Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 304, 2003 г.

И. Д. Заславский

ФОРМАЛЬНЫЕ АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ НА ОСНОВЕ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

1. Введение

Системы многозначной логики исследовались во многих направлениях ([18, 22, 25, 27, 30, 32–34]), однако формальные аксиоматические теории, основанные на таких логиках, не подвергались систематическому рассмотрению. В настоящей статье исследуются некоторые свойства основных понятий, связанных с подобными теориями. Мы ограничимся случаем трехзначной логики L4 Я. Лукасевича ([2, 3, 24, 25, 27]); все определения основных понятий будут даны для случая этой логики (хотя аналогичные понятия, относящиеся к аксиоматическим теориям, могут быть введены для случая любой многозначной логики; соответствующие определения даны в работе О. Р. Болибекяна [1]). Такое ограничение вводится на основании следующих соображений. Значительная часть дальнейших рассмотрений относится к системам формальной арифметики; подобные системы, основанные на трехзначной логике Я. Лукасевича, могут быть определены естественным образом ([2, 3, 38, 41]), однако неясно, каким образом надлежит вводить определения арифметических систем на основе произвольной многозначной логики. Кроме того, трехзначная логика Я. Лукасевича – это в настоящее время единственная многозначная неклассическая логика, для которой известен ее конструктивный (интуиционистский) вариант; в самом деле, как было установлено в [2] и [3], соотношения между симметрической конструктивной логикой ([2–8, 36, 39, 41]) и трехзначной логикой Я. Лукасевича вполне аналогичны соотношениям между конструктивной (интуиционистской) логикой и классической логикой. Симметрическая конструктивная логика может рассматриваться, таким образом, как “конструктивное ядро” трехзначной логики Я. Лукасевича. Дополнительные под-

Это исследование было поддержано грантом “Weak arithmetics” INTAS 2001–447.

тверждения этим соотношениям будут даны ниже.

В разделе 2 настоящей статьи вводятся основные понятия, относящиеся к аксиоматическим системам, рассматриваемым на основе трехзначной логики Я. Лукасевича. В частности, будет введено понятие Luk-модели (т.е. модели аксиоматической системы в рамках трехзначной логики Я. Лукасевича), а также, например, понятия Luk-непротиворечивой системы аксиом, Luk-полной системы аксиом, понятие Luk-следствия системы аксиом и т.п. Некоторые из них существенно отличаются от аналогичных понятий классической логики (например, аксиоматическая система называется Luk-полной, если каждая замкнутая формула A в языке этой системы обладает следующим свойством: либо формула A, либо формула $\neg A$, либо формула $(A \supset \neg A)\&(\neg A \supset A)$ выводима в этой системе). В том же разделе формулируется теорема 2.1, являющаяся аналогом теоремы К. Гёделя–А. И. Мальцева о компактности в классической логике предикатов ([10; 19; 21]; [23], том 2, стр. 238 русского перевода; [24], стр. 352 русского перевода).

В разделе 3 даются определения предикатных исчислений для трехзначной логики Я. Лукасевича; разумеется, известен целый ряд исчислений аналогичного типа [30], однако исчисления, рассматриваемые в указанном разделе, отличаются тем, что имеют непосредственные связи с конструктивным (интуиционистским) вариантом трехзначной логики Я. Лукасевича. В том же разделе формулируются теоремы 3.1 и 3.2, являющиеся аналогами теоремы К. Гёделя о полноте классического исчисления предикатов ([19]; [21]; [23, том 2, стр. 238–243 русского перевода]; [24, стр. 345–349 русского перевода]; [28, стр. 75–79 русского перевода]).

В разделе 4 вводится ряд предикатных исчислений, связанных с рассмотрениями трехзначной логики Я. Лукасевича и ее конструктивного (интуиционистского) варианта; кроме того, рассматриваются системы формальной арифметики, основанные на указанных исчислениях. В том же разделе формулируются теоремы 4.1 и 4.2, описывающие свойства так называемых "существенно неопределенных формул" (это понятие является обобщением понятия "формально неопределенной формулы", данного в [3], стр. 264) в арифметических системах. Формулируются теорема 4.3 и ее следствие, где устанавливается свойство "эффективной Luk-неполноты" для определенного класса систем формальной арифметики. Эта теорема и ее следствие могут рассматриваться как трехзначные аналоги знаменитой теоремы К. Гёделя о неполноте систем формальной арифметики ([20; 21]; [23], том 2, стр. 337–352 русского перевода; [24], стр. 187–188 русского перевода; [28], стр. 159–163 русского перевода). В самом деле, в упомянутой теореме К. Гёделя утверждается, что в каждой системе формальной арифметики, принадлежащей определенному классу систем, может быть построена замкнутая формула A, такая что ни A, ни $\neg A$ не выводимы в этой системе; таким образом, указанная формула A может рассматриваться в некотором условном смысле как формула, не являющаяся "ни истинной, ни ложной", – если "истинность" A условно отождествляется с выводимостью A в рассматриваемой системе, а "ложность" A – с выводимостью $\neg A$ в этой системе. Теорема 4.3 и ее следствие утверждают, что в каждой системе формальной арифметики, основанной на трехзначной логике Я. Лукасевича (или ее конструктивном (интуиционистском) варианте) и принадлежащей определенному классу таких систем, может быть построена замкнутая формула A такая, что ни A, ни $\neg A$, ни $(A \supset \neg A)\&(\neg A \supset A)$ не выводимы в этой системе; таким образом, указанная формула может рассматриваться в некотором условном смысле как формула, не являющаяся "ни истинной, ни ложной, ни неопределенной", – если "истинность" условно отождествляется с выводимостью A в рассматриваемой системе, "ложность" – с выводимостью $\neg A$ в этой системе, "неопределенность" – с выводимостью $(A \supset \neg A)\&(\neg A \supset A)$ в этой системе. Отметим, что выводимость $(A \supset \neg A)\&(\neg A \supset A)$ содержательно соответствует тому, что в трехзначной логике формула A принимает логическое значение "неопределенность"; в самом деле, конъюнктивный член $(A \supset \neg A)$ обеспечивает содержательно то, что формула A не может быть истинной, а конъюктивный член $(\neg A \supset A)$ – то, что формула A не может быть ложной. Аксиомы $U \supset \neg U$ и $\neg U \supset U$ (см. ниже, раздел 3) устанавливают основные свойства символа неопределенности U в рассматриваемых исчислениях; таким образом, выводимость $(A \supset \neg A)\&(\neg A \supset A)$ означает, что формула A обладает теми же свойствами, что и символ неопределенности U.

В разделе 4 рассматриваются также трехзначные аналоги арифметической системы М. Пресбургера ([21]; [23], том 1, стр. 438–453 русского перевода; [24], стр. 419 и 479–481 русского перевода; [29]). Формулируется теорема 4.4, утверждающая, что указанные системы Luk – полны.

В разделе 5 устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения, касающиеся логических выводов в рассматриваемых исчислениях.

В разделе 6 вводятся и исследуются погружающие операции из одних логических систем в другие. Даются доказательства теорем 2.1, 3.1, 3.2, где используются указанные погружающие операции.

В разделе 7 доказываются теоремы 4.1 и 4.2.

В разделе 8 вводятся и исследуются погружающие операции из одних арифметических систем в другие. Доказываются теорема 4.3 и ее следствие. Кроме того, в этом разделе формулируется и доказывается теорема 8.1, устанавливающая возможности представления трехзначных арифметических предикатов посредством формул рассматриваемых систем формальной арифметики.

В разделе 9 исследуются свойства трехзначных аналогов арифметической системы М. Пресбургера; в частности, дается доказательство теоремы 4.4. Устанавливается, что рассматриваемые аналоги системы М. Пресбургера Luk – полны, но неполны в классическом смысле.

Теоремы 2.1, 3.1, 3.2 принадлежат классической теоретико-множественной математике; теоремы 4.1–4.4, а также теорема 8.1, могут рассматриваться как теоремы конструктивной математики ([9, 12–17]).

Формулировки некоторых частных случаев теоремы 4.3 были опубликованы в [6] и [40]. Формулировки некоторых аналогов теоремы 8.1 и ее следствий были опубликованы в [4] и [38].

Формулировки теорем 2.1, 3.1, 3.2, а также теоремы 4.4 для системы HLUA (обозначенной в [40] через HLEA) были приведены в [40]. Формулировки теорем 4.1 и 4.2, а также теоремы 4.4 для системы HLUP (обозначенной в [41] посредством HLEP) были опубликованы в [41]. Там же опубликована формулировка теоремы, соответствующей теореме 4.3 и ее следствию.

Автор приносит глубокую благодарность Ю. В. Матиясевичу за помощь при подготовке окончательного варианта этой статьи, и Г. Е. Минцу за ценные советы и дискуссии, значительно повлиявшие на изложение материала в этой статье.

2. Аксиоматические системы и их Luk-модели

Будем рассматривать язык исчисления предикатов первого порядка ([21], [23], [24], [28]), содержащий счетные множества функциональных символов $f_1, f_2, \ldots$, предикатных символов $p_1, p_2, \ldots$, предметных переменных $x_1, x_2, \ldots$. Предполагаем, что для каждого символа f_i и каждого символа p_i фиксирована его размерность, и что для каждого $n \geqslant 0$ имеется бесконечное множество предикатных и функциональных символов, имеющих размерность n. В роли предметных констант рассматриваются функциональные символы размерности 0. Вводятся в рассмотрение символы логических констант T, F, U; они интерпретируются как символы логической истинности, ложности и неопределенности. Вводятся логические операции &(конъюкция), $\vee$(дизъюнкция), $\supset$(импликация), $\neg$(отрицание), $\forall x$(квантор всеобщности относительно предметной переменной x), $\exists x$(квантор существования относительно предметной переменной x). Понятия терма и предикатной формулы вводятся обычным образом ([21, 24, 28]); формулы строятся на основе элементарных формул и указанных логических операций. Символы T, F, U рассматриваются как элементарные формулы. Расширенный (соответственно, ограниченный) предикатный язык LP (соответственно, L^*P) определяется как множество всех предикатных формул (соответственно, как множество всех предикатных формул, не содержащих логических констант T, F, U).

Отметим, что роль логических констант T, F, U в дальнейшем будет различной. Введение в язык констант T и F не является существенным, поскольку во всех исчислениях, рассматриваемых в настоящей статье, эти константы могут быть выражены средствами языка L^*P (например, константа T – в виде $(D_0 \supset D_0)$, константа F – в виде $\neg(D_0 \supset D_0)$, где D_0 – какая-либо фиксированная формула). Однако константа U, вообще говоря, не может быть выражена средствами языка L^*P (исключение составляют лишь рассматриваемые ниже системы HSAD и HSUAD, в которых константа U может быть выражена средствами языка L^*P). Свойства исчислений, определяемых сходным образом в языках LP и L^*P, вообще говоря, различны. Это будет видно из дальнейшего.

Слабая импликация $(A \supseteq B)$ определяется как $(A \supset (A \supset B))$, *слабое отрицание* $\neg^\circ A$ – как $(A \supset \neg A)$. Обычную импликацию $(A \supset B)$ и обычное отрицание $\neg A$ мы будем называть иногда „сильной импликацией“ и „сильным отрицанием“.

Эквивалентность $(A \sim B)$ определяется как $(A \supset B)\&(B \supset A)$.

Сигнатура определяется как любое множество функциональных и предикатных символов. Мы будем рассматривать лишь такие сигнатуры, в которых множества индексов принадлежащих им предикатных и функциональных символов рекурсивны ([11, 21, 24, 26, 28]). Расширенный (соответственно, ограниченный) подъязык $L(Z)$ (соответственно, $L^*(Z)$), основанный на сигнатуре Z, определяется как множество предикатных формул из языка LP (соответственно, L^*P), содержащих только такие предикатные и функциональные символы, которые принадлежат Z. Мы будем, в частности, рассматривать сигнатуру $Z_{\max}$, которой принадлежат все функциональные и предикатные символы. Ясно, что $L(Z_{\max})$ есть LP, а $L^*(Z_{\max})$ есть L^*P.

Все понятия, связанные с предикатными формулами, определяются обычным образом ([21, 23, 24, 28]). Посредством $\mathrm{Subst}(A, x, s)$, где A есть предикатная формула (или терм), x есть предметная переменная, s есть терм, будем обозначать предикатную формулу (соответственно, терм), полученную при помощи подстановки терма s в A вместо всех свободных вхождений переменной x; будем рассматривать только допустимые подстановки (в обычном смысле). Говорим, что предикатная формула замкнута, если она не содержит свободных вхождений предметных переменных. Посредством $(\forall\forall)$ (соответственно, $(\exists\exists)$) будем обозначать любую конечную последовательность кванторов всеобщности (соответственно, существования) $\forall x \forall y \ldots \forall z$ (соответственно, $\exists x \exists y \ldots \exists z$). Посредством $(\forall\forall\forall)(A)$ (соответственно, $(\exists\exists\exists)(A)$), где A – предикатная формула, будем обозначать замыкание A, полученное посредством введения кванторов всеобщности (соответственно, существования) по всем предметным переменным, входящим свободно в A. Формулы $(\forall\forall\forall)(A)$ и $(\exists\exists\exists)(A)$ будем называть, соответственно, “замыканием всеобщности” и “замыканием существования” формулы A.

