Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 303, 2003 г.

Р. Г. Штеренберг

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ СПЕКТРА ДВУМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С СИЛЬНО ПОДЧИНЕННЫМ МАГНИТНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

§0. Введение

1. В настоящей работе рассматривается вопрос об абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Шредингера при наличии переменной метрики и электрического и магнитного полей. Вопросы такого рода рассматривались в ряде статей, начиная с пионерской работы Л. Томаса [23]. Укажем в связи с этим книги [13, 8], а также обзоры [4, 21] и имеющуюся там библиографию. Здесь мы рассматриваем только двумерный случай, где удается получить особенно полные результаты. Этот случай исследовался в работах [2, 3, 12, 5, 15–17], [10]. Особое значение для нас имеет работа [17], результат которой мы сейчас улучшаем в следующем смысле. Оставляя те же условия на метрику, электрический потенциал и "весовую функцию", что и в [17], мы существенно ослабляем ограничения на векторный магнитный потенциал $\mathbf{A}$. В [17] мы накладывали условие

$$\int_\Omega |\mathbf{A}|^2 \ln^\alpha(1+|\mathbf{A}|)\,d\mathbf{x} < \infty, \quad \alpha > 1. \tag{0.1}$$

Здесь Ω – элементарная ячейка решетки периодов. Условие (0.1) ранее использовалось в статье [10]. Теперь мы заменяем его условием "сильной подчиненности" $\mathbf{A}$:

$$\int_\Omega |\mathbf{A}u|^2 d\mathbf{x} \le \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\mathbf{A}) \int_\Omega |u|^2 d\mathbf{x}, \quad \forall \varepsilon \in (0,1), \quad u \in H^1(\Omega). \tag{0.2}$$

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 02-01-00798.

Условие (0.2) значительно свободнее и удобнее, нежели условие (0.1). Особенно это проявляется при исследовании оператора Шредингера в периодическом волноводе. Эту задачу (ранее она исследовалась в работах [20, 19, 22, 18]) мы также обсуждаем в настоящей работе. Здесь мы тоже заменяем аналог условия (0.1), использованный в [18], условием вида (0.2). В результате условие на магнитный потенциал удается выразить в терминах исходной задачи, не привлекая напрямую квази-конформное отображение волновода на полосу (см. §8).

2. *Основной результат* работы – теорема 1.3 об абсолютной непрерывности спектра оператора Шредингера в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и теорема 8.5 об абсолютной непрерывности спектра оператора Шредингера в односвязном периодическом волноводе Π.

Как обычно, наши построения основаны на схеме Томаса, впервые предложенной в [23] и затем развитой в [13]. В данной схеме используется разложение периодического оператора в прямой интеграл. Затем операторы, действующие в слоях прямого интеграла, продолжаются на комплексные значения параметра слоя (квазиимпульса). Дальнейшее сводится к оценкам резольвенты этих операторов при больших мнимых значениях квазиимпульса. В нашем случае соответствующие оценки составляют содержание теоремы 2.1, из которой впоследствии выводится теорема 1.3.

Исходно теорема 2.1 (об оценках) доказывается для случая, когда метрика g – единичная, и весовая функция η равна 1. Затем оценки переносятся на случай скалярной метрики и нетривиальной весовой функции. Наконец, использование глобальных изотермических координат (ср. [9, 16]) позволяет доказать теорему 1.3 в полном объеме. Теорема 8.5 здесь сформулирована без доказательства, которое фактически то же, что и доказательство теоремы 2.5 из [18] (см. также ниже замечание 8.6).

Некоторые вспомогательные факты будут напрямую заимствованы из [17, 18].

3. Основные определения и результаты относительно оператора Шредингера в $L_2(\mathbb{R}^2)$ представлены в §1. В §2 собран необходимый материал относительно схемы Томаса, а также сформулирована опорная теорема 2.1 об оценках. В §3 вынесены некоторые вспомогательные результаты из предыдущих работ. §4 посвящен подготовке к доказательству теоремы 2.1. В §5 мы доказываем теорему 2.1 при $g = \mathbf{1}$, $\eta = 1$. В §6 мы включаем в рассмотрение скалярную метрику. Наконец, в §7 мы завершаем доказательство теоремы 2.1 и выводим из нее теорему 1.3 в случае скалярной метрики; затем доказываем теорему 1.3 в полном объеме. В заключительном §8 мы формулируем без доказательства основной результат относительно оператора Шредингера в односвязном периодическом волноводе; там же даны необходимые комментарии.

4. Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность М. Ш. Бирману за постановку задачи и большое внимание к работе, а также Т. А. Суслиной за многочисленные обсуждения. Настоящая работа была написана во время пребывания автора в институте Миттаг–Леффлера; автор благодарит А. Лаптева и персонал института Миттаг–Леффлера за гостеприимство.

§1. Определение оператора. Основной результат

1. Обозначения. Пусть $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ образуют базис решетки Γ в $\mathbb{R}^2$, и пусть

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2,\ 0 \le t_j < 1,\ j = 1, 2\}$$

– элементарная ячейка решетки Γ. Фиксируем ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ в $\mathbb{R}^2$ так, чтобы было $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1|$. Используем обозначения $\nabla = \{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2\} = \{\partial_1, \partial_2\}$, $\mathbf{D} = \{D_1, D_2\} = -i\nabla$. Для вещественной функции f используем обозначения $2f_\pm(\mathbf{x}) := |f(\mathbf{x})| \pm f(\mathbf{x})$. Пусть $\mathcal{D}$ – открытое множество в $\mathbb{R}^2$. Классы Соболева порядка $s > 0$ с показателем суммируемости p обозначаются через $W_p^s(\mathbb{R}^2)$, $W_p^s(\mathcal{D})$; при $p = 2$ – через $H^s(\mathbb{R}^2)$, $H^s(\mathcal{D})$. Через $\widetilde{W}_p^s(\Omega)$ обозначается подпространство тех функций из $W_p^s(\Omega)$, для которых Γ-периодическое продолжение принадлежит классу $W_{p,\,\mathrm{loc}}^s(\mathbb{R}^2)$; при $p = 2$ обозначаем $\widetilde{H}^s(\Omega) := \widetilde{W}_2^s(\Omega)$. Аналогично, через $\widetilde{C}^\infty(\Omega)$ обозначается класс функций, Γ-периодическое продолжение которых принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Далее $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $|\cdot|$ – стандартные скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^2$; $\mathbf{1}$ – единичная (2×2)-матрица. Норма в $L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, обозначается через $\|\cdot\|_p$; при $p = 2$ индекс не пишется. Интегралы без указания области интегрирования считаются распространенными по $\mathbb{R}^2$. Через C, c обозначаются различные оценочные постоянные. Для матрицы h символ h^t означает транспонированную матрицу. Если Ξ – измеримое множество в $\mathbb{R}^2$, то $\operatorname{meas}\Xi$ означает двумерную меру Лебега множества Ξ.

Если $\mathcal{B}$ – банахово пространство, то через $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ обозначается норма в $\mathcal{B}$. Пусть $\widetilde{\mathcal{B}}$ – еще одно банахово пространство. Для операторной нормы линейного ограниченного отображения $\mathcal{T} : \mathcal{B} \to \widetilde{\mathcal{B}}$ используем обозначение $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}$. Часто пишем просто $\|\mathcal{T}\|$, если это не ведет к смешениям.

2. Магнитный потенциал задается измеримой вектор-функцией $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + A_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$ с вещественными коэффициентами, причем

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{a}_j) = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad j=1,2, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

Будем также предполагать, что выполнена оценка

$$\int_\Omega |\mathbf{A}|^2|u|^2 d\mathbf{x} \le \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\Omega,\mathbf{A}) \int_\Omega |u|^2 d\mathbf{x}, \tag{1.2}$$

$$\forall \varepsilon \in (0,1),\ u \in \widetilde{H}^1(\Omega).$$

Метрика задается измеримой (2×2)-матрицей-функцией $g(\mathbf{x}) = \{g^{jl}(\mathbf{x})\}$ с вещественными элементами, причем

$$g(\mathbf{x}+\mathbf{a}_j) = g(\mathbf{x}), \quad j=1,2, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2, \tag{1.3}$$

$$c_0\mathbf{1} \le g(\mathbf{x}) \le c_1\mathbf{1}, \quad 0 < c_0 \le c_1 < \infty. \tag{1.4}$$

Представим метрику g в виде

$$g(\mathbf{x}) := \omega^2(\mathbf{x}) g_0(\mathbf{x}), \quad \det g_0(\mathbf{x}) = 1,\ \omega(\mathbf{x}) := (\det g(\mathbf{x}))^{1/4}. \tag{1.5}$$

Предполагается, что

$$\omega \in \widetilde{H}^1(\Omega), \tag{1.6}$$

$$\int_\Omega |\nabla\omega|^2|u|^2 d\mathbf{x} \le \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\Omega,\omega) \int_\Omega |u|^2 d\mathbf{x}, \tag{1.7}$$

$$\forall \varepsilon \in (0,1),\ u \in \widetilde{H}^1(\Omega).$$

Из результатов [14, лемма 2.1] вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Пусть для измеримой функции F выполнено*

$$\int_\Omega |F| \ln(1+|F|) d\mathbf{x} < \infty.$$

Тогда справедлива оценка

$$\int_\Omega |F||u|^2 d\mathbf{x} \le \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\Omega,F) \int_\Omega |u|^2 d\mathbf{x},$$

$$\forall \varepsilon \in (0,1),\ u \in H^1(\Omega).$$

Таким образом, оценки (1.2), (1.7) заведомо выполнены, если

$$\int_\Omega |\mathbf{A}|^2 \ln(1+|\mathbf{A}|) d\mathbf{x} < \infty, \qquad \int_\Omega |\nabla\omega|^2 \ln(1+|\nabla\omega|) d\mathbf{x} < \infty.$$

Пусть $d\nu$ – вещественный борелевский заряд в $\mathbb{R}^2$ с локально конечной вариацией. Тем самым,

$$|\nu|(\Xi) := \int_\Xi |d\nu| < \infty \tag{1.8}$$

для любого борелевского ограниченного в $\mathbb{R}^2$ множества Ξ; будем считать, что заряд $d\nu$ периодичен относительно решетки Γ, то есть выполнено условие

$$\int_{\Xi+n_1\mathbf{a}_1+n_2\mathbf{a}_2} d\nu(\mathbf{x}) = \int_\Xi d\nu(\mathbf{x}),\ \mathbf{n} = \{n_1,n_2\} \in \mathbb{Z}^2. \tag{1.9}$$

Представим заряд $d\nu$ в виде

$$d\nu = d\nu_+ - d\nu_-, \qquad 2d\nu_\pm := |d\nu| \pm d\nu.$$

Наложим на заряд $d\nu$ следующие условия, заимствованные из [16].

(i) *Форма*

$$m_+[u,u] := \int |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + \int |u|^2 d\nu_+, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),$$

допускает замыкание в $L_2(\mathbb{R}^2)$. (Это означает, что для любой последовательности $\{u_n\}$, $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, сходящейся в $L_2(\mathbb{R}^2)$ к нулю и фундаментальной относительно формы m_+, выполнено $m_+[u_n, u_n] \to 0$ при $n \to \infty$.) Область определения замыкания формы m_+ обозначим через $\widehat{d}$. Множество $\widehat{d}$ $(\subset H^1(\mathbb{R}^2))$, вообще говоря, не совпадает с $H^1(\mathbb{R}^2)$; оно зависит только от $d\nu_+$.

(ii) *При некотором* $a < 1$ *справедливо неравенство*

$$\int |u|^2 d\nu_- \le a \left(\int \langle g\nabla u, \nabla u\rangle d\mathbf{x} + \int |u|^2 d\nu_+ \right) + C(a; g, d\nu) \int |u|^2 d\mathbf{x}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\ a < 1. \tag{1.10}$$

Отметим, что *оценка* (1.10) *распространяется на все функции из* $\widehat{d}$.

(iii) *Выполнена оценка*

$$\int_\Omega |u|^2 |d\nu| \le \varepsilon \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + \max_{\mathbf{x}\in\Omega} |u|^2 \right) + C(\varepsilon; \Omega, d\nu) \int_\Omega |u|^2 d\mathbf{x}, \quad \forall \varepsilon \in (0,1),\ u \in \widetilde{C}^\infty(\Omega). \tag{1.11}$$

Легко понять, что из условия (i) вытекает следующее условие.

(i$'$) *Форма*

$$m_+^\Omega[u,u] := \int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega |u|^2 d\nu_+, \quad u \in \widetilde{C}^\infty(\Omega),$$

допускает замыкание в $L_2(\Omega)$. Через $\widehat{d}_\Omega$ обозначим область определения замыкания формы m_+^Ω.

Кроме того, в [16, §2] показано, что из оценки (1.10) следует оценка

$$\int_\Omega |u|^2 d\nu_- \le a \left(\int_\Omega \langle g\nabla u, \nabla u\rangle d\mathbf{x} + \int_\Omega |u|^2 d\nu_+ \right) + C(a; g, d\nu) \int_\Omega |u|^2 d\mathbf{x}, \quad u \in \widetilde{C}^\infty(\Omega),\ a < 1, \tag{1.12}$$

с теми же константами a и $C(a; g, d\nu)$. Очевидно, *оценка* (1.12) *переносится на все функции из* $\widehat{d}_\Omega$.

Пусть η – вещественная измеримая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\eta(\mathbf{x}+\mathbf{a}_j) = \eta(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{1.13}$$

$$\eta(\mathbf{x}) > 0, \quad \text{п. в.} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{1.14}$$

$$\begin{gathered} \int\limits_\Omega |\eta u|^2 d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon; \Omega, \eta) \int\limits_\Omega |u|^2 d\mathbf{x}, \\ \forall \varepsilon \in (0,1), \ u \in \widetilde{H}^1(\Omega). \end{gathered} \tag{1.15}$$

С учетом предложения 1.1 оценка (1.15) заведомо выполнена, если

$$\int\limits_\Omega |\eta|^2 \ln(1+|\eta|) d\mathbf{x} < \infty.$$

Отметим, что согласно лемме 1.5 из [17] оценки (1.2), (1.7), (1.15) равносильны аналогичным оценкам на классе $H^1(\Omega)$.

