j=1}^{c(q)} A_j$. Пусть $P_j = \{z = (z_1, tz'_{j0}) \in \mathbb{B}^n\}$, $t = \sqrt{q\delta}$, т.е.

$$P_j = \Big\{ z = \big(z_1, tz'_{j0}\big) \colon |z_1|^2 + q\delta < 1 \Big\}. \tag{10}$$

Часть (а) дает

$$\sum_{a \in \widetilde{A}} (1 - |a|) \leqslant c\Big(n, |f(\mathbb{O})|, \big\|f\big\|_{H^\infty}\Big). \tag{11}$$

Положим $\varphi_j(z_1) = f(z_1, tz'_{j0})$. Если $\delta_1 < \delta_0\big(|f(\mathbb{O})|, \big\|f\big\|_{H^\infty}, n\big)$, то

$$|\varphi_j(0)| = |f(0, tz'_{j0})| > \frac{1}{2}|f(\mathbb{O})|. \tag{12}$$

Все функции φ_j определены, в силу (10), при $|z_1|^2 < 1 - q\delta$. Если $a \in A_j$, $(\alpha, tz'_{j0}) = P_j \cap T_a$, то $\varphi_j(\alpha) = 0$ и $\alpha\overline{a}_1 + t(z'_{j0}, a') = |a|^2 = |a_1|^2 + |a'|^2$,

$$\alpha = \frac{|a_1|^2 + |a'|^2 - t|a'| + t|a'|\Big(z'_{j0}, z'_{j0} - \dfrac{a'}{|a|}\Big)}{\overline{a}_1}. \tag{13}$$

Из (9) и (13) находим, что

$$|\alpha| \leqslant \frac{|a_1|^2 + |a'|^2 - t|a'|\Big(1 - \dfrac{1-q}{16}\Big)}{|a_1|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|a_1|^2 + q(1-|a_1|^2) - t\sqrt{q(1-|a_1|^2)}\left(1-\dfrac{1-q}{16}\right)}{|a_1|}. \qquad (14)$$

Если $0 < \delta < \dfrac{1-q}{32}$, $|a_1|^2 = 1-\delta_0$ и $\delta \leqslant \delta_0 \leqslant \left(1+\dfrac{1-q}{32}\right)\delta \overset{\text{def}}{=} R\delta$, то

$$\frac{1-\delta_0+q\delta_0-\sqrt{q\delta}\cdot\sqrt{q\delta_0}\left(1-\dfrac{1-q}{16}\right)}{\sqrt{1-\delta_0}} < 1-\frac{\delta}{2}\left(1-\frac{1-q}{8}\right). \qquad (15)$$

Для радиуса ρ круга, в котором определена функция φ_j, при $0 < \delta < \dfrac{1-q}{32}$ справедливо неравенство

$$\rho = \sqrt{1-q\delta} > 1-\frac{q\delta}{2}\left(1+\frac{1-q}{8}\right); \qquad (16)$$

тогда (15) и (16) влекут

$$\rho - |\alpha| > \frac{\delta}{4}(1-q). \qquad (17)$$

Если $a \in P_j$, то $1-|a|^2 \leqslant 1-|a_1|^2 - \frac{1}{4}(1-|a_1|^2) = \frac{3}{4}(1-|a_1|^2)$, поэтому (12), (17) и условие Бляшке для функций из $H^\infty(\mathbb{D})$ влекут

$$\sum_{\substack{a\in P_j\\ \delta\leqslant 1-|a_1|^2\leqslant R\delta}} (1-|a|^2) \leqslant c\big(q, \|f\|_{H^\infty}, |f(\mathbb{O})|\big). \qquad (18)$$

Правая часть в (18) не зависит от j, поэтому, суммируя оценку (18) по всем j и применяя ее к $\delta_{(1)} = \delta$, $\delta_{(2)} = R\delta_{(1)}, \dots, \delta_{(M)} = R\delta_{(M-1)}$, $M \leqslant c_1(q)$ раз, получим утверждение (4) теоремы 1. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $0 < \delta < \frac{1}{4}$, $0 < q < 1$. Пусть $N = [\frac{1}{\delta}] + 1$, $r = 1-\delta$. Разобьем компактное многообразие $P\mathbb{C}^{n-1}$ на не более чем $c(q,n)\delta^{-n+1}$ множеств $W_1, \dots, W_L$ так, чтобы $\operatorname{diam}_{P\mathbb{C}^{n-1}} W_j \leqslant c_1(n)\cdot\sqrt{q\delta}$, чтобы с каждым множеством W_j граничило не более $c_2(n)$ других множеств W_k и чтобы в каждом множестве W_j можно было выбрать точку ω_j таким образом, чтобы $\operatorname{dist}_{P\mathbb{C}^{n-1}}(\omega_j,\omega_k) \geqslant c_3(n)\sqrt{q\delta}$, $j \neq k$, и чтобы для всякого t, $t \geqslant c_3(n)\sqrt{q\delta}$, количество множеств W_k, пересекающих сферу $\Sigma_t(\omega_j)$ в $P\mathbb{C}^{n-1}$, $\Sigma_t(\omega_j) \overset{\text{def}}{=} \{\omega \in P\mathbb{C}^{n-1} \colon \operatorname{dist}_{P\mathbb{C}^{n-1}}(\omega,\omega_j) = t\}$, не превосходило