Пусть M – любое непустое множество. Посредством M^n будем обозначать множество всех n-членных систем, элементы которых принадлежат M (т.е. n-ю декартову степень M). *Трехзначным предикатом* размерности n на множестве M (или, иначе говоря, трехзначным n-местным предикатом на M) будем называть любое отображение M^n в множество $\{0, 1, 2\}$; здесь числа $0, 1, 2$ интерпретируются как логические значения, а именно: 0 – как "ложь", 1 – как "неопределенность", 2 – как "истина". *Предметной функцией* размерности n на множестве M (или, иначе говоря, n-местной предметной функцией на M) будем называть любое отображение M^n в M. Если Z – какая-либо сигнатура, то тогда Luk – *распределением* на Z на основе какого-либо непустого множества M (которое будет именоваться в дальнейшем "основным множеством" данного Luk-распределения) будем называть соответствие, согласно которому каждому предикатному символу из Z размерности n ставится в соответствие какой-либо n-местный трехзначный предикат на M, а каждому функциональному символу из Z размерности n ставится в соответствие какая-либо n-местная предметная функция на M.

Интерпретацией предикатного или функционального символа из Z относительно данного Luk-распределения δ будем называть отображение (т.е. трехзначный предикат или предметную функцию), поставленное в соответствие указанному символу посредством δ.

Определим теперь интерпретации логических констант и логических операций. Интерпретации символов T, U, F суть, по определению, логические значения $2, 1, 0$. Пропозициональные логические операции интерпретируются в соответствии с таблицами истинности трехзначной логики Я. Лукасевича ([3], стр. 152–153; [24], стр. 298–299 русского перевода; [25, 27, 37, 38]), а именно: если x и y суть соответственно логические значения формул A и B, то логические значения $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $\neg A$ суть, соответственно, $\min(x, y)$, $\max(x, y)$, $2 - \max(0, x - y)$, $2 - x$. Кванторы интерпретируются как преобразования трехзначных предикатов, а именно: если формула A со свободными переменными $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ задает трехзначный n-местный предикат p на множестве M, то тогда формула $\forall x(A)$ (соответственно, $\exists x(A)$) задает $(n-1)$-местный трехзначный предикат на M, такой что его значение в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ является минимумом (соответственно, максимумом) значений $p(x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ при всех $x \in M$.

Пусть Z – какая-либо сигнатура, A – предикатная формула в языке $L(Z)$, δ – Luk-распределение на Z. Тогда Luk-*интерпретацией* формулы A относительно Luk-распределения δ будем называть трехзначный предикат, который получается, когда все функциональные и предикатные символы в формуле A заменяются их интерпретациями относительно δ, а остальные символы в формуле A интерпретируются в соответствии с определениями, данными выше. Если интерпретация формулы A относительно Luk-распределения δ представляет собой трехзначный предикат, значения которого во всех точках равны 2, то говорим, что "формула A Luk-истинна относительно δ".

Пусть задана сигнатура Z. *Аксиоматической системой* или *системой аксиом* в $L(Z)$ (или $L^*(Z)$) будем называть любое счетное или конечное (возможно, пустое) множество замкнутых формул $(A_1, A_2, \dots)$, принадлежащих $L(Z)$ (соответственно, $L^*(Z)$). Мы рассматриваем системы аксиом, состоящие лишь из замкнутых формул, вследствие некоторых формальных особенностей рассматриваемых ниже логических исчислений; это ограничение носит технический характер. Luk-распределение δ на сигнатуре Z будем называть Luk-*моделью* системы аксиом $(A_1, A_2, \dots)$ в $L(Z)$ (или $L^*(Z)$), если все аксиомы A_i Luk-истинны относительно δ. Формулу B (не обязательно замкнутую) в языке $L(Z)$ (или $L^*(Z)$) будем называть Luk-*следствием* системы аксиом Ω в языке $L(Z)$ (соответственно, $L^*(Z)$), если она Luk-истинна относительно всякой Luk-модели системы аксиом Ω. В частности, если система аксиом Ω в языке $L(Z_{\max})$ пуста, то всякое Luk-распределение на $Z_{\max}$ может рассматриваться как Luk-модель системы Ω, а потому Luk-следствия этой системы аксиом суть все такие формулы в языке LP, у которых Luk-интерпретации относительно любых Luk-распределений на $Z_{\max}$ суть трехзначные предикаты, значения которых во всех точках равны 2. Такие формулы будем называть "тождественно Luk-истинными формулами". Будем говорить, что система аксиом $\Omega_1 = (B_1, B_2, \dots)$ является Luk-*расширением* системы аксиом $\Omega = (A_1, A_2, \dots)$ (или, что система Ω является *подсистемой* системы Ω_1), если язык системы Ω содержится в языке системы Ω_1, и всякое Luk-следствие системы Ω является Luk-следствием системы Ω_1. Система аксиом называется конечной, если количество аксиом в ней конечно.

Luk-*теорией*, основанной на какой-либо системе аксиом, будем называть множество всех Luk-следствий этой системы аксиом. Две системы аксиом называются Luk-*эквивалентными*, если Luk-теории, основанные на них, равны. Систему аксиом будем называть Luk-*непротиворечивой*, если она имеет хотя бы одну Luk-модель. В противном случае систему аксиом будем называть Luk-противоречивой. Систему аксиом Ω в языке $L(Z)$ (или $L^*(Z)$), где Z – какая-либо сигнатура, будем называть Luk-*полной*, если, какова бы ни была замкнутая формула A в $L(Z)$ (соответственно, $L^*(Z)$), либо формула A, либо $\neg A$, либо $(A \supset \neg A)\&(\neg A \supset A)$ является Luk-следствием системы Ω. В противном случае, будем говорить, что Ω Luk-неполна. Говорим, что формулы A и B Luk-*эквивалентны* относительно системы аксиом Ω (или "Ω-эквивалентны"), если формула $(A \sim B)$ является Luk-следствием системы Ω.

Префикс "Luk" в написании терминов, введенных выше, будет иногда опускаться в тех случаях, когда это не ведет к недоразумениям.

Теорема 2.1. *Если формула A является Luk-следствием системы аксиом Ω, то она является также Luk-следствием некоторой конечной подсистемы Ω.*

Как было указано выше, эта теорема является аналогом теоремы К. Гёделя–А. И. Мальцева о компактности в классической логике предикатов. Доказательство ее будет дано в разделе 6. Формулировка этой теоремы была приведена в [40]. Аналогичная теорема верна для любой многозначной логики, имеющей конечное множество логических значений; это доказано О. Р. Болибекяном [1].

3. Логические исчисления HLU и HL

Введем в рассмотрение исчисления HLU и HL, формализующие предикатную логику Я. Лукасевича.

Исчисление HLU в языке LP определяется единственным правилом вывода (modus ponens):

$$\frac{A\,(A \supset B)}{B},$$

нижеследующими схемами логических аксиом $HLU_1 - HLU_{21}$ и индивидуальными логическими аксиомами $HLU_{22} - HLU_{25}$ (где

A, B, C – любые формулы в языке LP; x – любая предметная переменная; D – любая формула в языке LP, не содержащая свободных вхождений x; s – любой терм):

(HLU_1) $(\forall\forall)(A \supset (B \supset A))$;
(HLU_2) $(\forall\forall)((A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C)))$;
(HLU_3) $(\forall\forall)((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$;
(HLU_4) $(\forall\forall)((A \supset (A \supset B)) \supset ((\neg B \supset (\neg B \supset \neg A)) \supset (A \supset B)))$;
(HLU_5) $(\forall\forall)((A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A))$;
(HLU_6) $(\forall\forall)(A \supset \neg\neg A)$;
(HLU_7) $(\forall\forall)(\neg\neg A \supset A)$;
(HLU_8) $(\forall\forall)((A \& B) \supset A)$;
(HLU_9) $(\forall\forall)((A \& B) \supset B)$;
(HLU_{10}) $(\forall\forall)((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B))))$;
(HLU_{11}) $(\forall\forall)(A \supset (A \vee B))$;
(HLU_{12}) $(\forall\forall)(B \supset (A \vee B))$;
(HLU_{13}) $(\forall\forall)((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$;
(HLU_{14}) $(\forall\forall)(\forall x(A) \supset \mathrm{Subst}(A, x, s))$;
(HLU_{15}) $(\forall\forall)(D \supset \forall x(D))$;
(HLU_{16}) $(\forall\forall)(\forall x(A \supset B) \supset (\forall x(A) \supset \forall x(B)))$;
(HLU_{17}) $(\forall\forall)(\mathrm{Subst}(A, x, s) \supset \exists x(A))$;
(HLU_{18}) $(\forall\forall)(\exists x(D) \supset D)$;
(HLU_{19}) $(\forall\forall)(\forall x(A \supset B) \supset (\exists x(A) \supset \exists x(B)))$;
(HLU_{20}) $(\forall\forall)(\forall x(A \supset (A \supset B)) \supset (\exists x(A) \supset (\exists x(A) \supset \exists x(B))))$;
(HLU_{21}) $(\forall\forall)(((A \supset \neg A) \supset \neg(A \supset \neg A)) \supset A)$;
(HLU_{22}) T;
$(HLU_{23}$ $\neg F$;
(HLU_{24}) $(U \supset \neg U)$;
(HLU_{25}) $(\neg U \supset U)$.

С помощью символов $\supseteq$ и $\neg^\circ$ схему HLU_4 можно записать в виде $(\forall\forall)((A \supseteq B) \supset ((\neg B \supseteq \neg A) \supset (A \supset B)))$, схему HLU_{20} – в виде $(\forall\forall)(\forall x(A \supseteq B) \supset (\exists x(A) \supseteq \exists x(B)))$, схему HLU_{21} – в виде $(\forall\forall)(\neg^\circ\neg^\circ A \supset A)$.

Исчисление HLU лишь технически отличается от исчисления HLE, рассматриваемого в [37], [38], [40], [41].

Исчисление HL в языке L^*P определяется правилом modus ponens и схемами логических аксиом $HL_1 - HL_{21}$, которые задаются теми же формальными выражениями, что и схемы $HLU_1 - HLU_{21}$, но относящимися к языку L^*P. Это исчисление введено и исследовано в [2] и [3]. Отношение “формула B выводима в HLU

(соответственно, в HL) из системы формул A_1, $A_2, \ldots, A_n$" (иначе говоря, "из посылок A_1, $A_2, \ldots, A_n$") определяется обычным образом ([21]; [24], стр. 82–83 русского перевода; [28], стр. 37 русского перевода). Это отношение будет обозначаться посредством A_1, $A_2, \ldots, A_n \vdash_{HLU} B$ (соответственно, A_1, $A_2, \ldots, A_n \vdash_{HL} B$) или A_1, $A_2, \ldots, A_n \vdash B$, если ясно о каком исчислении идет речь. Говорим, что формула B выводима в HLU (соответственно, в HL), если она выводима в этом исчислении из пустой системы формул.

Пусть Z – какая-либо сигнатура. Будем говорить, что формула B в языке $L(Z)$ является *HLU-следствием* системы аксиом $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ в $L(Z)$, если A_1, $A_2, \ldots, A_n \vdash_{HLU} B$ при некотором n; в этом случае будем говорить также, что „формула B выводима из Ω в исчислении HLU“. Будем говорить, что система аксиом $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ в языке $L(Z)$ является *HLU-противоречивой*, если некоторая формула B в языке $L(Z)$ выводима из Ω в исчислении HLU, и то же имеет место для формулы $\neg B$. В противном случае, если подобной формулы B не существует, будем говорить, что система аксиом Ω является HLU-непротиворечивой. Будем говорить, что система аксиом $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ в языке $L(Z)$ является *HLU-полной*, если любая замкнутая формула B в языке $L(Z)$ обладает следующим свойством: либо формула B, либо формула $\neg B$, либо формула $(B \supset \neg B)\&(\neg B \supset B)$ выводима из Ω в исчислении HLU. *HLU-теория*, основанная на системе аксиом Ω в языке $L(Z)$, определяется как множество всех HLU-следствий из Ω. Будем говорить, что две формулы A и B в языке $L(Z)$ являются *HLU-эквивалентными* относительно системы аксиом Ω в языке $L(Z)$, если формула $(A \sim B)$ является HLU-следствием из Ω. Формулы A и B в языке LP называются *HLU-эквивалентными*, если формула $(A \sim B)$ выводима в HLU.

Понятия HL-следствия из системы аксиом, HL-непротиворечивой системы аксиом, HL-полной системы аксиом и другие понятия, аналогичные введенным выше, определяются для исчисления HL таким же образом, как и для HLU, с заменой HLU на HL и LP на L^*P. Большинство указанных понятий (как для HLU, так и для HL) было приведено (с точностью до технических подробностей) в [40].