3. В гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} &m[u,u] = m(g, \mathbf{A}, d\nu, \eta)[u,u] \\ &:= \int \langle g(\mathbf{D}-\mathbf{A})\eta^{-1}u, (\mathbf{D}-\mathbf{A})\eta^{-1}u\rangle d\mathbf{x} + \int |\eta^{-1}u|^2\, d\nu, \quad u \in \eta\widehat{d}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Отметим, прежде всего, что из условий (1.13)–(1.15) следует, что $\eta\widehat{d}$ является плотным подмножеством в $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Предложение 1.2. *Пусть $g(\mathbf{x})$ – вещественная измеримая (2×2)-матрица-функция, удовлетворяющая условию (1.4). Пусть вещественная функция $\eta(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям (1.13)–(1.15), а вектор-функция $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ подчинена условиям (1.1), (1.2). Пусть вещественный борелевский заряд $d\nu$ удовлетворяет условиям (1.8), (1.9), а также условиям (i), (ii). Тогда форма m, определенная соотношением (1.16), полуограниченна снизу и замкнута в $L_2(\mathbb{R}^2)$.*

Доказательство вполне аналогично доказательству предложения 1.3 из [17]. •

Замкнутая форма m порождает *самосопряженный* в $L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор

$$M = M(g, \mathbf{A}, d\nu, \eta). \tag{1.17}$$

4. Основной результат работы относительно периодического оператора Шредингера в $L_2(\mathbb{R}^2)$ составляет

Теорема 1.3. *Пусть магнитный потенциал* $\mathbf{A}$ *и метрика* g *удовлетворяют соответственно условиям* (1.1), (1.2) *и* (1.3)–(1.7), *а весовая функция* η – *условиям* (1.13)–(1.15). *Пусть заряд* $d\nu$ *удовлетворяет условиям* (1.8), (1.9), (i)–(iii). *Пусть квадратичная форма* $\mathfrak{m}$ *определена соотношением* (1.16), *а самосопряженный оператор* M *в* $L_2(\mathbb{R}^2)$ *порожден этой формой. Тогда спектр оператора* M *абсолютно непрерывен.*

Замечание 1.4. Используя унитарное в $L_2(\mathbb{R}^2)$ преобразование $u \mapsto u\, e^{i\langle \mathbf{k}_\mathbf{A}, \mathbf{x}\rangle}$, где $\mathbf{k}_\mathbf{A} := (\operatorname{meas}\Omega)^{-1}\int_\Omega \mathbf{A}d\mathbf{x}$, мы можем без ограничения общности подчинить магнитный потенциал $\mathbf{A}$ условию калибровки

$$\int\limits_\Omega \mathbf{A}d\mathbf{x} = 0. \tag{1.18}$$

§2. Разложение в прямой интеграл. Схема Томаса

1. Прямой интеграл. Через $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ обозначим базис двойственной к Γ решетки в $\mathbb{R}^2$:

$$\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_l\rangle = 2\pi\delta_{jl}, \quad j,l = 1,2.$$

Элементарную ячейку двойственной решетки обозначим через

$$\widetilde{\Omega} := \{\mathbf{k} = \tau_1\mathbf{b}_1 + \tau_2\mathbf{b}_2 : \quad 0 \le \tau_j < 1, \quad j = 1,2\}. \tag{2.1}$$

Ячейка (2.1) двойственна к Ω.

Разложение периодических операторов в прямой интеграл строится с помощью *преобразования Гельфанда* $\mathcal{U}$. Рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathcal{K} := \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega)\, d\mathbf{k}. \tag{2.2}$$

Отображение $\mathcal{U}: \ L_2(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{K}$ первоначально определяется на функциях класса Шварца $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ формулой

$$(\mathcal{U}f)(\mathbf{k},\mathbf{x}) = \\ (\operatorname{meas}\widetilde{\Omega})^{-1/2} e^{-i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2} e^{-i\langle \mathbf{k}, n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2\rangle} f(\mathbf{x} + n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2).$$

Затем оно продолжается по непрерывности до *унитарного* отображения $L_2(\mathbb{R}^2)$ на $\mathcal{K}$.

В $L_2(\Omega)$ для каждого $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ ($\mathbf{k}$ – *квазиимпульс*) рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} &m(\mathbf{k})[u,u] = m(\mathbf{k}; g, \mathbf{A}, d\nu, \eta)[u,u] \\ :=& \int\limits_{\Omega} \langle g(\mathbf{D} - \mathbf{A} + \mathbf{k})\eta^{-1}u, (\mathbf{D} - \mathbf{A} + \overline{\mathbf{k}})\eta^{-1}u\rangle \, d\mathbf{x} \\ +& \int\limits_{\Omega} |\eta^{-1}u|^2 \, d\nu, \quad u \in \eta \widehat{d}_{\Omega}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Форма (2.3) замкнута и полуограничена снизу (см. [17, §2]). Отметим, что область определения формы (2.3) не зависит от $\mathbf{k}$. Замкнутая форма $m(\mathbf{k})$ порождает самосопряженный в $L_2(\Omega)$ оператор

$$M(\mathbf{k}) := M(\mathbf{k}; g, \mathbf{A}, d\nu, \eta). \tag{2.4}$$

Стандартные рассуждения (см., например, [3, §2], [5, §2]) показывают, что действие оператора (1.17) в прямом интеграле (2.2) сводится к умножению на оператор-функцию $M(\mathbf{k})$:

$$\mathcal{U} M(g, \mathbf{A}, d\nu, \eta)\mathcal{U}^{-1} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus M(\mathbf{k}; g, \mathbf{A}, d\nu, \eta) \, d\mathbf{k}.$$

2. Комплексификация. Схема Томаса связана с распространением форм $m(\mathbf{k})$ и операторов $M(\mathbf{k})$ на комплексные значения $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$ квазиимпульса. При таком аналитическом продолжении возникают *секториальные формы и m-секториальные операторы*, систематически исследованные в книге Т. Като [7].

Формула (2.3) позволяет аналитически продолжить форму $m(\mathbf{k})$ на любые $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. При этом на области определения $\widehat{d}_{\Omega}$ *форма $m(\mathbf{k})$ замкнута и секториальна* для $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. Такая форма порождает (см. [7, теоремы VI 2.1, 2.5, 2.7]) m-секториальный оператор, который мы по-прежнему будем обозначать через $M(\mathbf{k}) = M(\mathbf{k}; g, \mathbf{A}, d\nu, \eta)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. В [17, §2] пояснено, что *резольвента оператора $M(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$, компактна.*

В дальнейшем значение $k_2 \in \mathbb{R}$ фиксируем, но считаем $k_1 \in \mathbb{C}$. Тогда операторы $M(k_1, k_2)$ образуют относительно параметра $k_1 \in \mathbb{C}$ *самосопряженное аналитическое семейство типа* (B) *с* *компактной резольвентой*. Напомним, что семейство типа (B) соответствует определению операторов через *секториальные формы с постоянной областью определения* (см. [7, §VII 4]). Самосопряженность семейства означает, что $(M(k_1, k_2))^* = M(\overline{k_1}, k_2)$, $k_1 \in \mathbb{C}$, $k_2 \in \mathbb{R}$.

3. Схема Томаса применительно к операторным семействам типа (B) подробно описана в [4]. Эти соображения применимы и к рассматриваемому нами случаю. Именно, доказательство абсолютной непрерывности спектра оператора M сводится к проверке соотношения

$$\|(M(\mu + iy, k_2))^{-1}\| \to 0 \quad \text{при} \quad |y| \to \infty$$

для подходящего $\mu \in \mathbb{R}$ и всех $k_2 \in \mathbb{R}$. В нашем случае соответствующая оценка будет получена для случая скалярной метрики g. Именно, пусть в (1.5) $g_0(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$, то есть выполнено

$$g(\mathbf{x}) = \omega^2(\mathbf{x})\mathbf{1}. \tag{2.5}$$

Из (1.3)–(1.5) следует, что

$$\omega(\mathbf{x} + \mathbf{a}_j) = \omega(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{2.6}$$

причем

$$0 < \omega_0 \le \omega(\mathbf{x}) \le \omega_1 < \infty, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \tag{2.7}$$

Положим

$$k_1 = \mu + iy, \quad \mu = \pi|\mathbf{a}_1|^{-1}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad k_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Условимся в этом случае писать $M(y)$ вместо $M(\mathbf{k})$, зависимость от k_2 в обозначениях не отражается; аналогичное соглашение принимается для обозначения других операторов и форм.

Основной технический результат работы – следующая теорема, в которой метрика предполагается скалярной.

Теорема 2.1. *Пусть заряд $d\nu$ удовлетворяет условиям* (1.8), (1.11), (i′), (1.12)*; и для магнитного потенциала $\mathbf{A}$ выполнены условия* (1.2), (1.18)*. Пусть метрика g удовлетворяет условиям* (1.6), (1.7), (2.5)–(2.7)*; а весовая функция η – условиям* (1.14), (1.15)*. Пусть $M(y) = M(\mathbf{k}; g, \mathbf{A}, d\nu, \eta)$, где $\mathbf{k}$ определено в* (2.8)*. Тогда существует такая постоянная*

$$y_0 = y_0(\Omega, a, \omega, \mathbf{A}, d\nu, \eta, k_2),$$

что оператор $M(y)$ обратим при $|y| \geq y_0$, и

$$\begin{gathered} \|(M(y))^{-1}\| \leq c(y), \quad |y| \geq y_0, \\ c(y) = c(y; \Omega, a, \omega, \mathbf{A}, \eta, k_2) \to 0 \text{ при } |y| \to \infty. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Если k_2 пробегает ограниченное подмножество в $\mathbb{R}$, то y_0 можно выбрать не зависящим от k_2.

Замечание 2.2. В теореме 2.1 условие (1.18) на магнитный потенциал $\mathbf{A}$ может быть опущено. В этом случае утверждение теоремы, очевидно, сохранит свою силу, если в (2.8) заменить μ на $\mu + (k_{\mathbf{A}})_1$.

Утверждение теоремы 1.3 в случае скалярной метрики вида (2.5) получается из теоремы 2.1 стандартным путем (см. [4, §2]). Теорема 1.3 в полном объеме будет выведена из теоремы 2.1 в §7.

§3. Оценки для свободного оператора

1. В этом параграфе мы устанавливаем оценки, необходимые для доказательства теоремы 2.1.

Запишем ряд Фурье для $v \in L_2(\Omega)$:

$$v(\mathbf{x}) = (\operatorname{meas} \Omega)^{-1/2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \widehat{v}_{\mathbf{n}} \exp\left(i \langle n_1 \mathbf{b}_1 + n_2 \mathbf{b}_2, \mathbf{x} \rangle\right). \tag{3.1}$$

Пусть $\mathcal{F}$ – дискретное (унитарное) преобразование Фурье, $\mathcal{F} : L_2(\Omega) \to l_2(\mathbb{Z}^2)$, действующее в соответствии с (3.1) по формуле $\mathcal{F} v = \{\widehat{v}_{\mathbf{n}}\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$.

Оператор $M_0(y) := (\mathbf{D} + \mathbf{k})^2$, в котором $\mathbf{k}$ определено в (2.8), представляется в виде

$$M_0(y) = \mathcal{F}^* \mathbf{h}(y) \mathcal{F}, \tag{3.2}$$

где *символ* $\mathbf{h}(y) = \{h_{\mathbf{n}}(y)\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$, задан формулой (ср. [3, §3])

$$h_{\mathbf{n}}(y) = \mu^2 (2n_1 + 1)^2 + (\alpha n_1 + \beta n_2 + k_2)^2 - y^2 + 2iy\mu(2n_1 + 1). \tag{3.3}$$

Здесь $\alpha = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, $\beta = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{e}_2 \rangle$; отметим, что $\mathbf{b}_1 = 2\mu \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \beta \mathbf{e}_2$. Символ (3.3) допускает факторизацию:

$$\begin{gathered} h_{\mathbf{n}}(y) = q_{\mathbf{n}}^{(+)}(y) q_{\mathbf{n}}^{(-)}(y), \\ q_{\mathbf{n}}^{(\pm)}(y) := \mu(2n_1 + 1) \pm i(\alpha n_1 + \beta n_2 + k_2 \pm y). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Из (3.2)–(3.4) непосредственно следует оценка

$$\|(M_0(y))^{-1}\| \le \min\{(2\mu|y|)^{-1},\ \mu^{-2}\} \leqslant 2\mu^{-1}(\mu+|y|)^{-1}.$$

2. Введем операторы

$$\begin{aligned} P_0(y) &:= \mathcal{F}^*\{|h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1/2}\}\mathcal{F}, \\ P(y) &:= \mathcal{F}^*\{(\overline{h_{\mathbf{n}}(y)})^{-1}|h_{\mathbf{n}}(y)|^{1/2}\}\mathcal{F}, \quad \mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2; \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$Q_\pm(y) := \mathcal{F}^*\{q_{\mathbf{n}}^{(\pm)}(y)\}\mathcal{F},\ |Q_\pm(y)| := \mathcal{F}^*\{|q_{\mathbf{n}}^{(\pm)}(y)|\}\mathcal{F}, \quad \mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2. \tag{3.6}$$

Тогда

$$R_0(y) := (M_0(y))^{-1} = P_0(y)(P(y))^* = (Q_+(y))^{-1}(Q_-(y))^{-1}. \tag{3.7}$$

Отметим, что операторы $Q_\pm(y)$ обратимы и

$$\|(Q_\pm(y))^{-1}\| \le \mu^{-1}.$$

При $R\ge 1$ определим функции

$$\chi_R(\mathbf{n};y) := \begin{cases} 1, & \text{если } 2\mu|n_1|\le R|y| \quad \text{и} \quad |\alpha n_1+\beta n_2|\le R|y| \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\widetilde{\chi}_R(\mathbf{n};y) := 1-\chi_R(\mathbf{n};y).$$