$$c_4(n)t^{2n-3}/(q\delta)^{n-3/2}. \qquad (*)$$

Поскольку $P\mathbb{C}^{n-1}$ можно трактовать как $\partial\mathbb{B}^n/S^1$, $S^1 = \partial\mathbb{D}$, выберем точки $\zeta_j \in \partial\mathbb{B}^n$ так, что $\zeta_j/\{e^{i\theta}\} \cong \omega_j$. Постоянную $c_1(n)$ выберем так, чтобы для всякой точки $z \in \partial\mathbb{B}^n$ такой, что $z/\{e^{i\theta}\} \in W_j$, выполнялось условие

$$1 - |(z, \zeta_j)|^2 \leqslant q\delta. \tag{19}$$

Положим

$$a_{jk} = re^{\frac{2\pi ik}{N}}\zeta_j, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1, \quad 1 \leqslant j \leqslant L. \tag{20}$$

Условие на $\operatorname{diam} W_j$ влечет, что $L \geqslant c_5(n,q)\delta^{-n+1}$. Рассмотрим любой эллипсоид $E_q(\zeta_0)$. Условия $(*)$ и (19) инвариантны относительно унитарных преобразований, поэтому можно, не умаляя общности, полагать $\zeta_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Если $\zeta_0/\{e^{i\theta}\} \in W_{j_0}$, $\zeta_{j_0} = (b_1, b')$, то (19) влечет

$$1 - |b_1|^2 \leqslant q\delta, \quad |b'|^2 \leqslant q\delta. \tag{21}$$

При $0 < \delta \leqslant 1$ верна оценка $(1-\delta)^2 \leqslant 1 - \delta$, поэтому

$$\left|re^{\frac{2\pi ik}{N}}b'\right|^2 \leqslant |b'|^2 \leqslant q\delta \leqslant q\Big(1 - \left|re^{\frac{2\pi ik}{N}}b_1\right|^2\Big),$$

т.е. $a_{j_0k} \in E_q(\zeta_0)$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, что влечет (6). Осталось построить функции f_δ такие, что $f_\delta\big|_{T_A} = 0$, $A_\delta = \bigcup\limits_{j,k}\{a_{jk}\}$. Один класс таких функций был построен А. Б. Александровым в [4]. Именно, пусть

$$f_{1\delta}(z) = \frac{1}{l_\delta}\prod_{a\in A_\delta}\left(1 - \Big(\frac{1-|a|^2}{1-(z,a)}\Big)^{n+1}\right),$$

$$l_\delta = \prod_{a\in A_\delta}\Big(1 - \big(1-|a|^2\big)^{n+1}\Big).$$

Доказательство того, что $f_{1\delta} \in H^\infty(\mathbb{B}^n)$, $\|f_{1\delta}\|_{H^\infty(\mathbb{B}^n)} \leqslant c(n)$, следует из леммы 2 в [4], поскольку к точкам a_{jk} применимы ее условия.

Укажем еще один пример функции, для которой справедлива теорема 2. Пусть

$$f_{2\delta}(z) = \prod_{a\in A_\delta}\left(1 - \frac{(z,a)}{|a|^2}\right) = \prod_{j=1}\left(1 - \frac{(z, a_{j_0})^N}{|a_{j_0}|^{2N}}\right).$$

Утверждение $\|f_{2\delta}\|_{H^\infty(\mathbb{B}^n)} \leqslant c(n)$ будет следовать из условия $(*)$ и основывается на сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{2n-3} e^{-ck^2}$, $c > 0$. □

Литература

1. Г. М. Хенкин, *Построение функции класса Неванлинны с предписанными нулями в строго псевдовыпуклой области.* — ДАН СССР **224**, No. 1 (1975), 10–13.
2. H. Skoda, *Valeurs au bord pour l'opérateur d et zeros des fonctions de la class de Nevanlinna.* — Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 225–299.
3. Н. А. Широков, *Следы функций из $H^\infty(\mathbb{B}^n)$ на некотором множестве гиперплоскостей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **141** (1985), 183–187.
4. А. Б. Александров, *Условие Бляшке и корни ограниченных функций.* — В кн.: Многомерный комплексный анализ. Красноярск (1985), 23–26.

Shirokov N. A. Zero-sets for H^∞-functions on hyperplanes in $\mathbb{B}^n$.

Let $\mathbb{B}^n$ be the unit ball in $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. We put $T_a = \{z \in \mathbb{B}^n : (z, a) = |a|^2\}$ for $a \in \mathbb{B}^n$ and $T_A = \bigcup\limits_{a \in A} T_a$ for a discrete in $\mathbb{B}^n$ set A. We find a sharp necessary condition for a set A to be a part of the zero-set for a function in $H^\infty(\mathbb{B}^n)$.

С.-Петербургский государственный электротехнический университет

Поступило 25 сентября 2003 г.