Теорема 3.1. *Если система аксиом HLU-непротиворечива или HL-непротиворечива, то она имеет* Luk*-модель.*

Теорема 3.2. *Пусть Z – какая-либо сигнатура, $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ – система аксиом в языке $L(Z)$ (или $L^*(Z)$). Тогда любая формула в языке $L(Z)$ (соответственно, $L^*(Z)$) является* Luk*-следствием системы аксиомы Ω в том, и только в том случае, когда она является HLU-следствием (соответственно, HL-следствием) системы аксиом Ω.*

Как было указано ранее, обе теоремы в совокупности дают аналог теоремы К. Гёделя о полноте классического исчисления предикатов. Доказательства этих теорем будут даны в разделе 6. Формулировки их приведены (с точностью до технических подробностей) в [40]. Из этих теорем следует, что понятия Luk-непротиворечивости системы аксиом, Luk-полноты системы аксиом, Luk-теории, основанной на системе аксиом и т.д., эквивалентны, соответственно, понятиям HLU-непротиворечивости или HL-непротиворечивости системы аксиом, HLU-полноты или HL-полноты системы аксиом, HLU-теории или HL-теории, основанной на системе аксиом и т.д., – смотря по тому, каков язык ($L(Z)$ или $L^*(Z)$) рассматриваемой системы. Тем самым теоретико-множественные понятия, касающиеся систем аксиом в трехзначной логике, сводятся к конструктивным понятиям, связанным с выводимостью в исчислениях HLU и HL. Отметим, что другая форма утверждения о полноте этих исчислений установлена в [37]; она фактически соответствует частному случаю теоремы 3.2 для пустой системы аксиом Ω в языках $L(Z_{\max})$ и $L^*(Z_{\max})$.

4. Логические и арифметические системы

Рассмотрим теперь некоторые другие исчисления предикатов, а также ряд систем формальной арифметики. Исчисление HSU в языке LP и исчисление HS в языке L^*P получаются, соответственно, из HLU и HL посредством удаления схем HLU_{21} и HL. Исчисление HS введено и исследовано в [2] и [3]; исчисление HSU отличается лишь технически от исчисления HSE, рассмотренного в [41]. Исчисления HSU и HS являются основными предикатными исчислениями симметрической конструктивной логики. Напомним, что эта логика может рассматриваться как конструктивный (интуиционистский) вариант трехзначной логики Я. Лукасевича.

Введем в рассмотрение предикатные исчисления HK и HI в языке L^*P. Исчисление HK определяется правилом modus ponens и схемами логических аксиом $HK_1 - HK_{20}$, где схемы $HK_1 - HK_3$, $HK_5 - HK_{20}$ совпадают со схемами аксиом, соответственно, $HL_1 - HL_3$, $HL_5 - HL_{20}$, а схема HK_4 имеет следующий вид:

$$(HK_4) \quad (\forall\forall)((A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)).$$

Предикатное исчисление HI определяется правилом modus ponens и схемами логических аксиом $HI_1 - HI_{20}$, где схемы $HI_1 - HI_3$, $HI_5 - HI_6$, $HI_8 - HI_{20}$ совпадают со схемами $HL_1 - HL_3$, $HL_5 - HL_6$, $HL_8 - HL_{20}$, схема HI_4 совпадает с HK_4, а схема HI_7 имеет следующий вид:

$$(HI_7) \quad (\forall\forall)(\neg A \supset (A \supset B)).$$

Предикатные исчисления HK и HI совпадают, соответственно, с исчислениями HK и HT, рассмотренными в [2] и [3]; они лишь технически отличаются от обычно рассматриваемых предикатных исчислений – соответственно, классического ([21, 23, 24, 28]) и конструктивного (интуиционистского) ([24, 35]). Исчисления HK и HI имеют некоторые технические особенности по сравнению с обычно рассматриваемыми (скажем, в [24] или [35]) предикатными исчислениями аналогичного рода; например, формула $\forall x p(x)$ не выводима в HK и HI из формулы $p(x)$ (поскольку единственным правилом вывода в HK и HI является modus ponens, а правила вывода П. Бернайса ([23], том 1, стр. 142 русского перевода) фактически заменены соответствующими схемами логических аксиом). Однако, как легко видеть, HK и HI обладают всеми основными свойствами, соответственно, классического и конструктивного (интуиционистского) предикатного исчисления. В частности все формулы, выводимые в HK (соответственно, в HI) будут выводимы и в обычном классическом (соответственно, интуиционистском) предикатном исчислении, и обратно. Подробное рассмотрение этого вопроса проведено в [3].

Отметим, что слабая и сильная импликация, слабое и сильное отрицание эквивалентны в HK и HI.

Исчисления HK и HI не могут быть распространены естественным образом на язык LP. Логические константы T и F могут быть введены в эти исчисления без противоречия, однако добавление константы U и соответствующих логических аксиом HLU_{24} и HLU_{25} очевидным образом приводит к противоречивой системе, поскольку слабое и сильное отрицание эквивалентны в

HK и HI, а потому, как легко видеть, аксиома $U \supset \neg U$ эквивалентна $\neg U$, а аксиома $\neg U \supset U$ эквивалентна $\neg\neg U$ в этих исчислениях.

Пусть Γ – одно из логических исчислений, введенных в этом разделе (т.е. HSU, HS, HK, HI). Понятия Γ-следствия системы аксиом Ω, Γ-непротиворечивой системы аксиом, Γ-полной системы аксиом, Γ-теории, основанной на Ω, и т.п. вводятся, как правило, естественным образом, в точной аналогии с определениями, данными в предыдущем разделе для исчислений HLU и HL. Исключение составляют лишь определения HK-полной и HI-полной (т.е. „классически полной“ и „интуиционистски полной“) системы аксиом. А именно, система аксиом Ω в $L^*(Z)$, где Z – какая-либо сигнатура, называется HK-полной (соответственно, HI-полной) если, какова бы ни была замкнутая формула B в $L^*(Z)$, либо формула B, либо формула $\neg B$ является HK-следствием (соответственно, HI-следствием) системы Ω. Понятия HS-полноты и HSU-полноты, напротив, вводятся в точной аналогии с понятием HLU-полноты.

При определении подобных понятий, естественно, предполагается, что система аксиом Ω задана в том же языке (LP или L^*P), что и исчисление Γ.

Теперь введем в рассмотрение системы формальной арифметики, основанные на предикатных исчислениях, введенных выше. Сигнатура Z_1 определяется как сигнатура, состоящая из двуместного предикатного символа $=$, предметной константы 0 (ее не следует путать с логическим значением 0) и из функциональных символов для всех примитивно рекурсивных функций ([11, 23, 24, 26, 28]). Вводится система аксиом Ω_A формальной арифметики, которая определяется одним и тем же образом для всех введенных выше предикатных исчислений и содержит (ср. [21, 23, 24, 28]) аксиомы следующих видов: (1) аксиомы равенства; (2) аксиомы Пеано; (3) аксиомы, порождаемые схемой аксиом индукции; (4–5) замыкания всеобщности определяющих равенств для операторов суперпозиции и примитивной рекурсии ([11], стр. 30–35; [23], том 2, стр. 466–467 русского перевода; [24], стр. 197 русского перевода; [28], стр. 135 русского перевода), задающих всевозможные примитивно рекурсивные функции; (6–7) замыкания всеобщности определяющих равенств для базисных примитивно рекурсивных функций – тождественных нулей D_n при $n \geqslant 1$ и тождественных функций I_n^k при $n \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$ (отметим, что аналогичная аксиома для функции следования $x' = x + 1$ не вводится). Эти аксиомы задаются следующим образом:

(1) Аксиомы равенства:

(A_1) $\forall x(x = x)$;

(A_2) $\forall x \forall y(x = y \supset y = x)$;

(A_3) $\forall x \forall y \forall z(x = y \supset (y = z \supset x = z))$;

(A_f) $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n$ $((x_1 = y_1 \& x_2 = y_2 \& \ldots \& x_n = y_n) \supset f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n))$;

аксиомы последнего вида вводятся для каждого функционального символа f в сигнатуре Z_1 (размерность этого символа обозначена через n).

(2) Аксиомы Пеано:

(A_4) $\forall x \neg(x' = 0)$;

(A_5) $\forall x \forall y(x' = y' \supset x = y)$.

(3) Схема аксиом индукции: (A_B) $(\forall\forall)(\mathrm{Subst}(B, x, 0) \supseteq (\forall x(B \supseteq \mathrm{Subst}(B, x, x')) \supseteq \forall x(B)))$, где x – любая предметная переменная, B – любая формула в языке $L(Z_1)$.

(4) Замыкания всеобщности определяющих равенств для оператора суперпозиции:

$$\begin{aligned}(S_f) \quad & \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ & h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n))),\end{aligned}$$

где g, h_1, $h_2, \ldots, h_k$ – функциональные символы для исходных примитивно рекурсивных функций при применении оператора, f – функциональный символ для примитивно рекурсивной функции, получающейся из g, h_1, $h_2, \ldots, h_k$ посредством оператора суперпозиции.

(5) Замыкания всеобщности определяющих равенств для оператора примитивной рекурсии:

$$\begin{aligned}(R_{f,1}) \quad & \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)); \\ (R_{f,2}) \quad & \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y (f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y') \\ & = h(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y))),\end{aligned}$$

где g и h – функциональные символы для исходных примитивно рекурсивных функций при применении оператора примитивной рекурсии, f – функциональный символ для примитивно рекурсивной функции, получающейся из g и h посредством применения оператора примитивной рекурсии.

(6) Замыкания всеобщности определяющих равенств функций D_n при $n \geqslant 1$:

(D_n) $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$.

(7) Замыкания всеобщности определяющих равенств функций I_n^k при $n \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$(I_{k,n})$ $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (I_n^k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_k)$.

Отметим, что количество аксиом типа (2) конечно; количество аксиом остальных типов бесконечно.

Система аксиом Ω_A^* в языке $L^*(Z_1)$ получается из Ω_A посредством удаления всех аксиом, не принадлежащих языку $L^*(Z_1)$ (указанное изменение касается лишь аксиом типа (3)).

Теперь введем в рассмотрение сигнатуру Z_2. Она состоит, по определению, из двуместного предикатного символа $=$, предметной константы 0 и функциональных символов $'$ (функция следования), $+$ (сложение). Системы аксиом Ωp и $\Omega^* p$ в языках, соответственно, $L(Z_2)$ и $L^*(Z_2)$ получаются из системы аксиом Ω_A посредством удаления всех аксиом, не принадлежащих, соответственно, языкам $L(Z_2)$ и $L^*(Z_2)$ (и очевидных преобразований соответствующих аксиом). Заметим, что при этом множество аксиом типа (A_f) сводится к двум аксиомам (как для Ωp, так и для $\Omega^* p$):

$$\forall x \forall y (x = y \supset x' = y');$$
$$\forall x \forall y \forall u \forall \nu ((x = y \& u = \nu) \supset x + u = y + \nu);$$

аксиомы типа (4), (6), (7) отсутствуют, а аксиомы типа (5) могут быть сведены к двум аксиомам (как для Ωp, так и для $\Omega^* p$):

$$\forall x (x + 0 = x);$$
$$\forall x \forall y (x + y' = (x + y)').$$

Ясно, что в системах Ωp и $\Omega^* p$ лишь множество аксиом типа (3) является бесконечным.

Посредством n^* будем обозначать терм $0^{''\cdots'}$, где функциональный символ $'$ повторяется n раз. Термы $0'$, $0''$ ..., будут обозначаться посредством $1, 2, \dots$.

Теперь, сочетая предикатные исчисления и системы арифметических аксиом, введенные выше, получаем следующие системы формальной арифметики:

$HLUA$ в языке $L(Z_1)$ как сочетание HLU и Ω_A;

HLA в языке $L^*(Z_1)$ как сочетание HL и Ω_A^*;

$HSUA$ в языке $L(Z_1)$ как сочетание HSU и Ω_A;

HSA в языке $L^*(Z_1)$ как сочетание HS и Ω_A^*;

HIA в языке $L^*(Z_1)$ как сочетание HI и Ω_A^*;

HKA в языке $L^*(Z_1)$ как сочетание HK и Ω_A^*;

кроме того, системы $HLUP$, HLP, $HSUP$, HSP, HIP, HKP вводятся при помощи аналогичных определений, с заменой Z_1 на Z_2, Ω_A на Ωp, Ω_A^* на $\Omega^* p$.