Далее, положим $\boldsymbol{\chi}_R(y) := \{\chi_R(\mathbf{n};y)\}$, $\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2$;

$$\mathcal{X}_R(y) := \mathcal{F}^*\boldsymbol{\chi}_R(y)\mathcal{F}, \tag{3.8}$$

$$\widetilde{\mathcal{X}}_R(y) := I-\mathcal{X}_R(y). \tag{3.9}$$

В дальнейшем, для упрощения записи, мы часто будем опускать зависимость операторов от параметров задачи. Без ограничения общности, считаем, что $|y|\ge 1$. Приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.1. *Справедливы оценки*

$$\|P_0^{-1}\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 \le C(\Omega)\|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2, \quad u\in\widetilde{H}^1(\Omega),\ R\ge 1,\ |y|\ge|k_2|; \tag{3.10}$$

$$\|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\| \ge R|y|\|\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|, \quad u\in\widetilde{H}^1(\Omega),\ R\ge 1; \tag{3.11}$$

$$\|\nabla\mathcal{X}_R\| \le \sqrt{2}\,R|y|, \quad R\ge 1; \tag{3.12}$$

$$\|P_0^{-1}u\| \ge C(\Omega)|y|^{1/2}\|u\|, \quad u\in\widetilde{H}^1(\Omega). \tag{3.13}$$

Доказательство. Оценка (3.13) немедленно следует из (3.3), (3.5). Для доказательства (3.10) достаточно использовать (3.3), (3.5), (3.9). Оценки (3.11), (3.12) очевидны. •

Предложение 3.2. *Пусть* $F \in L_4(\Omega)$. *Пусть* P_0, $|Q_\pm|$ – *операторы, определенные в* (3.5), (3.6). *Тогда справедливы оценки*

$$\|F|Q_\pm|^{-1/2}\| \le C(\Omega)\|F\|_4, \tag{3.14}$$

$$\|FP_0\| \le C(\Omega)\|F\|_4|y|^{-1/2}. \tag{3.15}$$

Доказательство сводится к применению формул [3, (3.16), (3.17), (3.30)]. •

Предложение 3.3. *Пусть для измеримой функции* V *выполнена оценка*

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega |V||u|^2 d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\Omega,V)\int\limits_\Omega |u|^2 d\mathbf{x},\\ \forall\varepsilon\in(0,1),\ \ u\in \widetilde{H}^1(\Omega).\end{gathered} \tag{3.16}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega |V||P_0u|^2 d\mathbf{x} \le c(y)\|u\|^2,\\ u\in L_2(\Omega),\ \ c(y)=c(y;\Omega,V,k_2)\to 0 \quad \text{\textit{при}}\ |y|\to\infty.\end{gathered} \tag{3.17}$$

Доказательство сводится к применению (в очень частном случае) формул [15, (4.32), (4.33)] (см. также [17, лемма 1.5]). •

§4. Оценки для магнитного потенциала

1. Калибровка. Хорошо известно, что для вектор-функции $\mathbf{A} \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющей условию (1.18), существует единственное представление

$$\mathbf{A} = \nabla\Phi_{\mathbf{A}} - \mathrm{J}\,\nabla\varphi_{\mathbf{A}},\quad \mathrm{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Здесь $\Phi_{\mathbf{A}}$, $\varphi_{\mathbf{A}} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ – слабые решения уравнений

$$\begin{gathered}\Delta\Phi_{\mathbf{A}} = \operatorname{div}\mathbf{A},\quad \int\limits_\Omega \Phi_{\mathbf{A}}\, d\mathbf{x} = 0;\\ \Delta\varphi_{\mathbf{A}} = \operatorname{div}\mathrm{J}\,\mathbf{A},\quad \int\limits_\Omega \varphi_{\mathbf{A}}\, d\mathbf{x} = 0.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Пусть вещественная функция $\Phi \in \widetilde{C}^\infty(\Omega)$ выбрана так, что

$$\|\nabla\Phi - \nabla\Phi_{\mathbf{A}}\| \le \varepsilon_\Phi. \tag{4.3}$$

Малая величина $\varepsilon_\Phi \in (0,1]$ будет выбрана ниже. Положим $\mathbf{A}' := \mathbf{A} - \nabla\Phi$. С учетом (1.2) понятно, что $\mathbf{A}'$ удовлетворяет следующему условию

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega |\mathbf{A}'|^2|u|^2 d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\Omega,\mathbf{A}') \int\limits_\Omega |u|^2 d\mathbf{x},\\ \forall\varepsilon \in (0,1),\ u \in \widetilde{H}^1(\Omega).\end{gathered} \tag{4.4}$$

Введем унитарный в $L_2(\Omega)$ оператор $U_\Phi :\ \ u \mapsto u\, e^{i\Phi(\mathbf{x})}$. Тогда выполнено соотношение

$$(U_\Phi)^{-1} M(\mathbf{k}) U_\Phi = M'(\mathbf{k}) := M(\mathbf{k}; g, \mathbf{A}', d\nu, \eta). \tag{4.5}$$

Из (4.5) непосредственно вытекает, что соотношение (2.9) выполняется для операторов $M(\mathbf{k})$ и $M'(\mathbf{k})$ одновременно.

2. Введем функцию ϱ такую, что

$$0 \le \varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \operatorname{supp}\varrho \subset \Omega, \quad \int \varrho\, d\mathbf{x} = 1.$$

Положим

$$\varrho_n(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2} n^2 \varrho(n(\mathbf{x} + m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что функции ϱ_n удовлетворяют условиям

$$0 \le \varrho_n \in \widetilde{C}^\infty(\Omega), \quad \int\limits_\Omega \varrho_n\, d\mathbf{x} = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим свертку $\mathbf{A}$ с дельта-образной последовательностью $\{\varrho_n\}$ на торе $\mathbb{R}^2/\Gamma$:

$$\mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{x}) := \int\limits_\Omega \varrho_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{A}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

Очевидно, $\mathbf{A}^{(n)} \in \widetilde{C}^\infty(\Omega)$.

Пусть φ_n – $\widetilde{H}^1(\Omega)$-решение уравнения

$$\Delta\varphi_n = \operatorname{div} \mathrm{J}\, \mathbf{A}^{(n)}, \quad \int_\Omega \varphi_n d\mathbf{x} = 0. \tag{4.6}$$

Тогда $\varphi_n \in \widetilde{C}^\infty(\Omega)$. Так как $\mathbf{A}^{(n)} \to \mathbf{A}$ в $L_2(\Omega)$ при $n \to \infty$, то

$$\|\varphi_n - \varphi_{\mathbf{A}}\|_{H^1(\Omega)} \le \varepsilon_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4.7}$$

Позже мы фиксируем число $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы величина $\varepsilon_n \in (0,1]$ оказалась достаточно малой.

Справедлива оценка

$$\begin{gathered}\int_\Omega |\mathbf{A}^{(n)}|^2|u|^2 d\mathbf{x} \le \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\Omega,\mathbf{A}) \int_\Omega |u|^2 d\mathbf{x}, \\ \forall\varepsilon \in (0,1),\ u \in \widetilde{H}^1(\Omega).\end{gathered} \tag{4.8}$$

Отметим, что *оценка* (4.8) *равномерна по* n. Действительно, применяя неравенство Минковского и неравенство (1.2), получаем (здесь все функции понимаются как функции на торе $\mathbb{R}^2/\Gamma$)

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\mathbf{A}^{(n)}|^2|u|^2 d\mathbf{x} = \int_\Omega |u(\mathbf{x})|^2 \left| \int_\Omega \mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\varrho_n(\mathbf{y})d\mathbf{y}\right|^2 d\mathbf{x} \\
&\le \left(\int_\Omega \varrho_n(\mathbf{y}) \left(\int_\Omega |\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} d\mathbf{y}\right)^2 \\
&= \left(\int_\Omega \varrho_n(\mathbf{y}) \left(\int_\Omega |\mathbf{A}(\mathbf{z})|^2 |u(\mathbf{z}+\mathbf{y})|^2 d\mathbf{z}\right)^{1/2} d\mathbf{y}\right)^2 \\
&\le \left(\int_\Omega \varrho_n(\mathbf{y}) \left(\varepsilon\int_\Omega |\nabla_{\mathbf{z}} u(\mathbf{z}+\mathbf{y})|^2 d\mathbf{z} + C(\varepsilon;\Omega,\mathbf{A}) \int_\Omega |u(\mathbf{z}+\mathbf{y})|^2 d\mathbf{z}\right)^{1/2} d\mathbf{y}\right)^2 \\
&= \left(\int_\Omega \varrho_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y}\right)^2 \left(\varepsilon \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{z}} u(\mathbf{z})|^2 d\mathbf{z} + C(\varepsilon;\Omega,\mathbf{A}) \int_\Omega |u(\mathbf{z})|^2 d\mathbf{z}\right) \\
&= \varepsilon \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{z}} u(\mathbf{z})|^2 d\mathbf{z} + C(\varepsilon;\Omega,\mathbf{A}) \int_\Omega |u(\mathbf{z})|^2 d\mathbf{z}, \quad \forall\varepsilon \in (0,1),\ u \in \widetilde{H}^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Далее, справедлива оценка

$$\|e^{\alpha\varphi_{\mathbf{A}}}\| \le C(\alpha;\Omega,\|\varphi_{\mathbf{A}}\|_{H^1(\Omega)}),\ \ \alpha\in\mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Для доказательства формулы (4.9) используем неравенство Соболева (см., например, [11, (2.3.3/3)])

$$\|\varphi_{\mathbf{A}}\|_k \le C(\Omega)k^{1/2}\|\varphi_{\mathbf{A}}\|_{H^1(\Omega)},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Тогда

$$\|e^{\alpha\varphi_{\mathbf{A}}}\|^2=\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\alpha)^k}{k!}\varphi_{\mathbf{A}}^k\right)d\mathbf{x}\le \operatorname{meas}\Omega+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2|\alpha|)^k}{k!}\|\varphi_{\mathbf{A}}\|_k^k$$

$$\le \operatorname{meas}\Omega+\sum_{k=1}^{\infty}\left(C(\Omega)|\alpha|\|\varphi_{\mathbf{A}}\|_{H^1(\Omega)}\right)^k\frac{k^{k/2}}{k!}\le C(\alpha;\Omega,\|\varphi_{\mathbf{A}}\|_{H^1(\Omega)}).$$

Аналогично,

$$\|e^{\alpha\varphi_n}\|\le C(\alpha;\Omega,\|\varphi_n\|_{H^1(\Omega)})\le C(\alpha;\Omega,\|\varphi_{\mathbf{A}}\|_{H^1(\Omega)}),\ \ \alpha\in\mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Теперь мы готовы доказать следующую лемму.

Лемма 4.1. *Пусть магнитный потенциал* $\mathbf{A}$ *удовлетворяет условиям* (1.2), (1.18). *Пусть скалярные функции* $\varphi_{\mathbf{A}}$ *и* φ_n *определены соответственно в* (4.2) *и* (4.6). *Тогда справедливы оценки*

$$\|e^{\alpha\varphi_{\mathbf{A}}}\|_{H^1(\Omega)}\le C(\alpha;\Omega,\|\varphi_{\mathbf{A}}\|_{H^1(\Omega)}),\ \ \alpha\in\mathbb{R}, \tag{4.11}$$

$$\|e^{\alpha\varphi_n}\|_{H^1(\Omega)}\le C(\alpha;\Omega,\|\varphi_{\mathbf{A}}\|_{H^1(\Omega)}),\ \ \alpha\in\mathbb{R}. \tag{4.12}$$

Доказательство. Из определения функций φ_n (см. (4.6)) вытекают соотношения

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla(e^{\alpha\varphi_n})|^2d\mathbf{x}=\alpha^2\int\limits_{\Omega}|\nabla\varphi_n|^2e^{2\alpha\varphi_n}d\mathbf{x}=\alpha/2\int\limits_{\Omega}\langle\nabla\varphi_n,\nabla(e^{2\alpha\varphi_n})\rangle d\mathbf{x}$$

$$=\alpha/2\int\limits_{\Omega}\langle \mathrm{J}\,\mathbf{A}^{(n)},\nabla(e^{2\alpha\varphi_n})\rangle d\mathbf{x}=\alpha^2\int\limits_{\Omega}\langle \mathrm{J}\,\mathbf{A}^{(n)},\nabla\varphi_n\rangle e^{2\alpha\varphi_n}d\mathbf{x}$$

$$\le\alpha^2/2\int\limits_{\Omega}|\nabla\varphi_n|^2e^{2\alpha\varphi_n}d\mathbf{x}+\alpha^2/2\int\limits_{\Omega}|\mathbf{A}^{(n)}|^2e^{2\alpha\varphi_n}d\mathbf{x}.$$

Отсюда, используя (4.8), получаем

$$\int\limits_\Omega |\nabla(e^{\alpha\varphi_n})|^2 d\mathbf{x} \le \alpha^2 \int\limits_\Omega |\mathbf{A}^{(n)}|^2 e^{2\alpha\varphi_n} d\mathbf{x}$$
$$\le \varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla(e^{\alpha\varphi_n})|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon; \alpha, \Omega, \mathbf{A}) \int\limits_\Omega e^{2\alpha\varphi_n} d\mathbf{x}, \quad \forall \varepsilon \in (0,1).$$

Выбирая $\varepsilon = 1/2$, с учетом (4.10) получаем оценку (4.12). Переходя в (4.12) к пределу по $n \to \infty$, из (4.7) и теоремы Фату получаем (4.11). •

3. В [2] была описана факторизация для оператора Паули. Эта факторизация играла центральную роль при исследовании магнитного оператора Шредингера (см. [2, 3, 5, 15, 17]). Здесь мы также используем данную факторизацию.

Положим $\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)} := -\mathrm{J}\,\nabla\varphi_n$, $\widetilde{B}_n := \partial_1 \widetilde{A}_2^{(n)} - \partial_2 \widetilde{A}_1^{(n)} = \Delta\varphi_n$. Выпишем оператор Паули (точнее, один из его блоков) в $L_2(\mathbb{R}^2)$:

$$\widetilde{M}_n := M(\mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{A}}^{(n)}, \widetilde{B}_n d\mathbf{x}, 1) = (\mathbf{D} - \widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})^2 + \widetilde{B}_n.$$

Пусть

$$\widetilde{M}_n(y) := (\mathbf{D} - \widetilde{\mathbf{A}}^{(n)} + \mathbf{k})^2 + \widetilde{B}_n \tag{4.13}$$

– оператор в $L_2(\Omega)$, отвечающий оператору $\widetilde{M}_n$ (здесь $\mathbf{k}$ определено в (2.8)). Справедливо следующее мультипликативное представление (ср. [2, (3.11)]):

$$\widetilde{M}_n(y) = e^{-\varphi_n} Q_+(y) e^{2\varphi_n} Q_-(y) e^{-\varphi_n}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{4.14}$$

4. В дальнейшем большую роль будет играть оператор

$$T_n(y) := (\widetilde{M}_n(y)^{-1})^* P_0^{-2} = e^{\varphi_n}(Q_+^{-1})^* e^{-2\varphi_n} (Q_-^{-1})^* e^{\varphi_n} P_0^{-2}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{4.15}$$

Введем обозначения

$$\widetilde{A}_\pm^{(n)} := [Q_\pm, \varphi_n] = D_1\varphi_n \pm i D_2 \varphi_n = \mp \widetilde{A}_1^{(n)} - i \widetilde{A}_2^{(n)}. \tag{4.16}$$

Здесь $[\cdot,\cdot]$ – коммутатор двух операторов. Справедливо тождество

$$[Q_\pm^{-1}, f] = -Q_\pm^{-1}[Q_\pm, f] Q_\pm^{-1}, \quad f \in \widetilde{C}^\infty(\Omega). \tag{4.17}$$

Следующие три утверждения доказаны в работе [17] (см. [17, леммы 4.1, 4.2 и следствие 4.3]).