Система HKA рассматривается в [2] и [3]; она отличается лишь технически от классической арифметики, рассматриваемой в [21, 23, 24, 28]. Система HIA с точностью до технических подробностей совпадает с системой HTA, рассматриваемой в [2] и [3]; она отличается лишь технически от интуиционистской (Гейтинговой) арифметики ([24, 35]). Системы HSA и HLA введены и исследованы в [2] и [3]; они представляют собой системы формальной арифметики в языке L^*P на основе, соответственно, симметрической конструктивной логики и трехзначной логики Я. Лукасевича. Вместе с тем, как это доказано в [3], стр. 237–238, система HLA эквивалентна классической системе HKA (отметим, что система $HLUA$ трехзначной арифметики, отличающейся от HLA лишь наличием в ней символов логических констант T, F, U и соответствующих логических аксиом, уже не будет эквивалентна классической арифметике; это обстоятельство служит иллюстрацией высказанного выше положения о различии свойств формальных систем, определяемых сходным образом в языках LP и L^*P). Системы $HLUA$ и $HSUA$ могут рассматриваться как системы, полученные посредством расширения HLA и HSA на язык $L(Z_1)$ и добавления логических аксиом $HLU_{22} - HLU_{25}$; система $HLUA$ рассмотрена в [38, 40, 41], а система $HSUA$ – в [41] (они обозначены в указанных статьях посредством $HLEA$ и $HSEA$). Система HKP отличается лишь технически от классической системы М. Пресбургера ([21]; [23], том 1, стр. 438–452 русского перевода; [24], стр. 419 и 479–481 русского перевода; [29]). Системы HIP, HSP, $HSUP$, $HLUP$ суть соответствующие аналоги системы М. Пресбургера. Система $HLUP$ рассмотрена в [40] и [41], система $HSUP$ – в [41] (в указанных статьях эти системы обозначены посредством $HLEP$ и $HSEP$). Мы будем рассматривать также системы $HSAD$ и $HSUAD$ в языках $L^*(Z_1)$ и $L(Z_1)$; эти системы получаются из систем, соответственно, HSA и $HSUA$ посредством добавления схемы аксиом двойственной симметрической реализуемости ("dual symmetric realizability"), рассмотренной в [39]. Система $HSAD$ введена и исследована в [39]. Система $HSUAD$ отличается лишь технически от системы $HSEAD$, рассмотренной в [41].

Введем понятие существенной неопределенности формул; это понятие является обобщением понятия формальной неопределенности формул, введенного в [3], стр. 264. Пусть Z – какая-либо сигнатура, $\Omega = (A_1, A_2, \dots)$ – система аксиом в языке $L(Z)$ (или $L^*(Z)$), рассматриваемая на основе какого-либо предикатного исчисления Γ из числа исчислений, введенных выше. Будем говорить, что формула B в языке $L(Z)$ (или $L^*(Z)$) является *существенно неопределенной* в Ω относительно Γ (или существенно Γ-неопределенной в Ω), если добавление замыкания всеобщности формулы B к системе Ω в качестве новой аксиомы приводит к Γ-противоречивой системе, и к такому же результату приводит добавление к системе Ω отрицания замыкания всеобщности формулы B в качестве новой аксиомы. В [3], стр. 264, доказано, что формулы, обладающие указанным свойством, существуют в системе $HSAR^+$, рассмотренной в [3] (в статье [2] эта система обозначена посредством $HSAE$). В статье [39] доказано, что системы $HSAR^+$ и $HSAD$ эквивалентны; мы получаем, таким образом, что подобные формулы существуют в $HSAD$. Пример формулы, обладающей указанным свойством, может быть построен следующим образом. Пусть V и τ суть примитивно рекурсивные функции, участвующие в нормальной форме С. К. Клини ([11], стр. 120-121; [21]; [24], стр. 294 русского перевода; [28], стр. 266-267 русского перевода) для универсальной частично рекурсивной функции $\mathbf{U}$ ([11], стр. 122–123; [21]; [24], стр. 294 русского перевода; [28], стр. 266–267 русского перевода), а именно, следующее равенство имеет место для любых натуральных e и x

$$\mathbf{U}(e, x) = V(\mu z[\tau(e, x, z) = 0]);$$

тогда нижеследующая формула

$$\forall x(\exists z(\tau(x, x, z) = 0) \vee \neg\exists z(\tau(x, x, z) = 0))$$

является существенно неопределенной в $HSAD$ и $HSAR^{+}$ ([3, стр. 264]). Кроме того, можно привести следующий простой пример существенно неопределенной формулы: если Ω есть одна из систем $HLUA$, $HSUA$, $HLUP$, $HSUP$, $HSUAD$, то формула U является существенно неопределенной в Ω относительно соответствующего исчисления (в самом деле: если мы добавим к Ω формулу U или, соответственно, $\neg U$ в качестве новой аксиомы, то из логических аксиом HLU_{24} или, соответственно, HLU_{25} немедленно получим противоречие). Напротив, если Ω – одна из систем HSA, HLA, HIA, HKA, HSP, HLP, HIP, HKP, то формула, существенно неопределенная в Ω относительно соответствующего исчисления, заведомо не может существовать. В самом деле, все указанные системы могут рассматриваться как подсистемы классической арифметики HKA. Но для каждой системы аксиом Ω в классическом исчислении предикатов справедливо следующее утверждение: если добавление замкнутой формулы A к системе Ω в качестве новой аксиомы приводит к противоречивой системе, то формула $\neg A$ может быть выведена из Ω при помощи правила "reductio ad absurdum" (см., например, [24], стр. 91 русского перевода). Поэтому, если бы имелась формула, существенно неопределенная в HKA (или в какой-либо подсистеме HKA), то система HKA оказалась бы противоречивой, но, как хорошо известно, это не так.

Будем рассматривать кодирование формул, термов и логических выводов посредством натуральных чисел ([21]; [23], том 2, стр. 265–271 русского перевода; [24], стр. 221–231 русского перевода; [28], стр. 151–157 русского перевода). Числовой код формулы, терма или логического вывода будем называть, как обычно, "геделевым номером" соответствующей формулы, терма или логического вывода. Мы будем рассматривать лишь такие способы кодирования объектов указанного рода, для которых существуют примитивно рекурсивные функции Num, Neg, Sub, обладающие следующими свойствами:

(1) Если k есть натуральное число, то $\mathrm{Num}(k)$ есть геделев номер терма k^{*}.

(2) Если k есть геделев номер формулы A, то $\mathrm{Neg}(k)$ есть геделев номер формулы $\neg A$.

(3) Если число k есть геделев номер формулы (или терма) A, число l есть геделев номер предметной переменной x, число m

есть геделев номер терма s, то $\mathrm{Sub}(k,l,m)$ есть геделев номер формулы (или терма) $\mathrm{Subst}(A,x,s)$.

Существование способов кодирования, обладающих указанными свойствами, следует очевидным образом из результатов, приведенных в [21, 23, 24, 28].

Примитивно рекурсивные функции Num, Neg, Sub будут использоваться в разделе 8.

Пусть Γ – одно из предикатных исчислений, введенных выше, Z – какая-либо сигнатура. Будем говорить, что система аксиом $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ в языке $L(Z)$ (или $L^*(Z)$) Γ-перечислима (при данном фиксированном способе кодирования формул посредством натуральных чисел), если множество геделевых номеров формул, принадлежащих Γ-теории, основанной на Ω, рекурсивно перечислимо ([21, 24, 26, 28]).

Если Γ есть HLU или HL, то вместо „Γ-перечислимость“ будем иногда говорить „Luk-перечислимость“ (напомним, что, в силу теоремы 3.2, понятие Luk-теории, основанной на системе аксиом Ω, равносильно понятию HLU-теории или HL-теории, основанной на Ω, – смотря по тому, в каком языке задана система аксиом Ω).

Пусть Z – какая-либо сигнатура, $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ – система аксиом в языке $L(Z)$ (или $L^*(Z)$), рассматриваемая на основе какого-либо предикатного исчисления Γ из числа исчислений, введенных выше. Будем говорить, что система Ω *эффективно* Γ*-неполна*, если для каждого Γ-перечислимого Γ-непротиворечивого расширения Ω_1 системы Ω может быть эффективно указана замкнутая формула A в языке системы Ω_1, такая что ни формула A, ни формула $\neg A$, ни формула $(A \supset \neg A)\&(\neg A \supset A)$ не являются Γ-следствиями системы Ω_1.

Если Γ есть одно из исчислений HLU и HL, то вместо "эффективной HLU- или HL-неполноты" будем иногда говорить об "эффективной Luk-неполноте" системы Ω.

Теорема 4.1. *Пусть Z – какая-либо сигнатура, $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ – система аксиом в языке $L(Z)$ (или $L^*(Z)$), рассматриваемая на основе одного из исчислений Γ, введенных выше. Тогда любая замкнутая формула B в языке системы Ω является существенно неопределенной в Ω в том, и только том случае, когда формула $(B \supset \neg B)\&(\neg B \supset B)$ является Γ-следствием системы Ω.*

Теорема 4.2. *Пусть Z – какая-либо сигнатура, $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ – система аксиом в языке $L(Z)$ (или $L^*(Z)$), рассматриваемая на основе исчисления Γ из числа исчислений, введенных выше. Тогда все замкнутые формулы, существенно неопределенные в Ω, Γ – эквивалентны друг другу относительно Ω.*

Следствие. *Формула $\forall x(\exists z(\tau(x,x,z)=0) \vee \neg\exists z(\tau(x,x,z)=0))$, рассмотренная выше, HSU-эквивалентна U относительно системы $HSUAD$.*

Теорема 4.3. *Системы $HSUA$, $HLUA$, $HSUAD$ являются эффективно HSU-неполными; системы HSA, HLA, $HSAD$ являются эффективно HS-неполными.*

Следствие. *Системы HLA и $HLUA$ являются эффективно Luk-неполными.*

Теорема 4.4. *Системы $HSUP$ и $HLUP$ эквивалентны и Luk-полны.*

Замечание Формулировки теорем 4.1 и 4.2 для случаев, когда исчисление Γ есть HK или HI, в определенном смысле тривиальны, поскольку в этом случае существенно Γ-неопределенные формулы в Ω, так же, как Γ-следствия из Ω вида $(B \supset \neg B) \& (\neg B \supset B)$ могут существовать лишь в случае Γ-противоречивой системы Ω. Теорема 4.3 и ее следствие соответствуют теореме 1 из [41]; заметим, что определение эффективной Luk-неполноты, данное выше, в некоторых технических деталях отличается от определения эффективной Luk-неполноты из [41].

Доказательства теорем 4.1 и 4.2 будут даны ниже в разделе 7, доказательство теоремы 4.3 и ее следствия – в разделе 8, доказательство теоремы 4.4 – в разделе 9.

5. Дедуктивные свойства логических исчислений

Напомним некоторые свойства выводов в исчислениях HS, HSU, HL, HLU, установленные в [3, 37, 38]. Символ $\vdash$ всюду в этом разделе будет обозначать выводимость в исчислении HS. Однако все утверждения о выводимости, устанавливаемые в этом разделе, справедливы также для исчислений HSU, HL, HLU.

Посредством Π мы будем обозначать любой список предикатных формул A_1, $A_2, \ldots, A_n$ (возможно, пустой).

Рассмотрим правила введения и удаления логических операций для исчисления HS. Эти правила аналогичны правилам введения и удаления, рассмотренным в [24] на стр. 91–94 русского перевода; однако в связи с общим принципом симметрии между конструктивной истинностью и конструктивной ложностью, принятым за основу в симметрической конструктивной логике, для исчисления HS рассматриваются не только правила введения и удаления логических операций (например, правила $\supset$-введения, правила $\supset$-удаления и т.п.), но и правила введения и удаления отрицаний логических операций (например, правило $\neg\supset$-введения, правила $\neg\supset$-удаления и т.п.). Вводимые ниже правила также и в техническом отношении отличаются от аналогичных правил из [24]; а именно, в силу технических особенностей рассматриваемых исчислений (таких, как наличие в них единственного правила вывода modus ponens), в правилах, вводимых ниже, отсутствуют ограничения, связанные с так называемой "варьируемостью переменных в выводах" ([24, стр. 88-89 русского перевода]). В исчислении HS имеют место следующие правила указанного рода.

(1) Правила $\supset$-введения для исчисления HS вводятся следующим образом. Во-первых – это три формы теоремы дедукции ([3, стр. 106]): если $\Pi,\ A \vdash B$, то $\Pi \vdash A \supseteq B$ (1-я форма); если $\Pi,\ A \vdash B$ и $\Pi,\ \neg B \vdash \neg A$, то $\Pi \vdash A \supset B$ (2-я форма); если $\Pi,\ A \vdash B$, то $\Pi,\ A \vee \neg A \vdash B$ (3-я форма). Во-вторых, в исчислении HS имеет место следующее правило $\supset$-введения: $A \supseteq B,\ \neg B \supseteq \neg A \vdash A \supset B$ ([3], стр. 103). Теорема дедукции в ее традиционной форме ([24], стр. 84-91 русского перевода) (если $\Pi,\ A \vdash B$, то $\Pi \vdash A \supset B$), вообще говоря, не имеет места в исчислениях HS, HL, HSU, HLU.

(2) Правила $\supset$-удаления для исчисления HS вводятся следующим образом: $A,\ A \supset B \vdash B$; $A,\ A \supseteq B \vdash B$; $A \supset B \vdash A \supseteq B$; $A \supset B \vdash \neg B \supseteq \neg A$ (они следуют из правила modus ponens и из схем HS_1, HS_5).

3) Правило $\neg\supset$-введения: $A,\ \neg B \vdash \neg(A \supset B)$ ([3], стр. 104, выводимость $\{32\}$).

4) Правила $\neg\supset$-удаления: $\neg(A \supset B) \vdash A$; $\neg(A \supset B) \vdash \neg B$ ([3], стр. 104, выводимости[1] $\{30\}$ и $\{31\}$).