Лемма 4.2. *Справедливы оценки*

$$\|T_n\| \le C(\Omega, \varphi_n); \tag{4.18}$$

$$\|[\nabla, T_n]\| \le C(\Omega, \varphi_n). \tag{4.19}$$

Лемма 4.3. *Пусть заряд $d\nu$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} |T_n P_0 \mathcal{X}_R u|^2 |d\nu| \le c(y)\|\mathcal{X}_R u\|^2, \\ u \in L_2(\Omega),\ c(y) := c(y; \Omega, R, \varphi_n, d\nu, k_2) \to 0 \quad \text{при } |y| \to \infty.\end{gathered} \tag{4.20}$$

Следствие 4.4. *Пусть измеримая функция V удовлетворяет условию* (3.16)*. Тогда выполнена оценка*

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} |V||T_n P_0 \mathcal{X}_R u|^2 d\mathbf{x} \le c(y)\|\mathcal{X}_R u\|^2, \\ u \in L_2(\Omega),\ c(y) := c(y; \Omega, R, \varphi_n, V, k_2) \to 0 \quad \text{при } |y| \to \infty.\end{gathered} \tag{4.21}$$

5. Следующая лемма является ключевой для включения магнитного потенциала. Аналогичное утверждение было доказано в [17, лемма 4.4]. Однако, сейчас наши условия на $\mathbf{A}$ более свободные, чем в [17].

Лемма 4.5. *Пусть $F \in L_2(\Omega)$. Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathcal{X}_R P_0 T_n^* F P_0\| \le C(\Omega, R, \mathbf{A}, k_2)\|F\||y|^{-1}. \tag{4.22}$$

Доказательство. Используя соотношения (4.16), (4.17), получаем

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{M}_n(y))^{-1} &= e^{\varphi_n} Q_-^{-1} e^{-2\varphi_n} Q_+^{-1} e^{\varphi_n} \\
=& Q_-^{-1}Q_+^{-1} + Q_-^{-1}\widetilde{A}_-^{(n)} e^{\varphi_n} Q_-^{-1} e^{-\varphi_n} Q_+^{-1} \\
-& Q_-^{-1} e^{-\varphi_n} Q_+^{-1} \widetilde{A}_+^{(n)} e^{\varphi_n} Q_+^{-1} \\
-& Q_-^{-1}\widetilde{A}_-^{(n)} e^{\varphi_n} Q_-^{-1} e^{-2\varphi_n} Q_+^{-1} \widetilde{A}_+^{(n)} e^{\varphi_n} Q_+^{-1} \\
=& Q_-^{-1}Q_+^{-1} + Q_-^{-1}\widetilde{A}_-^{(n)} Q_-^{-1} Q_+^{-1} \\
+& Q_-^{-1}\widetilde{A}_-^{(n)} e^{\varphi_n} Q_-^{-1}\widetilde{A}_-^{(n)} e^{-\varphi_n} Q_-^{-1} Q_+^{-1} \\
-& Q_-^{-1}Q_+^{-1}\widetilde{A}_+^{(n)} Q_+^{-1} + Q_-^{-1}Q_+^{-1}\widetilde{A}_+^{(n)} e^{-\varphi_n} Q_+^{-1}\widetilde{A}_+^{(n)} e^{\varphi_n} Q_+^{-1} \\
-& Q_-^{-1}\widetilde{A}_-^{(n)} e^{-\varphi_n} Q_-^{-1} Q_+^{-1} \widetilde{A}_+^{(n)} e^{\varphi_n} Q_+^{-1} \\
-& Q_-^{-1}\widetilde{A}_-^{(n)} e^{\varphi_n} Q_-^{-1} 2\widetilde{A}_-^{(n)} e^{-2\varphi_n} Q_-^{-1} Q_+^{-1} \widetilde{A}_+^{(n)} e^{\varphi_n} Q_+^{-1} \\
=& I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Представление (4.15) показывает, что

$$\mathcal{X}_R P_0 T_n^* F P_0 = \mathcal{X}_R P_0^{-1} (\widetilde{M}_n(y))^{-1} F P_0.$$

Мы оценим член $\mathcal{X}_R P_0^{-1} I_7 F P_0$. Остальные шесть слагаемых оцениваются аналогично или даже проще. Используя тождество (3.7), получаем

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{X}_R P_0^{-1} I_7 F P_0\| \le 2\|\mathcal{X}_R P_0^{-1} |Q_-|^{-1/2}\| \\
&\times \| |Q_-|^{-1/2} |\widetilde{A}_-^{(n)} e^{\varphi_n}|^{1/2}\| \cdot \| |\widetilde{A}_-^{(n)} e^{\varphi_n}|^{1/2} |Q_-|^{-1/2}\| \\
&\times \| |Q_-|^{-1/2} |\widetilde{A}_-^{(n)} e^{-2\varphi_n}|^{1/2}\| \cdot \| |\widetilde{A}_-^{(n)} e^{-2\varphi_n}|^{1/2} P_0\| \\
&\times \|P_0 |\widetilde{A}_+^{(n)} e^{\varphi_n}|^{1/2}\| \cdot \| |\widetilde{A}_+^{(n)} e^{\varphi_n}|^{1/2} |Q_+|^{-1/2}\| \\
&\times \| |Q_+|^{-1/2} |F|^{1/2}\| \cdot \| |F|^{1/2} P_0\|.
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Далее, из (3.4), (3.6)–(3.8) следует, что

$$\|\mathcal{X}_R P_0^{-1} |Q_-|^{-1/2}\| = \|\mathcal{X}_R |Q_+|^{1/2}\| \le C(\Omega, R, k_2)|y|^{1/2}.$$

Оставшиеся множители в (4.24) оцениваются на основании (3.14), (3.15), (4.12) и (4.16). В результате имеем

$$\|\mathcal{X}_R P_0^{-1} I_7 F P_0\| \le C(\Omega, R, \mathbf{A}, k_2)\|F\||y|^{-1}.$$

Суммируя аналогичные оценки для $\mathcal{X}_R P_0^{-1} I_j F P_0$, $j = 1, \ldots 6$, получаем (4.22). •

§5. Доказательство теоремы 2.1 при $g = \mathbf{1}$, $\eta = 1$

В данном параграфе мы предполагаем, что $g = \mathbf{1}$, $\eta = 1$. С учетом (4.5), для того, чтобы установить оценку (2.9) (при $\omega = 1$, $\eta = 1$), достаточно доказать, что для некоторого магнитного потенциала $\mathbf{A}'$, описанного в п. 4.1, по любой функции $0 \neq u \in \widehat{d}_\Omega$ найдется функция $0 \neq v \in \widehat{d}_\Omega$ такая, что

$$\begin{gathered} |m'(y)[u,v]| := |m(y; \mathbf{1}, \mathbf{A}', d\nu, 1)[u,v]| \geq (c(y))^{-1}\|u\|\|v\|, \\ |y| \geq y_0, \ c(y) \to 0 \text{ при } |y| \to \infty. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Отметим, что поскольку в дальнейшем функции Φ и φ_n будут фиксированы, все константы, зависящие от $\mathbf{A}'$ и φ_n, в конечном счете зависят от $\mathbf{A}$. Представим функцию $0 \neq u \in \widehat{d}_\Omega$ в виде $u = \widetilde{\mathcal{X}}_R u + \mathcal{X}_R u$. Ясно, что $\mathcal{X}_R u \in \widetilde{C}^\infty(\Omega)$, а потому $\widetilde{\mathcal{X}}_R u \in \widehat{d}_\Omega$. Положим (ср. [16, (4.2)])

$$v := \widetilde{\mathcal{X}}_R u + T_n \mathcal{X}_R u. \tag{5.2}$$

В [17, §5] пояснено, что $v \in \widehat{d}_\Omega$, и, кроме того (ср. [17, (5.3)]), выполнена оценка

$$\|P_0^{-1} v\| \leq C(\Omega, \varphi_n)\|P_0^{-1} u\|. \tag{5.3}$$

Запишем (см. (2.3))

$$\begin{aligned} m'(y)[u,v] = &\int_\Omega \langle (\mathbf{D} - \mathbf{A}' + \mathbf{k})\widetilde{\mathcal{X}}_R u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}' + \overline{\mathbf{k}})\widetilde{\mathcal{X}}_R u\rangle d\mathbf{x} \\ &+ \int_\Omega \langle (\mathbf{D} - \mathbf{A}' + \mathbf{k})\widetilde{\mathcal{X}}_R u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}' + \overline{\mathbf{k}})T_n \mathcal{X}_R u\rangle d\mathbf{x} \\ &+ \int_\Omega \langle (\mathbf{D} - \mathbf{A}' + \mathbf{k})\mathcal{X}_R u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}' + \overline{\mathbf{k}})\widetilde{\mathcal{X}}_R u\rangle d\mathbf{x} \\ &+ \int_\Omega \langle (\mathbf{D} - \mathbf{A}' + \mathbf{k})\mathcal{X}_R u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}' + \overline{\mathbf{k}})T_n \mathcal{X}_R u\rangle d\mathbf{x} + \int_\Omega |\widetilde{\mathcal{X}}_R u|^2 d\nu \\ &+ \int_\Omega \widetilde{\mathcal{X}}_R u\, \overline{T_n \mathcal{X}_R u}\, d\nu + \int_\Omega \mathcal{X}_R u\, \overline{\widetilde{\mathcal{X}}_R u}\, d\nu + \int_\Omega \mathcal{X}_R u\, \overline{T_n \mathcal{X}_R u}\, d\nu \\ =: &J_1 + \dots + J_8. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Оценка для J_1 вытекает из (2.8), (4.4)

$$\operatorname{Re} J_1 \geq (1-\varepsilon_1)\|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 - \left(y^2 + C(\varepsilon_1;\Omega,\mathbf{A}',k_2)\right)\|\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2, \quad \forall\varepsilon_1\in(0,1). \tag{5.5}$$

Далее, J_2 перепишем в виде

$$\begin{aligned} J_2 = &\int_\Omega \langle(\mathbf{D}-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)}+\mathbf{k})\widetilde{\mathcal{X}}_R u, (\mathbf{D}-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)}+\overline{\mathbf{k}})T_n\mathcal{X}_R u\rangle d\mathbf{x} \\ &-\int_\Omega \langle(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widetilde{\mathcal{X}}_R u, (\mathbf{A}'-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})T_n\mathcal{X}_R u\rangle d\mathbf{x} \\ &-\int_\Omega \langle(\mathbf{A}'-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})\widetilde{\mathcal{X}}_R u, (\mathbf{D}+\overline{\mathbf{k}})T_n\mathcal{X}_R u\rangle d\mathbf{x} \\ &+\int_\Omega ({\mathbf{A}'}^2-(\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})^2)\widetilde{\mathcal{X}}_R u\,\overline{T_n\mathcal{X}_R u}\,d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Из (4.13), (4.15) следует, что

$$\int_\Omega \langle(\mathbf{D}-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)}+\mathbf{k})\widetilde{\mathcal{X}}_R u, (\mathbf{D}-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)}+\overline{\mathbf{k}})T_n\mathcal{X}_R u\rangle d\mathbf{x} + \int_\Omega \widetilde{B}_n\widetilde{\mathcal{X}}_R u\,\overline{T_n\mathcal{X}_R u}\,d\mathbf{x} = 0.$$

Отсюда и из (5.6) получаем

$$\begin{aligned} J_2 = &-\int_\Omega \widetilde{B}_n\widetilde{\mathcal{X}}_R u\,\overline{T_n\mathcal{X}_R u}\,d\mathbf{x} \\ &-\int_\Omega \langle(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widetilde{\mathcal{X}}_R u, (\mathbf{A}'-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})T_n\mathcal{X}_R u\rangle d\mathbf{x} \\ &-\int_\Omega \langle(\mathbf{A}'-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})\widetilde{\mathcal{X}}_R u, (\mathbf{D}+\overline{\mathbf{k}})T_n\mathcal{X}_R u\rangle d\mathbf{x} \\ &+\int_\Omega ({\mathbf{A}'}^2-(\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})^2)\widetilde{\mathcal{X}}_R u\,\overline{T_n\mathcal{X}_R u}\,d\mathbf{x} =: J_{21}+J_{22}+J_{23}+J_{24}. \end{aligned}$$

Из (3.11) следует, что

$$
\begin{aligned}
&|J_{21}+J_{22}+J_{24}|\\
\le&\|\widetilde{B}_n\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2+\|T_n\mathcal{X}_R u\|^2+\varepsilon_2'\|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2\\
+&C(\varepsilon_2';\Omega,k_2)\|(\mathbf{A}'-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})T_n\mathcal{X}_R u\|^2+\||{\mathbf{A}'}^2-(\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})^2|^{1/2}\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2\\
+&\||{\mathbf{A}'}^2-(\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})^2|^{1/2}T_n\mathcal{X}_R u\|^2,\quad \forall\varepsilon_2'\in(0,1),
\end{aligned}
$$