(5) Правило &-введения: $A,\ B \vdash A\&B$ ([3], стр. 103, выводи-

[1]В формулировке выводимости $\{30\}$ из [3], стр. 104 имеется досадная опечатка: последний знак отрицания перед A нужно опустить.

мость $\{12\}$).

(6) Правила &-удаления: $A\&B \vdash A$, $A\&B \vdash B$ (следуют из HS_8 и HS_9).

(7) Правила $\neg$&-введения: $\neg A \vdash \neg(A\&B)$; $\neg B \vdash \neg(A\&B)$ (вытекает из [3], стр. 105, выводимости $\{13\} - \{14\}$, стр. 107, выводимости $\{34\} - \{40\}$; стр. 109, выводимости $\{45\}$, $\{46\}$).

(8) Правило $\neg$&-удаления: если Π, $\neg A \vdash C$, и Π, $\neg B \vdash C$, то Π, $\neg(A\&B) \vdash C$ (вытекает из [3], стр. 111, лемма 7.15, и из выводимостей $\{45\}$, $\{46\}$ на стр. 109).

(9) Правила $\vee$-введения: $A \vdash A \vee B$; $B \vdash A \vee B$ (следуют из HS_{11} и HS_{12}).

(10) Правило $\vee$-удаления: если Π, $A \vdash C$ и Π, $B \vdash C$, то Π, $A \vee B \vdash C$ ([3], стр. 111, лемма 7.15).

(11) Правило $\neg\vee$-введения: $\neg A$, $\neg B \vdash \neg(A \vee B)$ ([3], стр. 103, выводимость $\{12\}$; стр. 109, выводимости $\{45\}$, $\{46\}$).

(12) Правила $\neg\vee$-удаления: $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$; $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$ ([3], стр. 103, выводимости $\{9\}$, $\{10\}$; стр. 109, выводимости $\{45\}$, $\{46\}$).

(13) Правило $\neg$-введения („правило контрапозиции“): $A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$ (следует из HS_5). В литературе иногда „правилом $\neg$-введения“ называют правило “reductio ad absurdum” (если Π, $A \vdash B$ и Π, $A \vdash \neg B$, то $\Pi \vdash \neg A$) (см., например, [24], стр. 91 русского перевода), однако такое правило, вообще говоря, не имеет места в HS, HSU, HL, HLU. В дальнейшем мы рассмотрим некоторую модификацию этого правила.

(14) Правило $\neg$-удаления („правило противоречия“): A, $\neg A \vdash B$ ([3], стр. 104, выводимость $\{29\}$).

(15) Правило $\neg\neg$-введения („правило введения двойного отрицания“): $A \vdash \neg\neg A$ (следует из HS_6).

(16) Правило $\neg\neg$-удаления („правило удаления двойного отрицания“): $\neg\neg A \vdash A$ (следует из HS_7).

(17) Правило $\forall$-удаления: $\forall x(A) \vdash \mathrm{Subst}(A, x, s)$ (следует из HS_{14}).

(18) Правило $\neg\forall$-введения: $\mathrm{Subst}(\neg A, x, s) \vdash \neg\forall x(A)$ ([3], стр.104, выводимость $\{20\}$; стр. 109, выводимость $\{48\}$).

(19) Правило $\exists$-введения: $\mathrm{Subst}(A, x, s) \vdash \exists x(A)$ (следует из HS_{17}).

(20) Правило $\neg\exists$-удаления: $\neg\exists x(A) \vdash \mathrm{Subst}(\neg A, x, s)$ ([3], стр.103, выводимость $\{16\}$; стр. 109, выводимость $\{47\}$).

(21) Правило $\forall$-введения: если $\Pi \vdash A$, и предметная переменная x не входит свободно ни в одну из формул списка Π, то $\Pi \vdash \forall x(A)$ ([3], стр. 108, лемма 7.8).

(22) Правило $\neg\exists$-введения: если $\Pi \vdash \neg A$, и предметная переменная x не входит свободно ни в одну из формул списка Π, то $\Pi \vdash \neg\exists x(A)$ ([3], стр. 109, выводимость {47}, а также указанное выше правило $\forall$-введения).

(23) Правило $\exists$-удаления: если Π, $A \vdash B$, и предметная переменная x не входит свободно ни в одну из формул списка Π, а также в формулу B, то Π, $\exists x(A) \vdash B$ ([3], стр. 111, лемма 7.14).

(24) Правило $\neg\forall$-удаления: если Π, $\neg A \vdash B$, и предметная переменная x не входит свободно в формулу B и не входит свободно ни в одну из формул списка Π, то Π, $\neg\forall x(A) \vdash B$ ([3], стр. 109, выводимость {48}, а также введенное выше правило $\exists$-удаления).

Приведем еще некоторые правила вывода в HS, используемые в дальнейшем. В HS имеют место законы де Моргана (это обстоятельство уже использовалось выше), а именно, выводимы следующие формулы: $\vdash \neg(A\&B) \sim (\neg A \vee \neg B)$; $\vdash \neg(A \vee B) \sim (\neg A\&\neg B)$; $\vdash \neg\forall x(A) \sim \exists x(\neg A)$; $\vdash \neg\exists x(A) \sim \forall x(\neg A)$. В исчислении HS имеют место следующие выводимости: $\vdash (A \supset A)$; $(A \supset (B \supset C)) \vdash (B \supset (A \supset C))$; $(A \supset B)$, $(B \supset C) \vdash (A \supset C)$; $(A \supset (A \supset (A \supset B))) \vdash (A \supset (A \supset B))$. Эти выводимости устанавливаются в [3], стр. 103–104. Отметим, что выводимость $A \supset (A \supset B) \vdash A \supset B$, вообще говоря, не имеет места в HS, HSU, HL, HLU. Правила и выводимости, указанные выше, имеют место также в HK и HI, за исключением правила $\neg(A \supset B) \vdash A$, правила $\neg\&$-удаления, правила $\neg\neg A \vdash A$, правила $\neg\forall$-удаления, законов де Моргана $\neg(A\&B) \sim (\neg A \vee \neg B)$ и $\neg\forall x(A) \sim \exists x(\neg A)$, которые, как легко видеть, имеют место в HK, но не в HI. Отметим, вместе с тем, что выводимость $(A \supset (A \supset B)) \vdash (A \supset B)$ имеет место в HK и HI (в силу HK_4 и HI_4), а потому теорема дедукции в традиционной форме имеет место в HK и HI (если $\Pi, A \vdash B$, то $\Pi \vdash A \supset B$).

Правило "reductio ad absurdum", как уже говорилось, в его традиционной форме (если Π, $A \vdash B$ и Π, $A \vdash \neg B$, то $\Pi \vdash \neg A$), вообще говоря, не имеет места в HS, HSU, HL, HLU; однако аналогичное правило для слабого отрицания имеет место в указанных исчислениях; оно формулируется следующим образом: если Π, $A \vdash B$ и Π, $A \vdash \neg B$, то $\Pi \vdash \neg^{\circ} A$. Это правило фактически установлено в [3], однако его доказательство не дано в явном виде в [3]; поэтому мы приведем это доказательство здесь. В самом деле, пусть Π, $A \vdash B$ и Π, $A \vdash \neg B$. Для установления выводимости $\Pi \vdash (A \supset \neg A)$ достаточно установить, что $A \supseteq B$, $A \supseteq \neg B \vdash \neg^\circ A$, поскольку мы имеем $\Pi \vdash A \supseteq B$ и $\Pi \vdash A \supseteq \neg B$ в силу 1-й формы теоремы дедукции. На основании правила противоречия имеем:

$$A \supseteq B, A \supseteq \neg B, A \vdash \neg A,$$

следовательно,

$$A \supseteq B, A \supseteq \neg B \vdash A \supseteq \neg A. \tag{5.1}$$

С другой стороны, используя правило противоречия и правило удаления двойного отрицания, имеем:

$$A \supseteq B, A \supseteq \neg B, \neg\neg A \vdash \neg A,$$

следовательно,

$$A \supseteq B, A \supseteq \neg B \vdash \neg\neg A \supseteq \neg A. \tag{5.2}$$

Теперь, используя одно из правил $\supset$-введения, из (5.1) и (5.2) получаем:

$$A \supseteq B, A \supseteq \neg B \vdash A \supset \neg A.$$

Тем самым установлено правило "reductio ad absurdum" для слабого отрицания.

Пусть Z – какая-либо сигнатура, Ω – система аксиом в $L(Z)$ (или $L^*(Z)$) на основе исчисления HSU (соответственно, HS). Будем говорить, что формула A в $L(Z)$ (соответственно, $L^*(Z)$) Ω-*разрешима* (или, иначе говоря, "разрешима в Ω)", если формула $A \vee \neg A$ является HSU-следствием (соответственно, HS-следствием) системы Ω. Будем говорить, что формула A в $L(Z)$ (соответственно, $L^*(Z)$) Ω-*полуразрешима* (или, иначе говоря, "полуразрешима в Ω"), если формула A имеет вид $(\exists\exists)(B)$, где формула B Ω-разрешима. Нижеследующая лемма 5.1 фактически доказана в [3], (см. [3], стр. 54), однако соответствующий вывод в HS непосредственно не дан в [3], поэтому мы приводим доказательство ниже.

Лемма 5.1. *Пусть Z – какая-либо сигнатура, Ω – система аксиом в $L(Z)$ (или $L^*(Z)$) на основе исчисления HSU (соответственно, HS), и пусть A – какая-либо Ω-полуразрешимая формула. Тогда* *сильное и слабое отрицание формулы A HSU-эквивалентны (соответственно, HS-эквивалентны) относительно Ω.*

Доказательство. Мы рассмотрим лишь случай исчисления HS; для HSU доказательство аналогично. Пользуясь схемой HS_1, мы получаем немедленно, что $\vdash \neg A \supset \neg^\circ A$ в HS (для всякой формулы A в $L^*(Z)$). Для доказательства обратной импликации достаточно установить, что формулы $(A \supset \neg A) \supseteq \neg A$ и $\neg\neg A \supseteq \neg(A \supset \neg A)$ являются HS-следствиями системы Ω (здесь мы воспользовались одним из правил $\supset$-введения). Вторая из этих формул доказывается в HS (даже без помощи Ω) при помощи правила $\neg\supset$-введения. Для доказательства первой из этих формул напомним, что A имеет вид $(\exists\exists)(B)$, где формула $B \vee \neg B$ (и, следовательно, в силу правила $\forall$-введения, также и $(\forall\forall\forall)(B \vee \neg B)$) является HS-следствием из Ω; поэтому достаточно установить, что выводимость $(\forall\forall\forall)(B \vee \neg B),\ A \supset \neg A \vdash \neg A$ имеет место в HS. Но формула $\neg A$ имеет вид $\neg(\exists\exists)(B)$; используя соответствующий закон де Моргана, мы получаем, что эта формула эквивалентна в HS формуле $(\forall\forall)(\neg B)$, где группа кванторов $(\forall\forall)$ содержит кванторы общности по тем же переменным, какие имеются в группе кванторов $(\exists\exists)(B)$ в представлении A в виде $(\exists\exists)(B)$. Таким образом, достаточно доказать, что в HS имеет место выводимость $(\forall\forall\forall)(B \vee \neg B),\ A \supset \neg A \vdash (\forall\forall)(\neg B)$; согласно правилу $\forall$-введения, достаточно доказать $(\forall\forall\forall)(B\vee\neg B),\ A \supset \neg A \vdash \neg B$ в исчислении HS (напомним, что ни одна из переменных, входящих в группу кванторов $(\forall\forall)$ в выражении $(\forall\forall)(\neg B)$ не входит свободно в A). Но, в силу правила $\forall$-удаления, имеем $(\forall\forall\forall)(B \vee \neg B) \vdash B \vee \neg B$ в HS, а потому достаточно доказать выводимость $B \vee \neg B,\ A \supset \neg A \vdash \neg B$ в HS; для этого, в силу правила $\vee$-удаления, достаточно установить, что

$$B, A \supset \neg A \vdash \neg B;$$
$$\neg B, A \supset \neg A \vdash \neg B$$

в HS. Вторая из этих выводимостей тривиальна; первая из них получается на основании соотношения $B \vdash A$ и правила противоречия. Лемма доказана.

Лемма 5.2 (ср. [3], стр. 53). *Пусть Z – какая-либо сигнатура, Ω – система аксиом в $L(Z)$ (или $L^*(Z)$) на основе исчисления HSU (соответственно, HS). Если формулы A и B в $L(Z)$ (соответствен-*

но $L^*(Z)$) Ω-разрешимы, то формулы $(A\&B)$, $A \vee B)$, $(A \supset B)$, $\neg A$ также Ω-разрешимы.

Доказательство легко получается при помощи правил $\vee$-введения, $\vee$-удаления, а также правил введения и удаления соответствующих логических операций.