что с учетом гладкости $\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)}$, оценки (4.4) и следствия 4.4 приводит к оценке

$$
\begin{aligned}
&|J_{21}+J_{22}+J_{24}|\\
\le&\varepsilon_2\|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2+C(\varepsilon_2;\Omega,\mathbf{A}',\varphi_n)\|\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2\\
+&c(y)\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2,\quad \forall\varepsilon_2\in(0,1),\\
&c(y)=c(y;\varepsilon_2,\Omega,R,\mathbf{A}',\varphi_n,k_2)\to 0\quad\text{при } |y|\to\infty.
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Член J_{23} аналогичен члену $\mathcal{J}_{32}$ из [17, (6.15)]. Имеем (ср. [17, (6.18)])

$$
\begin{aligned}
&|J_{23}|\\
=&\left|\int_\Omega\langle(\mathbf{A}'-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})\widetilde{\mathcal{X}}_R u, T_n(\mathbf{D}+\overline{\mathbf{k}})\mathcal{X}_R u+[\mathbf{D},T_n]\mathcal{X}_R u\rangle d\mathbf{x}\right|\\
\le&\|\mathcal{X}_R P_0 T_n^*(\mathbf{A}'-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})P_0\|\cdot\|(\mathbf{D}+\overline{\mathbf{k}})\mathcal{X}_R\|\cdot\|P_0^{-1}\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|\\
\times&\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|+\|(\mathbf{A}'-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|\cdot\|[\mathbf{D},T_n]\|\cdot\|\mathcal{X}_R u\|.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Напомним, что $(\mathbf{A}'-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})=(\nabla\Phi_{\mathbf{A}}-\nabla\Phi)-\mathrm{J}\,(\nabla\varphi_{\mathbf{A}}-\nabla\varphi_n)$. Для оценки первого слагаемого в правой части (5.8) следует воспользоваться (3.10), (3.12), (4.3), (4.7), (4.22); для оценки второго – (3.13), (4.4), (4.19). В итоге получаем

$$
\begin{aligned}
&|J_{23}|\le C(\Omega,R,\mathbf{A},k_2)(\varepsilon_\Phi+\varepsilon_n)\|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|\\
+&\|(\mathbf{A}'-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2+C(\Omega,\varphi_n)|y|^{-1}\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2\\
&\le\varepsilon_3\|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2+C(\varepsilon_3;\Omega,\mathbf{A}',\varphi_n)\|\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2\\
+&\left(C(\varepsilon_3;\Omega,R,\mathbf{A},k_2)(\varepsilon_\Phi^2+\varepsilon_n^2)+C(\Omega,\varphi_n)|y|^{-1}\right)\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2,\\
&\forall\varepsilon_3\in(0,1),\ |y|\ge|k_2|.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Для J_3 запишем

$$
\begin{aligned}
J_3 = &-\int\limits_\Omega \langle \mathbf{A}'\mathcal{X}_R u, (\mathbf{D}+\overline{\mathbf{k}})\widetilde{\mathcal{X}}_R u\rangle d\mathbf{x} - \int\limits_\Omega \langle (\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathcal{X}_R u, \mathbf{A}'\widetilde{\mathcal{X}}_R u\rangle d\mathbf{x} \\
&+\int\limits_\Omega |\mathbf{A}'|\mathcal{X}_R u\,\overline{|\mathbf{A}'|\widetilde{\mathcal{X}}_R u}\,d\mathbf{x} = -\int\limits_\Omega \langle (\mathbf{A}'+\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})\mathcal{X}_R u, (\mathbf{D}+\overline{\mathbf{k}})\widetilde{\mathcal{X}}_R u\rangle d\mathbf{x} \\
&-\int\limits_\Omega \langle (\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathcal{X}_R u, (\mathbf{A}'-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})\widetilde{\mathcal{X}}_R u\rangle d\mathbf{x} + \int\limits_\Omega |\mathbf{A}'|\mathcal{X}_R u\,\overline{|\mathbf{A}'|\widetilde{\mathcal{X}}_R u}\,d\mathbf{x} \\
&=: J_{31} + J_{32} + J_{33}.
\end{aligned}
$$

Здесь мы использовали тождество $\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)} = 0$. С учетом формул (3.11), (4.4) и предложения 3.3 получаем

$$
\begin{aligned}
&|J_{31} + J_{33}| \\
&\le \varepsilon_4 \|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 + C(\varepsilon_4;\Omega,\mathbf{A}')\|\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 + c(y)\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2, \\
&\forall \varepsilon_4 \in (0,1), \quad c(y) = c(y;\varepsilon_4,\Omega,\mathbf{A}',\varphi_n,k_2) \to 0 \quad \text{при} \quad |y|\to\infty.
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Член J_{32} может быть оценен так же, как и J_{23} (ср. $\mathcal{J}_{23}$ из [17, (6.10), (6.13)]). Из (3.10), (3.12), (3.15) и (4.3), (4.7) имеем

$$
\begin{aligned}
&|J_{32}| \le \|P_0(\mathbf{A}'-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})P_0\| \cdot \|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathcal{X}_R\| \cdot \|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\| \\
&\times\|P_0^{-1}\widetilde{\mathcal{X}}_R u\| \le C(\Omega)\|P_0|(\mathbf{A}'-\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})|^{1/2}\|^2 \cdot \|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathcal{X}_R\| \\
&\times\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\| \cdot \|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\| \le C(\Omega,R,k_2)(\varepsilon_\Phi+\varepsilon_n)\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\| \\
&\times\|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\| \le \varepsilon_5\|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 + C(\varepsilon_5;\Omega,R,k_2)(\varepsilon_\Phi^2+\varepsilon_n^2)\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2, \\
&\forall \varepsilon_5 \in (0,1),\ |y| \ge |k_2|.
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Для J_4 аналогично (5.6) имеем

$$\begin{aligned} J_4 = &\int_\Omega \langle(\mathbf{D} - \widetilde{\mathbf{A}}^{(n)} + \mathbf{k})\mathcal{X}_R u, (\mathbf{D} - \widetilde{\mathbf{A}}^{(n)} + \overline{\mathbf{k}})T_n \mathcal{X}_R u\rangle d\mathbf{x} \\ -&\int_\Omega \langle(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathcal{X}_R u, (\mathbf{A}' - \widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})T_n \mathcal{X}_R u\rangle d\mathbf{x} \\ -&\int_\Omega \langle(\mathbf{A}' - \widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})\mathcal{X}_R u, (\mathbf{D} + \overline{\mathbf{k}})T_n \mathcal{X}_R u\rangle d\mathbf{x} \\ +&\int_\Omega ({\mathbf{A}'}^2 - (\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})^2)\mathcal{X}_R u \overline{T_n \mathcal{X}_R u}\, d\mathbf{x} =: J_{41} + J_{42} + J_{43} + J_{44}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Для J_{41}, в силу (4.13), (4.15), справедливо равенство

$$J_{41} = \|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2 - \int_\Omega \widetilde{B}_n \mathcal{X}_R u \overline{T_n \mathcal{X}_R u}\, d\mathbf{x},$$

и, следовательно, с учетом формул (3.13), (4.18)

$$\operatorname{Re} J_{41} \geq (1 - C(\Omega, \varphi_n)|y|^{-1})\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2. \tag{5.13}$$

Далее, из (3.12), (4.3), (4.7), (4.22) вытекает оценка

$$\begin{aligned} |J_{42}| &\leq \|\mathcal{X}_R P_0 T_n^*(\mathbf{A}' - \widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})^* P_0\| \cdot \|(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathcal{X}_R\| \cdot \|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2 \\ &\leq C(\Omega, R, \mathbf{A}, k_2)(\varepsilon_\Phi + \varepsilon_n)\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Для J_{44} из гладкости $\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)}$, оценки (4.4), предложения 3.3 и следствия 4.4 имеем

$$\begin{aligned} &|J_{44}| \leq \||{\mathbf{A}'}^2 - (\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})^2|^{1/2} P_0 P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\| \\ \times&\||{\mathbf{A}'}^2 - (\widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})^2|^{1/2} T_n P_0 P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\| \leq c(y)\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2, \\ &c(y) = c(y; \Omega, R, \mathbf{A}', \varphi_n, k_2) \to 0 \quad \text{при } |y| \to \infty. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Наконец, J_{43} оценивается аналогично J_{23} (см. (5.8)) (ср. $\mathcal{J}_{34}$ из [17, (6.15), (6.20)]):

$$\begin{aligned} &|J_{43}| \leq \|\mathcal{X}_R P_0 T_n^*(\mathbf{A}' - \widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})P_0\| \cdot \|(\mathbf{D} + \overline{\mathbf{k}})\mathcal{X}_R\| \cdot \|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2 \\ +&\|(\mathbf{A}' - \widetilde{\mathbf{A}}^{(n)})\mathcal{X}_R u\| \cdot \|[\mathbf{D}, T_n]\| \cdot \|\mathcal{X}_R u\|. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (3.12), (4.3), (4.7), (4.22), а также (3.13), (4.4), (4.19) и предложения 3.3 получаем

$$
\begin{aligned}
|J_{43}| \leq \Big(&C(\Omega, R, \mathbf{A}, k_2)(\varepsilon_\Phi + \varepsilon_n) \\
&+ C(\Omega, \mathbf{A}', \varphi_n, k_2)|y|^{-1/2}\Big) \|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2.
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Подставляя (5.13)–(5.16) в (5.12), получаем

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re} J_4 \geq (1 - C(\Omega, R, \mathbf{A}, k_2)(\varepsilon_\Phi + \varepsilon_n) - c(y))\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2, \\
&c(y) = c(y; \Omega, R, \mathbf{A}', \varphi_n, k_2) \to 0 \quad \text{при } |y| \to \infty.
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

Слагаемые J_5, J_6, J_7, J_8 оценены в [17]. Для них справедлива оценка (см. [17, (5.14)–(5.17)])

$$
\begin{aligned}
&J_5 - |J_6 + J_7 + J_8| \\
\geq &(1 - a - \varepsilon_6) \int\limits_\Omega |\widetilde{\mathcal{X}}_R u|^2 d\nu_+ - (a + \varepsilon_6)\|\nabla \widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 \\
-&C(\Omega, a, d\nu)\|\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 - c(y)\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2, \forall \varepsilon_6 \in (0,1), \\
&c(y) = c(y; \varepsilon_6, \Omega, a, R, \varphi_n, d\nu, k_2) \to 0 \quad \text{при } |y| \to \infty.
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Подставляя оценки (5.5), (5.7), (5.9)–(5.11), (5.17), (5.18) в (5.4), получаем

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re} m'(y)[u, v] \geq (1 - a - \varepsilon) \left(\int\limits_\Omega |\widetilde{\mathcal{X}}_R u|^2 d\nu_+ + \|\nabla \widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 \right) \\
&- \left(y^2 + C(\varepsilon; \Omega, a, \mathbf{A}', \varphi_n, d\nu, k_2)\right) \|\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 \\
&+ (1 - C(\varepsilon; \Omega, R, \mathbf{A}, k_2)(\varepsilon_\Phi + \varepsilon_n) - c(y)) \|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2, \forall \varepsilon \in (0,1), \\
&\quad c(y) = c(y; \varepsilon, \Omega, a, R, \mathbf{A}', \varphi_n, d\nu, k_2) \to 0 \quad \text{при } |y| \to \infty.
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

Фиксируем $\varepsilon := (1-a)/4$. Далее, фиксируем R настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$
R^{-2} \leq (1-a)/4, \quad R \geq 1.
$$

Тогда с учетом (3.11) из (5.19) имеем

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} m'(y)[u,v] \geq 2^{-1}(1-a)\|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2\\ -C(\Omega,a,\mathbf{A}',\varphi_n,d\nu,k_2)\|\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2\\ +(1-C(\Omega,\mathbf{A},k_2)(\varepsilon_\Phi+\varepsilon_n)-c(y))\,\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2,\\ c(y)=c(y;\Omega,a,\mathbf{A}',\varphi_n,d\nu,k_2)\to 0 \quad \text{при } |y|\to\infty.\end{gathered} \tag{5.20}$$

Фиксируем ε_Φ, ε_n настолько малыми, чтобы выполнялось условие

$$C(\Omega,\mathbf{A},k_2)(\varepsilon_\Phi+\varepsilon_n)\leq 1/2.$$

Теперь фиксируем функцию $\Phi\in\widetilde{C}^\infty(\Omega)$, удовлетворяющую (4.3) (тем самым фиксирован выбор потенциала $\mathbf{A}'=\mathbf{A}-\nabla\Phi$), и функцию φ_n, удовлетворяющую (4.7). Тогда из (3.11), (5.20) имеем

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} m'(y)[u,v]\\ \geq\left(2^{-1}(1-a)-C(\Omega,a,\mathbf{A},d\nu,k_2)y^{-2}\right)\|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2\\ +\left(2^{-1}-c(y)\right)\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2,\\ c(y)=c(y;\Omega,a,\mathbf{A},d\nu,k_2)\to 0 \quad \text{при } |y|\to\infty.\end{gathered}$$

Фиксируя в последнем неравенстве достаточно большое y_0, с учетом (3.10), (5.3) получаем

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} m(y;\mathbf{1},\mathbf{A}',d\nu,1)[u,v]\geq C(\Omega,a)\|P_0^{-1}u\|^2\\ \geq C(\Omega,a,\mathbf{A})\|P_0^{-1}u\|\|P_0^{-1}v\|,\quad |y|\geq y_0.\end{gathered} \tag{5.21}$$

Отметим, что из первого неравенства в (5.21) непосредственно вытекает соотношение $v\neq 0$. Наконец, применяя (3.13), из (5.21) получаем требуемое неравенство (5.1) при $c(y):=c(\Omega,a,\mathbf{A})|y|^{-1}$. Тем самым, доказательство теоремы 2.1 в случае $g=\mathbf{1}$, $\eta=1$ завершено.

§6. Случай переменной скалярной метрики

В настоящем параграфе мы отказываемся от ограничения $g=\mathbf{1}$, однако, по-прежнему считаем $\eta=1$. При этом включение скалярной метрики $\omega^2\mathbf{1}$ осуществляется по аналогии с тем, как это делалось в [17, §6].

Помимо формы $m(y)$ рассмотрим форму

$$\begin{gathered}m_\omega(y;\omega^2\mathbf{1},\mathbf{A},d\nu,1)[u,u]:=m(y;\omega^2\mathbf{1},\mathbf{A},d\nu,1)[\omega^{-1}u,\omega^{-1}u],\\ \operatorname{Dom} m_\omega(y):=\operatorname{Dom} m(y)=\widehat{d}_\Omega.\end{gathered} \tag{6.1}$$

В [17, §6] пояснено, что форма (6.1) замкнута и секториальна одновременно с формой $m(y)$.