Лемма 5.3. *Пусть Z – какая-либо сигнатура, Ω – система аксиом в $L(Z)$ (или $L^*(Z)$) на основе исчисления HSU (соответственно, HS). Пусть A, B, C, D – какие-либо формулы в $L(Z)$ (соответственно, $L^*(Z)$), такие, что: (1) формула A является подформулой C; (2) формула D получается из формулы C посредством замены подформулы A формулой B; (3) формулы C и D не содержат кванторов по переменным, свободно входящим в A и B. Тогда $(A \sim B) \vdash (C \sim D)$ в исчислении HSU (соответственно, HS).*

Доказательство получается аналогично доказательствам леммы 7.15 и теоремы 7.4 из [3], стр. 108–109.

6. Преобразования предикатных формул и систем аксиом

В этом разделе мы дадим доказательства теорем 2.1, 3.1, 3.2. Нам потребуются некоторые вспомогательные понятия.

Пусть $p(x_1, x_2, \dots x_n)$ – n-местный трехзначный предикат на множестве M. *Классическим образом* предиката p будем называть пару классических двузначных предикатов $p^+(x_1, x_2, \dots x_n)$ и $p^-(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на M, таких что $p^+(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает значение “истина”, если $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2$, и принимает значение “ложь” в противном случае; предикат $p^-(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает значение “истина”, если $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, и принимает значение “ложь” в противном случае. Мы можем сказать, таким образом, что предикаты $p^+(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $p^-(x_1, x_2, \dots, x_n)$ описывают, так сказать, “область истинности” и “область ложности” первоначального трехзначного предиката $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Введенное определение относится также к случаю, когда p является трехзначным предикатом размерности 0, т.е. трехзначной логической константой. А именно, если p есть 2, то его классический образ (p^+, p^-) есть пара двузначных логических констант (“истина”, “ложь”), если p есть 1, то (p^+, p^-) есть (“ложь”, “ложь”), если p есть 0 то (p^+, p^-) есть (“ложь”, “истина”).

Пару классических n-местных предикатов на множестве M назовем *регулярной*, если эти предикаты ни в одной точке не принимают одновременно значения "истина". Ясно, что классический образ всякого трехзначного предиката всегда регулярен. Верно и обратное: если пара n-местных классических предикатов на M регулярна, то она является классическим образом некоторого трехзначного n-местного предиката на M.

Введем в рассмотрение некоторое соответствие между предикатными символами и парами предикатных символов, а именно, каждому предикатному символу p сопоставим пару различных предикатных символов p^+ и p^- (имеющих ту же размерность, что и p) таким образом, что пары символов, сопоставленные различным предикатным символам p, не имеют общих элементов.

Определим теперь операции $+$ и $-$ над предикатными формулами; результаты применения этих операций к предикатной формуле A будем обозначать соответственно через A^+ и A^-. Формулы A^+ и A^- определяются индуктивно посредством следующих соотношений (где D_0 – любая фиксированная замкнутая предикатная формула в языке L^*P):

1) Если A – элементарная формула вида $p(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ (где p – любой предикатный символ, s_1, $s_2, \ldots, s_n$ – любые термы), то формула A^+ есть $p^+(s_1, s_2, \ldots, s_n)$; формула A^- есть $p^-(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

2) $(B \& C)^+$ есть $(B^+ \& C^+)$; $(B \& C)^-$ есть $(B^- \vee C^-)$.

3) $(B \vee C)^+$ есть $(B^+ \vee C^+)$; $(B \vee C)^-$ есть $(B^- \& C^-)$.

4) $(\neg B)^+$ есть B^-; $(\neg B)^-$ есть B^+.

5) $(B \supset C)^+$ есть $((B^+ \supset C^+) \& (C^- \supset B^-))$; $(B \supset C)^-$ есть $(B^+ \& C^-)$.

6) $(\forall x(B))^+$ есть $\forall x(B^+)$; $(\forall x(B))^-$ есть $\exists x(B^-)$.

7) $(\exists x(B))^+$ есть $\exists x(B^+)$; $(\exists x(B))^-$ есть $\forall x(B^-)$.

8) T^+ есть $(D_0 \supset D_0)$; T^- есть $\neg(D_0 \supset D_0)$.

9) F^+ есть $\neg(D_0 \supset D_0)$; F^- есть $(D_0 \supset D_0)$.

10) U^+ есть $\neg(D_0 \supset D_0)$; U^- есть $\neg(D_0 \supset D_0)$.

Ясно, что операции $+$ и $-$ применимы ко всякой формуле в языке LP и преобразуют ее в формулу языка L^*P. Аналогичные операции $+$ и $-$ были введены и исследованы в [3] (см.[3], стр. 124–125).

Определим, далее, некоторые преобразования систем аксиом и их моделей.

Будем использовать в дальнейшем понятия классического распределения на сигнатуре Z, классической интерпретации предикатной формулы относительно рассматриваемого распределения, классической модели системы аксиом и т.д. По существу эти понятия хорошо известны ([21, 24, 28]), но мы будем использовать терминологию, аналогичную введенной выше для случая трехзначной логики. Классическое распределение на рассматриваемой сигнатуре Z на основе множества M определяется аналогично Luk-распределению, с той лишь разницей, что каждому n-местному предикатному символу из Z сопоставляется некоторый классический (т.е. двузначный) n-местный предикат M. Понятие классической интерпретации формулы относительно рассматриваемого классического распределения, классической модели системы аксиом, классического следствия из системы аксиом и т.д., вводятся аналогично соответствующим Luk-понятиям (разумеется, все такие понятия вводятся лишь для формул в языке L^*P).

Говорим, что формула A в L^*P тождественно истинна в классическом смысле, если классическая интерпретация формулы A относительно любого классического распределения на $Z_{\max}$ является всюду истинным классическим предикатом.

Пусть Z – какая-либо сигнатура; не нарушая общности, можем считать, что в сигнатуру Z не входят никакие предикатные символы вида p^+ и p^- для каких-либо предикатных символов p (если это условие нарушается, то его выполнение может быть обеспечено соответствующим переименованием предикатных символов). Посредством Z^+ будем обозначать сигнатуру, полученную из Z посредством замены каждого предикатного символа p соответствующими предикатными символами p^+ и p^-; функциональные символы в Z^+ остаются такими же, как в Z. Пусть $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ – система аксиом в $L(Z)$. *Классический образ* Ω^+ системы Ω определяется как система аксиом в $L^*(Z^+)$, состоящая из всех аксиом вида A_i^+ для всех A_i, принадлежащих Ω, и, кроме того, из всевозможных аксиом вида $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \neg(p^+(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& p^-(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ для всех предикатных символов p, принадлежащих Z.

Пусть δ – какое-либо Luk-распределение на сигнатуре Z. *Классический образ* $Class(\delta)$ Luk-распределения δ определяется как классическое распределение на сигнатуре Z^+, такое что интерпретации всех функциональных символов относительно этого классического распределения совпадают с их интерпретациями относительно Z, а интерпретации любых предикатных символов p^+ и p^- образуют классический образ интерпретации символа p относительно δ. Говорим, что классическое распределение γ на Z^+ является *регулярным*, если интерпретации символов p^+ и p^- относительно γ при любом n-местном предикатном символе p не являются одновременно истинными ни в какой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ясно, что классический образ всякого Luk-распределения является регулярным, и обратно: если классическое распределение на Z^+ регулярно, то оно является классическим образом некоторого Luk-распределения на Z.

Лемма 6.1. *Пусть Z – какая-либо сигнатура, A – формула в $L(Z)$, δ – Luk-распределение на Z. Тогда классический образ Luk-интерпретации формулы A относительно δ совпадает с парой классических интерпретаций формул A^+ и A^- относительно $Class(\delta)$.*

Доказательство. При помощи индукции по построению формулы A в $L(Z)$ легко устанавливается, что классические интерпретации формул A^+ и A^- относительно любого регулярного классического распределения на Z^+ (в частности, относительно $Class(\delta)$) не могут быть одновременно истинными ни в какой точке. В самом деле, для случая элементарной формулы A это утверждение немедленно следует из определений; индукционный переход по построению формулы A легко устанавливается на основании классических таблиц истинности для пропозициональных связок и классических определений кванторов общности и существования. Поэтому для любой формулы A в $L(Z)$ существует трехзначный предикат, такой, что его классический образ есть пара интерпретаций A^+ и A^- относительно $\mathrm{Class}(\delta)$. После этого снова посредством индукции по построению формулы A, с использованием трехзначных таблиц истинности в логике Я. Лукасевича и определений трехзначных кванторов, устанавливается, что указанный трехзначный предикат в точности совпадает с Luk-интерпретацией формулы A относительно δ. Этим завершается доказательство леммы.

Лемма 6.2. *Пусть Z – какая-либо сигнатура, $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ – система аксиом в $L(Z)$, δ – Luk-распределение на Z. Тогда δ является Luk-моделью системы Ω в том, и только в том случае, когда* $\mathrm{Class}(\delta)$ *является классической моделью системы Ω^+.*

Доказательство. Предположим, что δ является Luk-моделью системы Ω. Тогда все аксиомы A_i являются Luk-истинными относительно δ. На основании предыдущей леммы мы тогда можем заключить, что классические интерпретации всех формул A_i^+ относительно $\mathrm{Class}(\delta)$ принимают значение „истина“. Классические интерпретации дополнительных аксиом вида $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \neg(p^+(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& p^-(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ в системе Ω^+ относительно $\mathrm{Class}(\delta)$ также принимают значение „истина“, поскольку $\mathrm{Class}(\delta)$ регулярно. Таким образом, $\mathrm{Class}(\delta)$ является классической моделью системы Ω^+.

Теперь предположим, что $\mathrm{Class}(\delta)$ является классической моделью Ω^+. Тогда классические интерпретации всех аксиом вида A_i^+ относительно $\mathrm{Class}(\delta)$ принимают значение „истина“. На основании предыдущей леммы мы получаем, что Luk-интерпретация каждого A_i относительно δ есть 2, в противном случае интерпретация A_i^+ относительно $\mathrm{Class}(\delta)$ имела бы значение „ложь“ (как в случае, когда указанная Luk-интерпретация есть 1, так и в случае, когда она есть 0). Следовательно, δ является Luk-моделью системы Ω. Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Пусть Z – какая-либо сигнатура, $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ – система аксиом в $L(Z)$, B – формула в $L(Z)$. Тогда B является Luk-следствием системы Ω в том, и только в том случае, когда B^+ является классическим следствием системы Ω^+.*

Доказательство легко получается на основании предшествующих лемм.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть Z – какая-либо сигнатура, $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ – система аксиом в $L(Z)$. Используя лемму 6.3, мы получаем, что формула B^+ является классическим следствием системы Ω^+. Теперь на основании теоремы К. Гёделя–А. И. Мальцева о компактности в классическом исчислении предикатов мы получаем, что B^+ является классическим следствием некоторой конечной подсистемы Ω^+. Не нарушая общности, можем считать, что эта конечная подсистема Ω^+ содержит аксиомы A_1^+, $A_2^+, \ldots, A_m^+$ при некотором m и не содержит никаких других аксиом вида A_i^+. Теперь рассмотрим систему аксиом $\Omega' = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$ в языке $L(Z)$. Тогда система Ω'^+ в $L^*(Z^+)$ содержит все аксиомы, принадлежащие конечной подсистеме Ω^+, о которой речь шла выше; следовательно B^+ является классическим следствием системы Ω'^{+}. На основании леммы 6.3 мы получаем, что формула B является Luk-следствием системы $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$. Теорема доказана.

Введем теперь в рассмотрение некоторые операции, используемые при доказательстве теорем 3.1 и 3.2.

Операция ρ вводится следующим образом. Если A – любая формула в языке LP, n – любое натуральное число, то $\rho(n, A)$ определяется как конъюнкция всевозможных формул вида $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \neg(p^+(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& p^-(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ для всех предикатных символов p, входящих в A, и для всех p, имеющих индексы, не превосходящие n, в системе всех предикатных символов языка LP.

Операция O_n при всяком натуральном n определяется следующим образом: если A – любая формула A в LP, то $O_n(A)$ есть формула $\rho(n, A) \supset A^+$. Ясно, что для любой формулы A в LP формула $O_n(A)$ принадлежит L^*P.

Операции ρ и O_n фактически рассматривались в [3]; обозначение $\Omega(n, A)$ понимается в [3] в том же смысле, как только что введенное обозначение $O_n(A)$ (см. [3], стр. 125). Соответствующие определения из [3] даны фактически для формул из языка L^*P.