Пусть $\widetilde{\omega}$ – гладкая вещественная функция, аппроксимирующая функцию ω, то есть

$$\begin{aligned} &0 < \omega_0 \le \widetilde{\omega}(\mathbf{x}) \le \omega_1 < \infty, \\ &\widetilde{\omega} \in \widetilde{C}^\infty(\Omega), \quad \|\mathbf{G}_\omega\| \le \varepsilon_\omega \le 1, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где введено обозначение (ср. [16, § 5]) $\mathbf{G}_\omega := \widetilde{\omega}^{-1}(\mathbf{D}\widetilde{\omega}) - \omega^{-1}(\mathbf{D}\omega)$. Малое число ε_ω будет выбрано ниже. Рассуждая так же, как в [16, §5], для $u, v \in \widehat{d}_\Omega$ имеем

$$\begin{aligned} &m'_\omega(y)[u,v] := m_\omega(y; \omega^2\mathbf{1}, \mathbf{A}', d\nu, 1) \\ &= \int_\Omega \langle (\mathbf{D} - \mathbf{A}' + \mathbf{k})u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}' + \overline{\mathbf{k}})v \rangle d\mathbf{x} \\ &+ \int_\Omega \langle (\mathbf{D} + \mathbf{k})u, \mathbf{G}_\omega v \rangle d\mathbf{x} + \int_\Omega \langle \mathbf{G}_\omega u, (\mathbf{D} + \overline{\mathbf{k}})v \rangle d\mathbf{x} + \int_\Omega u\overline{v} d\widetilde{\nu} \\ &=: \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_4, \end{aligned} \tag{6.3}$$

где

$$d\widetilde{\nu} := -2\langle \widetilde{\omega}^{-1}(\mathbf{D}\widetilde{\omega}), \mathbf{G}_\omega \rangle d\mathbf{x} + |\mathbf{G}_\omega|^2 d\mathbf{x} + \widetilde{\omega}^{-1}(\Delta\widetilde{\omega}) d\mathbf{x} + \omega^{-2} d\nu. \tag{6.4}$$

Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [17, лемма 6.1].

Лемма 6.1. *При любом $\widetilde{a} \in (a, 1)$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |f|^2 d\widetilde{\nu}_- \le \widetilde{a} \left(\|\nabla f\|^2 + \int_\Omega |f|^2 d\widetilde{\nu}_+ \right) + C(\widetilde{a}; \Omega, \omega, \widetilde{\omega}, d\nu)\|f\|^2, \\ &\qquad\qquad a < \widetilde{a} < 1, \ f \in \widehat{d}_\Omega; \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |f|^2 |d\widetilde{\nu}| \le \varepsilon \left(\|\nabla f\|^2 + \max_{\mathbf{x}\in\Omega} |f|^2 \right) + C(\varepsilon; \Omega, \omega, \widetilde{\omega}, d\nu)\|f\|^2, \\ &\qquad\qquad \forall \varepsilon \in (0,1), \ f \in \widetilde{C}^\infty(\Omega). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Из леммы 6.1 вытекает, что *заряд $d\widetilde{\nu}$ удовлетворяет оценке вида* (1.11), *а также оценке вида* (1.12) *относительно единичной метрики.*

В дальнейшем $\widetilde{a} \in (a, 1)$ считается фиксированным. Пусть теперь $0 \neq u \in \widehat{d}_\Omega$, и v *выбрано в соответствии с* (5.2). С учетом (6.5), (6.6) сумма $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_4$ может быть оценена аналогично тому, как это было сделано в § 5 при оценке $m'(y)[u, v]$. При этом справедлива оценка вида (5.19) с заменой a на $\widetilde{a}$ и $d\nu$ на $d\widetilde{\nu}$. Именно,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_4) \geq (1 - \widetilde{a} - \varepsilon) \left(\int\limits_\Omega |\widetilde{\mathcal{X}}_R u|^2 d\widetilde{\nu}_+ + \|\nabla \widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 \right) \\
&- \left(y^2 + C(\varepsilon; \Omega, \widetilde{a}, \omega, \widetilde{\omega}, \mathbf{A}', \varphi_n, d\nu, k_2)\right) \|\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 \\
&+ (1 - C(\varepsilon; \Omega, R, \mathbf{A}, k_2)(\varepsilon_\Phi + \varepsilon_n) - c(y)) \|P_0^{-1} \mathcal{X}_R u\|^2, \ \forall \varepsilon \in (0, 1), \\
&c(y) = c(y; \varepsilon, \Omega, \widetilde{a}, R, \omega, \widetilde{\omega}, \mathbf{A}', \varphi_n, d\nu, k_2) \to 0 \quad \text{при } |y| \to \infty.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Слагаемые $\mathcal{J}_2$ и $\mathcal{J}_3$ – те же, что и в [17, §6]. Однако, сейчас у нас более слабые ограничения на магнитный потенциал, чем в [17]. Тем не менее, оценки из [17] для $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ сохраняют свою силу, формально, с тем же доказательством. Отличие состоит лишь в том, что центральная оценка (4.22) (аналогичная оценке [17, (4.34)]) сейчас доказана при более широких условиях на $\mathbf{A}$. Имеем (см. [17, (6.11)–(6.14), (6.16), (6.17), (6.19), (6.20)])

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3| \\
&\leq \varepsilon \|\nabla \widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 + C(\varepsilon; \Omega, \omega, \widetilde{\omega}, k_2) \|\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 \\
&+ (C(\varepsilon; \Omega, R, \mathbf{A}, k_2)\varepsilon_\omega + c(y)) \|P_0^{-1} \mathcal{X}_R u\|^2, \\
&\forall \varepsilon \in (0, 1), \ c(y) = c(y; \varepsilon, \Omega, R, \omega, \widetilde{\omega}, \varphi_n, k_2) \to 0 \, \text{при } |y| \to \infty.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Подставляя (6.7), (6.8) в (6.3), получаем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} m'_\omega[u, v] \geq (1 - \widetilde{a} - \varepsilon) \left(\int\limits_\Omega |\widetilde{\mathcal{X}}_R u|^2 d\widetilde{\nu}_+ + \|\nabla \widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 \right) \\
&- \left(y^2 + C(\varepsilon; \Omega, \widetilde{a}, \omega, \widetilde{\omega}, \mathbf{A}', \varphi_n, d\nu, k_2)\right) \|\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 \\
&+ (1 - C(\varepsilon; \Omega, R, \mathbf{A}, k_2)(\varepsilon_\Phi + \varepsilon_n + \varepsilon_\omega) - c(y)) \|P_0^{-1} \mathcal{X}_R u\|^2, \\
&\forall \varepsilon \in (0, 1), \quad c(y) = c(y; \varepsilon, \Omega, \widetilde{a}, R, \omega, \widetilde{\omega}, \mathbf{A}', \varphi_n, d\nu, k_2) \to 0 \\
&\qquad \text{при } |y| \to \infty.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Фиксируем $\varepsilon := (1-\widetilde{a})/4$. Затем выберем R настолько большим, чтобы выполнялось

$$R^{-2} \leq (1-\widetilde{a})/4, \quad R \geq 1.$$

Тогда с учетом (3.11) из (6.9) получаем

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} m'_\omega[u,v] \geq \big(2^{-1}(1-\widetilde{a}) \\ - C(\Omega,\widetilde{a},\omega,\widetilde{\omega},\mathbf{A}',\varphi_n,d\nu,k_2)y^{-2}\big)\,\|\nabla\widetilde{\mathcal{X}}_R u\|^2 \\ +(1-C(\Omega,\mathbf{A},k_2)(\varepsilon_\Phi+\varepsilon_n+\varepsilon_\omega)-c(y))\,\|P_0^{-1}\mathcal{X}_R u\|^2, \\ c(y)=c(y;\Omega,\widetilde{a},\omega,\widetilde{\omega},\mathbf{A}',\varphi_n,d\nu,k_2)\to 0 \quad \text{при } |y|\to\infty.\end{gathered} \tag{6.10}$$

Зафиксируем теперь ε_Φ, ε_n, ε_ω так, чтобы выполнялось неравенство

$$C(\Omega,\mathbf{A},k_2)(\varepsilon_\Phi+\varepsilon_n+\varepsilon_\omega) \leq 1/2,$$

и фиксируем функции Φ, φ_n и $\widetilde{\omega}$, удовлетворяющие (4.3), (4.7) и (6.2) соответственно. Тогда для достаточно большого y_0 из (6.10) с учетом (3.10) и (5.3) имеем

$$\operatorname{Re} m'_\omega[u,v] \geq C(\Omega,a)\|P_0^{-1}u\|^2 \geq C(\Omega,a,\mathbf{A})\|P_0^{-1}u\|\|P_0^{-1}v\|, \quad |y|\geq y_0. \tag{6.11}$$

Пусть теперь $0\neq\widetilde{u}\in\widehat{d}_\Omega$, и $u:=\omega\widetilde{u}\in\widehat{d}_\Omega$. Пусть v построено по u в соответствии с (5.2). Положим

$$\widetilde{v} := \omega^{-1}v. \tag{6.12}$$

Тогда из (6.1) и (6.11) получаем

$$\operatorname{Re} m(y;\omega^2\mathbf{1},\mathbf{A}',d\nu,1)[\widetilde{u},\widetilde{v}] \geq C(\Omega,a,\mathbf{A})\|P_0^{-1}\omega\widetilde{u}\|\|P_0^{-1}\omega\widetilde{v}\|, \quad |y|\geq y_0. \tag{6.13}$$

Отсюда и из (2.7), (3.13) имеем

$$\operatorname{Re} m(y;\omega^2\mathbf{1},\mathbf{A}',d\nu,1)[\widetilde{u},\widetilde{v}] \geq C(\Omega,a,\mathbf{A})\|\omega^{-1}\|_\infty^{-2}|y|\|\widetilde{u}\|\|\widetilde{v}\|, \quad |y|\geq y_0.$$

Последняя оценка с учетом (4.5) завершает доказательство теоремы 2.1 в случае $\eta=1$.

§7. Доказательство теоремы 1.3

1. Завершение доказательства теоремы 2.1. Отметим, прежде всего, что

$$m(y; g, \mathbf{A}, d\nu, \eta)[f, f] = m(y; g, \mathbf{A}, d\nu, 1)[\eta^{-1}f, \eta^{-1}f], \quad f \in \eta\widehat{d}_\Omega. \tag{7.1}$$

Далее, пусть $0 \neq f := \eta\widetilde{u}$, $\widetilde{u} \in \widehat{d}_\Omega$, и $w := \eta\widetilde{v}$, где $\widetilde{v}$ выбрано в соответствии с (6.12). Тогда, согласно (6.13) и (7.1), для некоторого магнитного потенциала $\mathbf{A}'$, описанного в п. 4.1, имеем

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} m(y; \omega^2\mathbf{1}, \mathbf{A}', d\nu, \eta)[f, w] \\ &\qquad \geq C(\Omega, a, \mathbf{A})\|P_0^{-1}\eta^{-1}\omega f\|\|P_0^{-1}\eta^{-1}\omega w\|, \quad |y| \geq y_0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Из (7.2) с учетом (1.15), (2.7) и предложения 3.3 получаем

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} m(y; \omega^2\mathbf{1}, \mathbf{A}', d\nu, \eta)[f, w] \geq (c(y))^{-1}\|f\|\|w\|, \quad |y| \geq y_0, \\ c(y) = c(y; \Omega, a, \omega, \mathbf{A}, \eta, k_2) \to 0 \quad \text{при } |y| \to \infty. \end{gathered} \tag{7.3}$$

Из (4.5) и (7.3) непосредственно вытекает оценка (2.9), что завершает доказательство теоремы 2.1. •

2. Преобразование оператора (1.17) к случаю скалярной метрики. *Из теоремы* 2.1 стандартными рассуждениями (см. [4, §2]) *выводится утверждение теоремы* 1.3 *в случае скалярной метрики вида* (2.5). Для доказательства теоремы 1.3 в общем случае мы используем преобразование координат в $\mathbb{R}^2$, которое приведет оператор M, определенный в (1.17), к оператору со скалярной метрикой, но для другой решетки периодов и при измененных $\mathbf{A}$, $d\nu$ и η. Мы используем следующую теорему, сформулированную в [16, §6] (там же можно найти необходимые комментарии).

Теорема 7.1. *Пусть* g_0 – Γ-*периодическая измеримая* (2×2)-*матрица-функция, удовлетворяющая условию вида* (1.4) *и, кроме того,* $\det g_0 = 1$. *Тогда существует взаимно-однозначное отображение* $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *со следующими свойствами.*

1°. *Для некоторого* $p > 2$ *выполнено*

$$\Psi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2), \ \Psi^{-1} \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2), \quad p > 2. \tag{7.4}$$

При этом, $0 < |\det \Psi'(\mathbf{x})| < \infty$ *для п. в.* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, *где* $\Psi'(\mathbf{x})$ – *матрица Якоби отображения* Ψ.

2°. *Для некоторого базиса* $\mathbf{a}_1^*$, $\mathbf{a}_2^*$ *в* $\mathbb{R}^2$ *выполнено*

$$\Psi(0) = 0; \quad \Psi(\mathbf{x} + n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2) = \Psi(\mathbf{x}) + n_1\mathbf{a}_1^* + n_2\mathbf{a}_2^*, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \{n_1, n_2\} \in \mathbb{Z}^2.$$

Таким образом, преобразование координат $\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x})$ *переводит решетку* Γ *в решетку*

$$\Gamma_* := \{\boldsymbol{\xi} = n_1\mathbf{a}_1^* + n_2\mathbf{a}_2^*, \quad \{n_1, n_2\} \in \mathbb{Z}^2\}. \tag{7.5}$$

3°. *Выполнено соотношение*

$$|\det \Psi'(\mathbf{x})|^{-1}\Psi'(\mathbf{x})g_0(\mathbf{x})(\Psi'(\mathbf{x}))^t = \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x}). \tag{7.6}$$

Отметим, что множество $\Psi(\Omega)$ фундаментально относительно решетки Γ_*.