Лемма 6.4. *Формула A в языке LP тождественно Luk-истинна в том, и только в том случае, когда формула $O_n(A)$ тождественно истинна в классическом смысле для любого натурального n.*

Доказательство. Предположим, что формула A тождественно Luk-истинна. Возьмем любое натуральное n. Построим сигнатуру Z, которой принадлежат все функциональные и предикатные символы из A, а также все предикатные символы p, такие что p^+ и p^- входят в $\rho(n, A)$. Возьмем любое классическое распределение γ на Z^+. Тогда мы имеем: если классическая интерпретация $\rho(n, A)$ относительно γ принимает значение "ложь", то $O_n(A)$ классически истинна относительно γ. В противном случае, если $\rho(n, A)$ принимает значение "истина" относительно γ, то интерпретации относительно γ всех предикатных символов вида p^+ и p^-, входящих в $\rho(n, A)$, не могут одновременно принимать значение "истина" ни в одной точке. Поэтому мы можем указать регулярное классическое распределение γ' на Z^+, совпадающее с γ для всех предикатов вида p^+ и p^-, входящих в

$\rho(n, A)$. Классические интерпретации $O_n(A)$ относительно γ и γ' будут, очевидно, совпадать. Ввиду регулярности γ', существует Luk-распределение δ на Z, такое что $\gamma' = \mathrm{Class}(\delta)$. Но, по предположению, формула A Luk-истинна относительно δ, а потому, на основании леммы 6.1, мы получаем, что формула A^+ (и, следовательно, $O_n(A)$) классически истинна относительно γ' и γ. Таким образом, формула $O_n(A)$ тождественно истинна в классическом смысле.

Теперь предположим, что формула $O_n(A)$ тождественно истинна в классическом смысле. Пусть n – фиксированное натуральное число, Z – построенная выше сигнатура. Возьмем любое Luk-распределение δ на Z. Тогда формула $\rho(n, A)$ истинна в классическом смысле относительно $\mathrm{Class}(\delta)$ (поскольку $\mathrm{Class}(\delta)$ регулярно). Мы получаем, что $\rho(n, A)$ и $\rho(n, A) \supset A^+$ истинны в классическом смысле относительно $\mathrm{Class}(\delta)$, следовательно, формула A^+ также истинна в классическом смысле относительно $\mathrm{Class}(\delta)$. На основании леммы 6.1 заключаем, что формула A Luk-истинна относительно δ. Лемма доказана.

Лемма 6.5 (ср. теоремы 9.3 и 10.6 из [3], стр. 125 и 154). *Пусть n – любое натуральное число, A – любая формула в языке L^*P. Тогда формула A выводима в HS (соответственно, в HL) в том, и только в том случае, когда формула $O_n(A)$ выводима в HI (соответственно, HK).*

Доказательство фактически дано в [3], стр. 131–137, 146–150 (для HS), стр. 155–156 (для HL).

Лемма 6.6. *Пусть n – любое натуральное число, A – любая формула в языке LP. Тогда формула A выводима в HSU (соответственно, в HLU) в том, и только в том случае, когда формула $O_n(A)$ выводима в HI (соответственно, HK).*

Доказательство проводится таким же образом, как и доказательство предыдущей леммы; дополнительные случаи, связанные с логическими константами T, U, F, рассматриваются очевидным образом при помощи таких же методов, как и основные случаи, рассмотренные в [3].

Следствие. *Исчисления HSU и HLU являются консервативными расширениями исчислений, соответственно, HS и HL.*

В самом деле, если формула A в языке L^*P выводима в HSU (или HLU), то формула $O_n(A)$ при любом натуральном n выводима в HI (соответственно, HK) на основании леммы 6.6. Затем на основании леммы 6.5 получаем, что A выводима в HS (соответственно, HL).

Лемма 6.7. *Формула A в языке LP тождественно Luk-истинна в том, и только в том случае, когда она выводима в HLU.*

Доказательство. Легко проверить, что все аксиомы в исчислени HLU тождественно Luk-истинны, и правило modus ponens сохраняет свойство тождественной Luk-истинности формул. Следовательно, все формулы, выводимые в HLU, тождественно Luk-истинны. Пусть теперь формула A в языке LP тождественно Luk-истинна. На основании леммы 6.4 мы получаем, что формула $O_n(A)$ при любом n тождественно истинна в классическом смысле. Но тогда, используя теорему К. Гёделя о полноте классического исчисления предикаов, мы получаем, что формула $O_n(A)$ выводима в HK. Теперь на основании леммы 6.6 заключаем, что A выводима в HLU. Теорема доказана.

Следствие. *Формула A в языке L^*P тождественно Luk-истинна в том и только в том случае, когда она выводима в HL.*

Доказательство получается немедленно на основании леммы 6.7 и следствия леммы 6.6.

Замечание Лемма 6.7 и ее следствие фактически доказаны в [37].

Доказательство теоремы 3.1. Пусть Z – какая-либо сигнатура, и пусть система аксиом $\Omega = (A_1, A_2, \dots)$ в языке $L(Z)$ является HLU-непротиворечивой. Рассмотрим классический образ Ω^+ системы Ω и докажем, что система Ω^+ классически непротиворечива. В самом деле, предположим (чтобы придти к противоречию), что система Ω^+ классически противоречива. Тогда, пользуясь теоремой полноты для классического исчисления предикатов, мы можем заключить, что некоторая конечная подсистема системы Ω^+ классически противоречива и, следовательно, не имеет классической модели. Рассуждая таким же образом, как и в доказательстве теоремы 2.1, заключаем что система $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ при некотором m не имеет Luk-модели (при этом в точности воспроизводятся соответствующие шаги доказательства теоремы 2.1 для того случая, когда формула B есть логическая константа F). Возьмем теперь какую-либо замкнутую формулу D_0

в языке $L(Z)$ и построим формулы $(A_1\&A_2\&\ldots\&A_m) \supseteq (D_0 \supset D_0)$ и $(A_1\&A_2\&\ldots\&A_m) \supseteq \neg(D_0 \supset D_0)$. Легко проверить, что эти формулы являются тождественно Luk-истинными (в самом деле, ввиду отсутствия Luk-модели у системы аксиом $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$, значение формулы $(A_1\&A_2\&\ldots\&A_m)$ относительно любого Luk-распределения на Z есть 0 или 1, после этого утверждение относительно тождественной Luk-истинности указанных формул немедленно получается на основании таблицы истинности для импликации в логике Я. Лукасевича). Следовательно, на основании леммы 6.7 получается, что эти формулы выводятся в HLU. Но формула $(A_1\&A_2\&\ldots\&A_m)$ является HLU-следствием системы аксиом $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$; следовательно, формулы $(D_0 \supset D_0)$ и $\neg(D_0 \supset D_0)$ также являются HLU-следствиями этой системы аксиом, а потому они являются HLU-следствиями системы аксиом Ω. Это, однако, находится в противоречии с предположенными свойствами системы Ω (а именно, со свойством ее HLU-непротиворечивости). Тем самым мы показали, что система Ω^+ классически непротиворечива. Но тогда она имеет классическую модель γ. Очевидно, что модель γ регулярна, а потому существует Luk-распределение δ на Z, такое что $\gamma = \mathrm{Class}(\delta)$. На основании леммы 6.2 заключаем, что δ является Luk-моделью для Ω.

Рассмотрения для языка $L^*(Z)$ и исчисления HL в точности такие же. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Пусть Z – какая-либо сигнатура, $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ – система аксиом в языке $L(Z)$, B – формула в $L(Z)$. Предположим, что B является HLU-следствием системы Ω. Тогда существует логический вывод формулы B из аксиом системы Ω, т.е. такая конечная последовательность формул, в которой каждая формула либо является аксиомой A_i, либо является логической аксиомой исчисления HLU, либо получается из предшествующих формул посредством правила modus ponens; последняя формула этой последовательности есть B. Легко видеть, что все формулы, участвующие в указанном выводе, Luk-истинны относительно любой Luk-модели δ системы Ω. То же имеет место для B. Таким образом, формула B является Luk-следствием системы Ω.

Теперь предположим, что B является Luk-следствием системы Ω. На основании теоремы 2.1 заключаем, что B является Luk-следствием подсистемы $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ системы Ω при некотором

m. Построим формулу $(A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_m) \supseteq B$. Докажем, что она тождественно Luk-истинна. В самом деле, возьмем любое Luk-распределение δ на Z. Если δ является Luk-моделью системы $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$, то формула B, согласно предположению, Luk-истинна относительно δ, поэтому то же имеет место и для формулы $(A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_m) \supseteq B$. В противном случае формула $(A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_m)$ принимает относительно δ значение 0 или 1, а тогда, используя таблицы истинности импликации в логике Я. Лукасевича, получаем, что и в этом случае формула $(A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_m) \supseteq B$ Luk-истинна относительно δ. Значит, эта формула тождественно Luk-истинна. На основании леммы 6.7 заключаем, что она выводима в HLU. Но формула $(A_1 \& A_2 \& \ldots A_m)$ является HLU-следствием системы Ω, а потому формула B также является HLU-следствием системы Ω.

Аналогичное утверждение для языка $L^*(Z)$ и для исчисления HL устанавливается точно таким же образом. Теорема доказана.

7. Существенно неопределенные формулы

Доказательство теоремы 4.1. Пусть Z – какая-либо сигнатура, $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ – система аксиом в языке $L(Z)$ (или $L^*(Z)$) на основе некоторого предикатного исчисления Γ из числа исчислений, рассмотренных выше, B – замкнутая формула в $L(Z)$ (соответственно, $L^*(Z)$). Предположим, что формула B существенно неопределенна в Ω. Тогда системы аксиом $(B, A_1, A_2, \ldots)$ и $(\neg B, A_1, A_2, \ldots)$ противоречивы в исчислении Γ. Но тогда системы $(B, A_1, A_2, \ldots, A_m)$ и $(\neg B, A_1, A_2, \ldots, A_m)$ при некотором m также противоречивы в Γ. Обозначим список $A_1, A_2, \ldots, A_m$ через Π. В силу правила противоречия (имеющего место во всех рассмотренных исчислениях) получаем, что $\Pi,\ B \vdash D$, $\Pi,\ B \vdash \neg D$, $\Pi,\ \neg B \vdash D$, $\Pi,\ \neg B \vdash \neg D$ для любой фиксированной формулы D в $L(Z)$ (соответственно, $L^*(Z)$). Используя правило "reductio ad absurdum" для слабого отрицания (также имеющего место во всех рассмотренных исчислениях), получаем $\Pi \vdash \neg^\circ B$ и $\Pi \vdash \neg^\circ \neg B$. Если исчисление Γ есть HK или HI, то слабое отрицание $\neg^\circ$ можно заменить сильным отрицанием $\neg$, и мы немедленно получаем, что система Ω противоречива, а тогда в ней выводима любая формула. Если же Γ есть одно из исчислений HS, HSU, HL, HLU, то, поскольку имеют место выводимости $\Pi \vdash B \supset \neg B$ и $\Pi \vdash \neg B \supset \neg\neg B$, то, ввиду выводимости $\neg\neg B \supset B$ во всех указанных исчислениях, мы имеем $\Pi \vdash B \supset \neg B$ и $\Pi \vdash \neg B \supset B$, а потому $\Pi \vdash (B \supset \neg B)\&(\neg B \supset B)$, что и требовалось.

Теперь предположим, что $(B \supset \neg B)\&(\neg B \supset B)$ есть Г-следствие системы Ω. Тогда формулы $B \supset \neg B$ и $\neg B \supset B$ также являются Г-следствиями системы Ω. Но тогда добавление как B, так и $\neg B$ к системе Ω в качестве новой аксиомы, очевидно, приводит к противоречивой системе. Следовательно, B существенно неопределенна в Ω относительно Г. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.2. Пусть Z – какая-либо сигнатура, $\Omega = (A_1, A_2, \ldots)$ – система аксиом в языке $L(Z)$ (или $L^*(Z)$) на основе некоторого предикатного исчисления Г из числа исчислений, рассмотренных выше; пусть B и C – замкнутые формулы в $L(Z)$ (соответственно, $L^*(Z)$), существенно неопределенные в Ω относительно Г. В точности таким же образом, как и в доказательстве теоремы 4.1, получаем, что $\Pi,\ B \vdash D$, $\Pi,\ B \vdash \neg D$, $\Pi,\ \neg B \vdash D$, $\Pi,\ \neg B \vdash \neg D$, $\Pi,\ C \vdash D$, $\Pi,\ C \vdash \neg D$, $\Pi,\ \neg C \vdash D$, $\Pi,\ \neg C \vdash \neg D$, где D – любая фиксированная формула в языке $L(Z)$ (соответственно, $L^*(Z)$), Π есть список $A_1, A_2, \ldots, A_m$ при некотором m. На основании правила противоречия мы получаем $\Pi,\ B \vdash C$ и $\Pi,\ \neg C \vdash \neg B$, а потому, на основании 1-й формы теоремы дедукции, имеем: $\Pi \vdash B \supseteq C$ и $\Pi \vdash \neg C \supseteq \neg B$, откуда $\Pi \vdash B \supset C$. Таким же образом получаем: $\Pi \vdash C \supset B$. Следовательно, $\Pi \vdash (B \supset C)\&(C \supset B)$, т.е. $\Pi \vdash B \sim C$. Теорема доказана.

В частности, если рассматриваемая система определена в языке $L(Z)$, и логическая константа U входит в язык исчисления Г, то все замкнутые формулы, существенно неопределенные в Ω относительно Г, эквивалентны U. Поэтому справедливо следствие из теоремы 4.2.

8. Преобразования арифметических формул

В этом разделе мы рассмотрим свойства систем формальной арифметики, введенных выше. Формулы в языке $L(Z_1)$ мы будем называть арифметическими формулами.