Замечание 7.2. Из соотношения (7.6) непосредственно вытекает представление

$$\Psi'(\mathbf{x}) = |\det \Psi'(\mathbf{x})|^{1/2}\mathcal{W}(\mathbf{x})(g_0(\mathbf{x}))^{-1/2}, \tag{7.7}$$

где $\mathcal{W}$ – вещественная ортогональная матрица-функция.

Лемма 7.3. (1) *Пусть* $F \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда* $F\circ\Psi$, $F\circ\Psi^{-1} \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, *и справедливо обычное правило дифференцирования*

$$\nabla(F \circ \Psi) = (\Psi')^t\left((\nabla_{\boldsymbol{\xi}} F) \circ \Psi\right).$$

(2) *Пусть* $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда справедливо тождество*

$$\int\limits_{\Xi} F\, d\boldsymbol{\xi} = \int\limits_{\Psi^{-1}(\Xi)} (F \circ \Psi)\, |\det \Psi'| d\mathbf{x}$$

для любого измеримого ограниченного в $\mathbb{R}^2$ *множества* Ξ.

Доказательство сводится к ссылке на [1, лемма 10, теорема 5]. •

В дальнейшем мы часто будем использовать лемму 7.3, не акцентируя на этом внимания дополнительно.

Пусть

$$\Omega_* := \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{\xi} = t_1\mathbf{a}_1^* + t_2\mathbf{a}_2^*, \ 0 \le t_j < 1, \ j = 1, 2\}$$

– элементарная ячейка решетки (7.5). Введем также следующие обозначения:

$$\psi(\boldsymbol{\xi}) := |\det \Psi'(\mathbf{x})|^{-1/2}, \tag{7.8}$$

$$\mathbf{A}_*(\boldsymbol{\xi}) := \left(\Psi'(\mathbf{x})^t\right)^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \tag{7.9}$$

$$\omega_*(\boldsymbol{\xi}) := \omega(\mathbf{x}), \tag{7.10}$$

$$d\nu_*(\boldsymbol{\xi}) := d\nu(\mathbf{x}), \tag{7.11}$$

$$\eta_*(\boldsymbol{\xi}) := \psi(\boldsymbol{\xi})\eta(\mathbf{x}), \tag{7.12}$$

где $\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x})$. Из утверждения 2° теоремы 7.1 и из (1.1), (1.9), (1.13), (2.6), (7.8)–(7.12) вытекает, что ψ, $\mathbf{A}_*$, ω_*, $d\nu_*$ и η_* являются Γ_*-периодическими. Из (7.4), (7.8) непосредственно следует, что для функции ψ выполнены соотношения

$$\psi \in L_p(\Omega_*), \quad p > 2, \tag{7.13}$$

$$\psi(\boldsymbol{\xi}) > 0, \quad \text{п. в. } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2. \tag{7.14}$$

Включение (7.13) и предложение 1.1 показывают, что справедлива оценка

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_*} |\psi f|^2 d\boldsymbol{\xi} \le \varepsilon \int\limits_{\Omega_*} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon; \Omega_*, \psi) \int\limits_{\Omega_*} |f|^2 d\boldsymbol{\xi}, \\ \forall \varepsilon \in (0,1), f \in H^1(\Omega_*).\end{gathered} \tag{7.15}$$

В [17, п. 7.2] показано, что коэффициенты ω_*, $d\nu_*$, η_* удовлетворяют всем условиям теоремы 1.3 (относительно решетки Γ_*). В частности, форма

$$m_{*+}[f,f] := \int |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 d\boldsymbol{\xi} + \int |f|^2 d\nu_{*+}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),$$

допускает замыкание в $L_2(\mathbb{R}^2)$ (ср. условие (i)). Через $\widehat{d}_*$ обозначим область определения замыкания формы m_{*+}. *Преобразование* $u \mapsto u \circ \Psi^{-1}$ *взаимно-однозначно отображает* $\widehat{d}$ *на* $\widehat{d}_*$ (см. [16, п. 6.2]).

Далее, для любой Γ_*-периодической функции $f \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ с учетом (1.2), (1.4), (1.5), (7.6)–(7.9), (7.15) имеем (ср. [17, (7.22)])

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega_*} |\mathbf{A}_* f|^2 d\boldsymbol{\xi} &= \int\limits_{\Psi(\Omega)} |\mathbf{A}_* f|^2 d\boldsymbol{\xi} = \int\limits_{\Omega} |\mathcal{W} g_0^{1/2} \mathbf{A}(f\circ\Psi)|^2 d\mathbf{x} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega} \langle g_0 \nabla(f\circ\Psi), \nabla(f\circ\Psi)\rangle d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\Omega, g_0, \mathbf{A})\int\limits_{\Omega} |f\circ\Psi|^2 d\mathbf{x} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Psi(\Omega)} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon;\Omega, g_0, \mathbf{A})\int\limits_{\Psi(\Omega)} |\psi f|^2 d\boldsymbol{\xi} \qquad (7.16) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_*} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon;\Omega, g_0, \mathbf{A})\int\limits_{\Omega_*} |\psi f|^2 d\boldsymbol{\xi} \\
&\le \varepsilon\int\limits_{\Omega_*} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon;\Omega, \Omega_*, g_0, \mathbf{A}, \psi)\int\limits_{\Omega_*} |f|^2 d\boldsymbol{\xi}, \quad \forall\varepsilon\in(0,1).
\end{aligned}
$$

Таким образом, для $\mathbf{A}_*$, ω_*, $d\nu_*$ и η_* выполнены *все* условия теоремы 1.3 (относительно решетки Γ_*). В силу (7.6), под действием преобразования Ψ квадратичная форма (1.16) преобразуется к виду

$$
m[u,u] = \int \omega_*^2 |(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{A}_*)(\eta_*^{-1} v)|^2 d\boldsymbol{\xi} + \int |\eta_*^{-1} v|^2 d\nu_*, \quad u \in \eta\widehat{d},
$$
$$
v(\boldsymbol{\xi}) = \psi(\boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x}).
$$

Одновременно

$$
\int |u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} = \int |v(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi}.
$$

Это показывает, что оператор $M = M(g, \mathbf{A}, d\nu, \eta)$ унитарно эквивалентен оператору

$$
M_* := M(\omega_*^2 \mathbf{1}, \mathbf{A}_*, d\nu_*, \eta_*).
$$

Для случая скалярной метрики вида (2.5) утверждение теоремы 1.3 уже установлено. Следовательно, спектр оператора M_* абсолютно непрерывен. Вместе с ним абсолютно непрерывен и спектр оператора M. Этим доказательство теоремы 1.3 полностью завершено.

§8. Оператор Шредингера в односвязном периодическом волноводе

Теорема 2.1 позволяет уточнить условия на магнитный потенциал и случае оператора Шредингера в односвязном периодическом волноводе. Наиболее точные условия на параметры задачи, при которых удается доказать абсолютную непрервность спектра оператора Шредингера в двумерном волноводе, были предложены в работе [18]. Сейчас мы можем еще ослабить ограничения на магнитный потенциал. Здесь мы сформулируем соответствующую теорему (см. ниже теорему 8.5) без доказательства, которое, впрочем, с очевидными и малозначительными изменениями повторяет доказательство теоремы 2.5 из [18] (подробнее, см. замечание 8.6).

1. Обозначения. Если $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ – некоторая область, то $\overline{\mathcal{D}} := \operatorname{clos} \mathcal{D}$. Положим $B_R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon |\mathbf{x}| < R\}$, $R > 0$. Через $C_0(\overline{\mathcal{D}})$ обозначим класс функций $u(\mathbf{x}) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ таких, что $\operatorname{supp} u \subset \overline{\mathcal{D}} \cap B_R$ для некоторого $R < \infty$.

Введем обозначения $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x_2 < 1\}$, $\Omega_R := (-R/2, R/2) \times (0,1)$, $R > 0$. Граница полосы S состоит из двух прямых $\Xi_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 = 0\}$, $\Xi_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 = 1\}$. Пусть $\beta > 0$ и $\gamma_\beta := \{n\beta\mathbf{e}_1, \, n \in \mathbb{Z}\}$ – одномерная решетка. Через $\widehat{H}^s(\Omega_\beta)$ обозначим класс функций $u \in H^s(\Omega_\beta)$, γ_β-периодическое продолжение которых принадлежит $H^s(\Omega_R)$ для любого $R < \infty$. Через $\widehat{C}(\overline{\Omega_\beta})$ обозначается множество сужений на $\overline{\Omega_\beta}$ γ_β-периодических функций класса $C(\overline{S})$.

2. Условия на область. Положим $\mathbb{R}^2_{r+} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > r\}$, $\mathbb{R}^2_{r-} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 < r\}$, $r \in \mathbb{R}$. Предположим, что "периодический волновод" $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 8.1. *Множество* $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ *– односвязная область такая, что* $\mathbb{R}^2_{r+} \not\subset \Pi$, $\mathbb{R}^2_{r-} \not\subset \Pi$, $\forall r \in \mathbb{R}$. *Область* Π *периодична относительно некоторой решетки* γ_α, $\alpha > 0$*:*

$$\mathbf{x} \in \Pi \Rightarrow \mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1 \in \Pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что из условия 8.1 непосредственно вытекает, что *точки* $\pm\infty$ *являются различными достижимыми граничными точками области* Π*, порожденными* γ_α*-периодическими непрерывны-*

ми кривыми (определение достижимых граничных точек можно найти, например, в [6, §II.3]).

Пусть Ψ – конформное отображение волновода Π на полосу S. Согласно теореме Кёбе (см., например, [6, §II.3, теорема 1]), с учетом достижимости точек $\pm\infty$, отображение Ψ можно выбрать так, чтобы

$$\Psi(-\infty) = -\infty, \quad \Psi(+\infty) = +\infty.$$

При этом γ_α-периодические непрерывные кривые, порождающие достижимые точки $\pm\infty$ в Π, перейдут в непрерывные кривые, уходящие на $\pm\infty$ в S. Тогда, как пояснено в [18, п. 1.3], отображение Ψ определено с точностью до сдвига $\Psi \mapsto \Psi + r\mathbf{e}_1$, $r \in \mathbb{R}$, и, кроме того, для некоторого $\beta > 0$ выполнено

$$\Psi(\mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1) = \Psi(\mathbf{x}) + n\beta\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{x} \in \Pi, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Граница волновода Π состоит из двух отделенных друг от друга γ_α-периодических замкнутых множеств $l_\pm : \partial\Pi = l_- \cup l_+$. Именно, пусть $S_- := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x_2 < 1/2\}$, $S_+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon 1/2 < x_2 < 1\}$. Тогда положим

$$l_- := \partial\Pi \cap \overline{\Psi^{-1}(S_-)}, \quad l_+ := \partial\Pi \cap \overline{\Psi^{-1}(S_+)}.$$

Введем обозначение $\mathcal{O}_R := \Psi^{-1}(\Omega_R)$, $R > 0$. Очевидно, $\mathcal{O}_\beta$ – односвязная фундаментальная область в Π относительно решетки γ_α. Отметим, что ячейка $\mathcal{O}_\beta$, вообще говоря, не является ограниченной.

Обозначим через $\widehat{H}^1(\mathcal{O}_\beta)$ класс функций $u \in H^1(\mathcal{O}_\beta)$, γ_α-периодическое продолжение которых принадлежит $H^1(\mathcal{O}_R)$ для любого $R < \infty$. Помимо априорного условия 8.1 будем считать выполненным следующее

Условие 8.2. *Область $\mathcal{O}_\beta$ такова, что вложение $\widehat{H}^1(\mathcal{O}_\beta) \subset L_2(\mathcal{O}_\beta)$ компактно.*

Замечание 8.3. В условии 8.2 область $\mathcal{O}_\beta$ можно заменить на любое (не обязательно связное) фундаментальное относительно решетки γ_α открытое множество в Π. Действительно, пространство $\widehat{H}^1(\mathcal{O}_\beta)$ можно отождествить с пространством H^1 на поверхности цилиндра, образованной фактор-множеством Π/γ_α. Нам, однако, в дальнейшем удобно использовать фундаментальную область $\mathcal{O}_\beta$.

Отметим, что из условия 8.2 автоматически вытекает, что область $\mathcal{O}_\beta$ имеет конечную меру:

$$\operatorname{meas}\mathcal{O}_\beta < \infty.$$

3. Классы функций. Определим следующий класс функций в Π: $\mathfrak{C}_0(\Pi) := \{F :\ F = f\circ\Psi,\ f \in C_0(\overline{S})\}$. Пусть также $\mathfrak{C}(\Pi) := \{F : F = f\circ\Psi,\ f \in C(\overline{S})\}$, и $\widehat{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta)$ – множество сужений на $\mathcal{O}_\beta$ γ_α-периодических функций класса $\mathfrak{C}(\Pi)$. Очевидно, $\widehat{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta) = \{F :\ F = f\circ\Psi,\ f \in \widehat{C}(\overline{\Omega_\beta})\}$.

Мы изучаем оператор Шредингера в волноводе Π с краевыми условиями Дирихле либо естественными условиями на каждой из двух частей l_-, l_+ границы $\partial\Pi$. Соответственно рассматриваются краевые задачи четырех типов, условно обозначаемых через DD, DN, ND, NN. Введем следующие обозначения, где значки λ и μ принимают значения D либо N:

$$C_0^{(\lambda\mu)}(\overline{S}) := \begin{cases} \{f \in C_0(\overline{S}) :\ f|_{\Xi_0} = f|_{\Xi_1} = 0\},\ \lambda = \mu = D, \\ \{f \in C_0(\overline{S}) :\ f|_{\Xi_0} = 0\},\ \lambda = D,\ \mu = N, \\ \{f \in C_0(\overline{S}) :\ f|_{\Xi_1} = 0\},\ \lambda = N,\ \mu = D, \\ C_0(\overline{S}),\ \lambda = \mu = N, \end{cases}$$

$$\mathfrak{C}_0^{(\lambda\mu)}(\Pi) := \{F :\ F = f\circ\Psi,\ f \in C_0^{(\lambda\mu)}(\overline{S})\},\quad \lambda, \mu = D, N.$$

4. Условия на метрику. Пусть $g(\mathbf{x}) = \{g^{jl}(\mathbf{x})\}$ – измеримая вещественная (2×2)-матрица-функция в Π такая, что

$$g(\mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1) = g(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\Pi,\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{8.1}$$

$$c_2\mathbf{1} \le g(\mathbf{x}) \le c_3\mathbf{1},\quad \mathbf{x}\in\Pi,\quad 0 < c_2 \le c_3 < \infty. \tag{8.2}$$

Представим матрицу $g(\mathbf{x})$ в виде (ср. (1.5)):

$$g(\mathbf{x}) := \omega^2(\mathbf{x})g_0(\mathbf{x}),\quad \det g_0(\mathbf{x}) = 1,\quad \omega(\mathbf{x}) := (\det g(\mathbf{x}))^{1/4}. \tag{8.3}$$

В силу (8.1)–(8.3), матрица g_0 и функция ω γ_α-периодические и удовлетворяют условиям

$$c_2'\mathbf{1} \le g_0(\mathbf{x}) \le c_3'\mathbf{1},\quad \mathbf{x}\in\Pi,\quad 0 < c_2' \le c_3' < \infty,$$

$$0 < \omega_0 \le \omega(\mathbf{x}) \le \omega_1 < \infty,\quad \mathbf{x}\in\Pi.$$

Будем также предполагать, что (ср. (1.6), (1.7))

$$\omega \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_\beta), \tag{8.4}$$

и

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla\omega|^2|u|^2\,d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla u|^2\,d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\omega) \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |u|^2\,d\mathbf{x}, \qquad \forall\varepsilon \in (0,1), \quad u \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_\beta). \tag{8.5}$$

5. Условия на весовую функцию. Пусть $\eta(\mathbf{x})$ – вещественная измеримая функция в Π такая, что (ср. (1.13)–(1.15))

$$\eta(\mathbf{x}+n\alpha\mathbf{e}_1) = \eta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{8.6}$$

$$\eta(\mathbf{x}) > 0, \quad \text{п. в. } \ \mathbf{x} \in \Pi, \tag{8.7}$$

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} \eta^2|u|^2\,d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla u|^2\,d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\eta) \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |u|^2\,d\mathbf{x}, \qquad \forall\varepsilon \in (0,1), \quad u \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_\beta). \tag{8.8}$$

6. Условия на магнитный потенциал. Пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + A_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$, где $A_1(\mathbf{x})$, $A_2(\mathbf{x})$ – вещественные измеримые функции в Π, причем (ср. (1.1), (1.2))

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+n\alpha\mathbf{e}_1) = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{8.9}$$

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\mathbf{A}|^2|u|^2\,d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla u|^2\,d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\mathbf{A}) \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |u|^2\,d\mathbf{x}, \qquad \forall\varepsilon \in (0,1), \quad u \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_\beta). \tag{8.10}$$

7. Условия на обобщенный электрический потенциал. Пусть $d\nu^\circ$ – вещественный борелевский заряд в $\overline{S}$ локально конечной вариации, то есть

$$\int\limits_{\mathcal{B}} |d\nu^\circ| < \infty \tag{8.11}$$

для любого ограниченного борелевского множества $\mathcal{B} \subset \overline{S}$. Пусть, кроме того, заряд $d\nu^\circ$ γ_β-периодичен:

$$\int\limits_{\mathcal{B}+n\beta\mathbf{e}_1} d\nu^\circ = \int\limits_{\mathcal{B}} d\nu^\circ, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{8.12}$$

Определим линейные непрерывные функционалы ℓ и $\widehat{\ell}$ над классами $\mathfrak{C}_0(\Pi)$ и $\widehat{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta)$ по следующим формулам:

$$\ell[F] := \int\limits_{S} F \circ \Psi^{-1}\, d\nu^\circ, \quad F \in \mathfrak{C}_0(\Pi), \tag{8.13}$$

$$\widehat{\ell}[\widehat{F}] := \int\limits_{\widehat{\Omega}_\beta} \widehat{F} \circ \Psi^{-1}\, d\nu^\circ, \quad \widehat{F} \in \widehat{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta). \tag{8.14}$$

Здесь $\widehat{\Omega}_\beta := [-\beta/2, \beta/2) \times [0,1]$.

Замечание 8.4. Такое неявное определение функционалов ℓ, $\widehat{\ell}$ связано лишь с невозможностью в случае волновода общего вида напрямую описать поведение обобщенного электрического потенциала на границе $\partial\Pi$. В [18, п. 2.5] дан ряд замечаний по этому поводу и приведены примеры, когда такое прямое описание возможно. В частности, если граница волновода Π состоит из двух непересекающихся γ_α-периодических кривых Жордана, то существует взаимно-однозначное соответствие между множеством функционалов ℓ и множеством всех вещественных борелевских γ_α-периодических зарядов в $\overline{\Pi}$ локально конечной вариации.

Пусть, как обычно, $2d\nu^\circ_\pm := |d\nu^\circ| \pm d\nu^\circ$. Аналогично (8.13), (8.14) определим функционалы $|\ell|$, $|\widehat{\ell}|$ (по заряду $|d\nu^\circ|$) и функционалы $\ell_\pm$, $\widehat{\ell}_\pm$ (по заряду $d\nu^\circ_\pm$). Очевидно, $2\ell_\pm = |\ell| \pm \ell$, $2\widehat{\ell}_\pm = |\widehat{\ell}| \pm \widehat{\ell}$.

На функционалы ℓ, $\widehat{\ell}$ накладываются следующие условия (ср. (i)–(iii)):

(i°) *Форма*

$$\int\limits_{\Pi} |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} + \ell_+[|u|^2], \quad u \in H^1(\Pi) \cap \mathfrak{C}_0(\Pi),$$

допускает замыкание в $L_2(\Pi)$.

(ii°) *При некотором* $a < 1$ *справедливо неравенство*

$$\ell_-[|u|^2] \le a \left(\int\limits_{\Pi} \langle g\nabla u, \nabla u\rangle\, d\mathbf{x} + \ell_+[|u|^2] \right) + C \int\limits_{\Pi} |u|^2\, d\mathbf{x},$$
$$u \in H^1(\Pi) \cap \mathfrak{C}_0(\Pi), \quad a < 1, \quad C = C(a; g, \ell).$$

(iii°) *Выполнена оценка*

$$|\widehat{\ell}|[|u|^2] \le \varepsilon \left(\int_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} + \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{O}_\beta} |u(\mathbf{x})|^2 \right) + C(\varepsilon;\widehat{\ell}) \int_{\mathcal{O}_\beta} |u|^2\, d\mathbf{x},$$
$$\forall \varepsilon \in (0,1), \quad u \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_\beta) \cap \widehat{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta).$$

8. Определение операторов. В гильбертовом пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{gathered} m_{\lambda\mu}[v,v] := \int_\Pi \langle g(\mathbf{D}-\mathbf{A})\eta^{-1}v, (\mathbf{D}-\mathbf{A})\eta^{-1}v\rangle\, d\mathbf{x} + \ell[|\eta^{-1}v|^2], \\ \operatorname{Dom} m_{\lambda\mu} := \{v = \eta u :\ u \in H^1(\Pi) \cap \mathfrak{C}_0^{(\lambda\mu)}(\Pi)\}, \\ \lambda = D, N,\ \mu = D, N. \end{gathered} \tag{8.15}$$

В [18, п. 2.6] пояснено, что форма (8.15) плотно определена, полуограничена снизу и допускает замыкание в $L_2(\Pi)$. Замкнутая форма $\overline{m_{\lambda\mu}}$ порождает в $L_2(\Pi)$ самосопряженный оператор $M_{\lambda\mu}$. Оператор M_{DD} отвечает задаче Дирихле в Π; оператор M_{DN} (соответственно, M_{ND}) отвечает условию Дирихле на l_- (соответственно, на l_+). При этом условие на l_+ (соответственно, на l_-) – естественное. Оператор M_{NN} отвечает естественным краевым условиям на всей границе $\partial\Pi$.

9. Основной результат работы относительно оператора Шредингера в двумерном периодическом волноводе составляет следующая

Теорема 8.5. *Пусть область* Π *удовлетворяет условиям* 8.1, 8.2. *Пусть измеримая вещественная* (2×2)*-матрица-функция* $g(\mathbf{x})$ *подчинена условиям* (8.1)–(8.5). *Пусть вещественная функция* $\eta(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условиям* (8.6)–(8.8), *а вектор-функция* $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ *подчинена условиям* (8.9), (8.10). *Пусть функционалы* $\ell, \widehat{\ell}$ *определены в* (8.13), (8.14), *и выполнены условия* (8.11), (8.12), (i°)–(iii°). *Пусть квадратичная форма* $m_{\lambda\mu}$ *(где* λ *и* μ *принимают значения* D *и* N*) определена в* (8.15), *а форма* $\overline{m_{\lambda\mu}}$ *есть замыкание формы* $m_{\lambda\mu}$ *в* $L_2(\Pi)$. *Пусть самосопряженный оператор* $M_{\lambda\mu}$ *в* $L_2(\Pi)$ *порожден формой* $\overline{m_{\lambda\mu}}$. *Тогда спектр каждого из четырех операторов* M_{DD}, M_{DN}, M_{ND}, M_{NN} *абсолютно непрерывен.*

Замечание 8.6. 1) В [18] преобразование Ψ использовалось для сведения задачи в волноводе Π к задаче в полосе S для оператора того же вида, но с измененными коэффициентами (см. (7.9)–(7.12)). При этом оказывалось, что новые коэффициенты в полосе S удовлетворяют условиям, аналогичным тем, что были выполнены для исходных коэффициентов в волноводе Π. Задача в полосе S была подробно изучена в работе [22]. В [22] осуществлялась периодизация, и изучение всех четырех краевых задач в полосе сводилось к исследованию задачи с периодическими граничными условиями. Затем периодический оператор в $L_2(S)$ раскладывался в прямой интеграл по операторам с периодическими граничными условиями, действующим в $L_2(\Omega_\beta)$ и зависящим от квазиимпульса $k \in \mathbb{R}$. Тогда доказательство абсолютной непрерывности спектра сводилось к оценкам резольвенты оператора в слое при больших мнимых значениях квазиимпульса $k \in \mathbb{C}$. Эти оценки были заимствованы из [17, теорема 2.2]. Применение более точной теоремы 2.1 из настоящей работы позволяет ослабить условие на магнитный потенциал.

2) Хотя, формально, условие (8.10) лишь незначительно улучшает условие на магнитный потенциал, использованное в [18], оно обладает существенным преимуществом. Именно, условие (8.10) инвариантно относительно тех замен переменных, которые отображают волновод Π на полосу S. Использованные ранее более жесткие условия таким свойством не обладают, что приходилось преодолевать, либо связывая условия на магнитный потенциал с конкретным преобразованием координат Ψ (как это было сделано в [18, условие (2.15)]), либо накладывая на волновод большие ограничения (см. [18, п. 2.4]).

Литература

1. L. Ahlfors and L. Bers, *Riemann's mapping theorem for variable metrics.* — Annals of Math. **72**, No. 2, (1960) 385–404.
2. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Двумерный периодический магнитный гамильтониан абсолютно непрерывен.* — Алгебра и Анализ **9** (1997), вып. 1, 32–48.
3. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом.* — Алгебра и Анализ **10** (1998), вып. 4, 1–36.
4. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности.* — Алгебра и Анализ **11** (1999), вып. 2, 1–40.

5. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шредингера с дельта-потенциалом, сосредоточенным на периодической системе кривых.* — Алгебра и Анализ **12** (2000), вып. 6, 140–177. Preprint ESI nu. 934 (2000).
6. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* Гос. изд-во тех.-теорет. лит-ры, М. (1952).
7. T. Kato, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М. (1972).
8. P. Kuchment, *Floquet theory for partial differential equations.* Birkhäuser Verlag, Basel (1993).
9. P. Kuchment and S. Levendorskii, *On the structure of spectra of periodic elliptic operators.* Preprint mp_arc 00–388 (2000), http://www.ma.utexas.edu/mp_arc
10. И. С. Лапин, *Абсолютная непрерывность спектра двумерных периодических магнитных операторов Шредингера и Дирака с потенциалами из классов Зигмунда.* — Пробл. мат. анал., вып. 22 (2001), СПбГУ, СПб, 74–105.
11. В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева.* Изд-во Ленингр. ун-та (1985).
12. A. Morame, *Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace-Beltrami operator with periodic electromagnetic potential.* — J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 7593–7601.
13. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* Т. 4. *Анализ операторов*, Мир, М. (1982).
14. M. Z. Solomyak, *Spectral problems related to the critical exponent in the Sobolev embedding theorem.* — Proc. London Math. Soc. (3) **71** (1995), 53–75.
15. Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность двумерного магнитного периодического оператора Шредингера с электрическим потенциалом типа производной от меры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **271** (2000), 276–312.
16. Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шредингера с положительным электрическим потенциалом.* — Алгебра и Анализ **13** (2001), вып. 4, 196–228.
17. Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность спектра двумерного магнитного периодического оператора Шредингера с положительным электрическим потенциалом.* — Труды СПб мат. об-ва **9** (2001), 199–233.
18. Р. Г. Штеренберг, *Оператор Шредингера в периодическом волноводе на плоскости и квази-конформные отображения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **295** (2003), 204–244.
19. E. Shargorodsky and A. V. Sobolev, *Quasi-conformal mappings and periodic spectral problems.* University of Sussex at Brighton, Preprint no. 2001-07 (2001).
20. A. V. Sobolev and J. Walthoe, *Absolute continuity in periodic waveguides.* University of Sussex at Brighton, Preprint 2000-19 (2000).
21. T. A. Suslina, *Absolute continuity of the spectrum of periodic operators of mathematical physics.* — Journées équations aux d'erivées partielles, Nantes, 5-9 juin 2000.
22. Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность спектра магнитного оператора Шредингера с метрикой в двумерном периодическом волноводе.* — Алгебра и Анализ **14** (2002), вып. 2, 159–206.

23. L. Thomas, *Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal.* — Comm. Math. Phys. **33** (1973), 335–343.

Shterenberg R. G. Absolute continuity of the spectrum of two-dimensional periodic Schrödinger operators with strongly subordinate magnetic potential.

A two-dimensional periodic magnetic Schrödinger operator with variable metric is considered. It is shown that under the condition of strong subordination of the magnetic potential the spectrum of the operator is absolutely continuous. A similar result concerning the Schrödinger operator in a simply connected periodic waveguide is also formulated.

С.-Петербургский
государственный университет
e-mail:roman@RS3759.spb.edu

Поступило 10 июля, 2003 г.