Введем в рассмотрение операцию θ над предикатными формулами и операции θ_1, σ^+, σ^- над арифметическими формулами. Операция θ определяется для любой предикатной формулы в языке L^*P и преобразует ее в предикатную формулу также в

L^*P. Эта операция вводится посредством следующих соотношений:

(1) Если A – элементарная формула, то $\theta(A)$ есть $\neg\neg^\circ A$.

(2) $\theta(A\&B)$ есть $\neg\neg^\circ(\theta(A)\&\theta(B))$.

(3) $\theta(A \vee B)$ есть $\theta(A) \vee \theta(B)$.

(4) $\theta(A \supset B)$ есть $\neg\neg^\circ(\theta(A) \supset \theta(B))$.

(5) $\theta(\neg A)$ есть $\neg\neg^\circ\neg(\theta(A))$.

(6) $\theta(\forall x(A))$ есть $\neg\neg^\circ\forall x(\theta(A))$.

(7) $\theta(\exists x(A))$ есть $\exists x(\theta(A))$.

Операция θ_1 определяется для любой формулы в языке $L^*(Z_1)$ и преобразует ее в формулу также в $L^*(Z_1)$; эта операция вводится посредством таких же соотношений (2)–(7), как и в определении операции θ; соотношение (1) в определении этой операции заменяется следующим: если A – элементарная формула, то $\theta_1(A)$ есть A.

Операции σ^+ и σ^- определяются для любой формулы в языке $L(Z_1)$ и преобразуют ее в формулу в $L^*(Z_1)$; эти операции вводятся посредством следующих соотношений:

(1) Если A – элементарная формула, не являющаяся логической константой, то $\sigma^+(A)$ есть A, $\sigma^-(A)$ есть $\neg A$.

(2) $\sigma^+(A\&B)$ есть $\sigma^+(A)\&\sigma^+(B)$; $\sigma^-(A\&B)$ есть $\sigma^-(A) \vee \sigma^-(B)$.

(3) $\sigma^+(A \vee B)$ есть $\sigma^+(A) \vee \sigma^+(B)$; $\sigma^-(A \vee B)$ есть $\sigma^-(A)\&\sigma^-(B)$.

(4) $\sigma^+(A \supset B)$ есть $(\sigma^+(A) \supset \sigma^+(B))\&(\sigma^-(B) \supset \sigma^-(A))$; $\sigma^-(A \supset B)$ есть $\sigma^+(A)\&\sigma^-(B)$.

(5) $\sigma^+(\neg A)$ есть $\sigma^-(A)$; $\sigma^-(\neg A)$ есть $\sigma^+(A)$.

(6) $\sigma^+(\forall x(A))$ есть $\forall x(\sigma^+(A))$; $\sigma^-(\forall x(A))$ есть $\exists x(\sigma^-(A))$.

(7) $\sigma^+(\exists x(A))$ есть $\exists x(\sigma^+(A))$; $\sigma^-(\exists x(A))$ есть $\forall x(\sigma^-(A))$.

(8) $\sigma^+(T)$ есть $0 = 0$; $\sigma^-(T)$ есть $1 = 0$.

(9) $\sigma^+(F)$ есть $1 = 0$; $\sigma^-(F)$ есть $0 = 0$.

(10) $\sigma^+(U)$ есть $1 = 0$; $\sigma^-(U)$ есть $1 = 0$.

Операция θ введена и исследована в [3]; операция θ_1 определена в [38] (там она обозначена посредством θ). Операции σ^+ и σ^- рассмотрены в [4, 38, 39]; их можно рассматривать как модификации операций $+$ и $-$ (см. раздел 6), приспособленные для преобразования арифметических формул. Эти операции применяются в [4] и [39] в качестве операций, при помощи которых дается определение симметрической конструктивной истинности арифметических формул посредством сведения его к истинности формул в традиционной конструктивной или интуиционистской (Гейтинговской) арифметике.

Лемма 8.1 (ср. теоремы 9.1 и 10.4 из [3], стр. 125, стр. 154). *Пусть A – любая формула в L^*P. Тогда формула A выводима в HI (соответственно, HK) в том, и только в том случае, когда формула $\theta(A)$ выводима в HS (соответственно, HL).*

Доказательство дано в [3], стр. 126–129, 137–141 (для HI), стр.155–156 (для HK).

Замечание. В лемме 8.1 фактически установлено, что операция θ может рассматриваться как операция, обратная (в определенном смысле) по отношению к операции O_n. А именно, согласно леммам 6.5 и 6.6 операция O_n (при любом n) является погружающей операцией из HSU в HI, из HS в HI, из HLU в HK, из HL в HK в том смысле, что любая предикатная формула выводима в исходном исчислении HSU, HS, HLU, HL в том, и только в том случае, когда формула, преобразованная посредством O_n, выводима соответственно в HI, HI, HK, HK. Согласно лемме 8.1, операция θ осуществляет обратное погружение, а именно, любая предикатная формула выводима в исходном исчислении HI или HK в том, и только в том случае, когда формула, преобразованная посредством θ, выводима соответственно в HS или HL. Отметим, что суперпозиция операций θ и O_n, переводящая всякую формулу A из $L(Z)$ в формулу $\theta(O_n(A))$, является погружающей операцией из HSU в HS и из HLU в HL. Однако это вовсе не значит, что формулы A и $\theta(O_n(A))$ в этом случае эквивалентны; легко проверить, что, например, если A есть логическая константа U, то ни формула A, ни формула $\theta(O_n(A))$ не выводимы в соответствующих исчислениях, но они не будут эквивалентными в этих исчислениях. Точно так же формулы A и $O_n(\theta(A))$, вообще говоря, не эквивалентны в соответствующих исчислениях.

Теперь рассмотрим некоторые погружающие операции из одних арифметических систем в другие. Нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения, касающиеся арифметических систем. В нижеследующих леммах 8.2–8.7 символ $\vdash$ будет обозначать выводимость в системах HSA или HSP, однако все утверждения, устанавливаемые ниже для HSA (или HSP), справедливы также для HLA, $HSUA$, $HLUA$ (соответственно, HLP, $HSUP$, $HLUP$).

Будем использовать следующие сокращенные обозначения (ср. [3], стр. 69; [24], стр. 169 русского перевода): посредством $(x \leqslant y)$ будем обозначать формулу $\exists z(x + z = y)$, посредством $(x < y)$ – формулу $(x \leqslant y)\&\neg(x = y)$, посредством $(x \geqslant y)$ – формулу $(y \leqslant x)$, посредством $(x > y)$ – формулу $(y < x)$. Ограниченные кванторы $\forall x_{x \leqslant y}(A)$, $\forall x_{x<y}(A)$, $\exists x_{x \leqslant y}(A)$, $\exists x_{x<y}(A)$ определяются, соответственно, следующим образом: $\forall x((x \leqslant y) \supseteq A)$, $\forall x((x < y) \supseteq A)$, $\exists x((x \leqslant y)\&A)$, $\exists x((x < y)\&A)$.

Лемма 8.2. *Формулы $x = y$, $x \leqslant y$, $x < y$, $x \geqslant y$, $x > y$ разрешимы в HSA и HSP.*

Доказательство фактически дано в [3], стр. 65–66, стр. 70–71.

Следствие. *Каждая элементарная формула вида $t = s$ в $L^*(Z_1)$ (или $L^*(Z_2)$) разрешима в HSA (соответственно, в HSP).*

Лемма 8.3. *Если формула A в $L^*(Z_1)$ разрешима в HSA (или в HSP), то формулы $\forall x_{x \leqslant y}(A)$, $\forall x_{x<y}(A)$, $\exists x_{x \leqslant y}(A)$ также разрешимы в HSA (соответственно, в HSP).*

Доказательство фактически дано в [3], стр. 71.

Лемма 8.4. *Формула $\forall x(x \geqslant k^* \vee x = 0 \vee x = 1 \vee \cdots \vee x = (k-1)^*)$ выводима в HSA и HSP для любого положительного натурального числа k.*

Доказательство легко проводится аналогично классической арифметике (ср. например, [24], стр. 170 русского перевода) при помощи $\vee$-удаления, $\vee$-введения, схемы аксиом индукции и содержательной индукции по k.

Лемма 8.5. *Пусть t и s – термы в языке $L^*(Z_1)$ (или $L^*(Z_2)$), A и B – формулы в $L^*(Z_1)$ (соответственно, $L^*(Z_2)$), такие что B получается из A заменой некоторого вхождения терма t термом s, и формулы A и B не содержат кванторов относительно предметных переменных, входящих в t и s. Тогда в исчислении HSA (соответственно, HSP) имеет место выводимость $t = s \vdash A \sim B$.*

Доказательство проводится очевидным образом на основании аксиом равенства аналогично доказательству леммы 5.3.

Лемма 8.6. *Пусть A – формула в языке $L^*(Z_1)$ (или $L^*(Z_2)$), k – натуральное число, x – предметная переменная, не имеющая связанных вхождений в A; посредством A_i, где i – натуральное число,* *обозначается формула* $\mathrm{Subst}(A, x, i^*)$. *Тогда в исчислении* HSA *(соответственно,* HSP*) имеет место выводимость* $A_0, A_1, \dots, A_k \vdash \forall x((x \leqslant k^*)) \supseteq A)$.

Доказательство получается очевидным образом на основании лемм 8.4 и 8.5 аналогично классической арифметике (ср. [24], стр. 178–179 русского перевода).

Лемма 8.7. *Пусть* t *– терм в* $L^*(Z_1)$*, содержащий только переменные* $x_1, x_2, \dots, x_n$*; пусть* $k_1, k_2, \dots, k_n$ *– любые натуральные числа, и пусть* m *есть натуральное число, являющееся значением примитивно рекурсивной функции, выражаемой термом* t*, в точке* $(k_1, k_2, \dots, k_n)$*. Пусть* t^* *– терм, полученный посредством подстановки* $k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*$ *вместо всех вхождений, соответственно,* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *в терм* t*. Тогда в* HSA *имеют место выводимости* $\vdash t^* = m^*$ *и* $\vdash \neg(t^* = l^*)$ *для любого натурального* l*, такого что* $l \neq m$.

Доказательство. Если t есть терм вида $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где f – функциональный символ из Z_1, тогда доказательство выводимости $\vdash t^* = m^*$ получается аналогично классической арифметике при помощи индукции по процессу построения примитивно рекурсивных функций, (обозначаемых функциональными символами из Z_1) посредством операций суперпозиции и примитивной рекурсии; при этом используются аксиомы равенства. После этого в общем случае выводимость $\vdash t^* = m^*$ устанавливается на основании леммы 8.5. Наконец, выводимость $\vdash \neg(t^* = l^*)$ при $l \neq m$ устанавливается на основании следствия из леммы 8.2 аналогично классической арифметике.

Теперь рассмотрим некоторые свойства операций над арифметическими формулами.

Лемма 8.8 (ср. с леммой 9.6 из [3], стр. 130–131). *Если* A *– любая формула в* $L(Z_1)$ *(или* $L(Z_2)$*), то формула* $\neg(\sigma^+(A) \& \sigma^-(A))$ *выводима в* HIA *(соответственно, в* HIP*).*

Доказательство. Для случая элементарной формулы A доказательство получается непосредственно из определений; в общем случае требуемое утверждение получается посредством индукции по построению формулы A на основании соответствующих пунктов в определении σ^+ и σ^- и правил вывода в интуиционистской арифметике.

Лемма 8.9. *Если формула A в $L^*(Z_1)$ (или $L^*(Z_2)$) выводима в HIA (соответственно, HIP), то формула $\theta_1(A)$ выводима в HSA (соответственно, HSP).*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 9.4 из [3] (см. [3], стр. 127–129); для дополнительных случаев, связанных с наличием арифметических аксиом, доказательство получается аналогично основным случаям, рассмотренным в [3].

Лемма 8.10. *Если формула A в $L(Z_1)$ (или в $L^*(Z_1)$, $L(Z_2)$, $L^*(Z_2)$) выводима в $HSUA$ (соответственно, в HSA, $HSUP$, HSP), то $\sigma^+(A)$ выводима в HIA (соответственно, HIA, HIP, HIP).*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 9.7 из [3] (см. [3], стр. 131–137); для дополнительных случаев, связанных с наличием арифметических аксиом и логических констант, доказательство проводится теми же методами, что и рассмотрение основных случаев в [3].

Лемма 8.11. *Если A – любая формула в $L^*(Z_1)$ (или в $L^*(Z_2)$), то формулы $\sigma^+(\theta_1(A)) \sim A$ и $\sigma^-(\theta_1(A)) \sim \neg A$ выводимы в HIA (соответственно, в HIP).*

Доказательство проводится при помощи индукции по построению формулы A так же, как доказательство леммы 9.10 из [3], (см. [3], стр. 138–140).

Лемма 8.12. *Формула A в $L^*(Z_1)$ выводима в HIA в том, и только в том случае, когда формула $\theta_1(A)$ выводима в HSA.*

Доказательство. Если формула A выводима в HIA, то, на основании леммы 8.9, можем заключить, что формула $\theta_1(A)$ выводима в HSA. С другой стороны, если формула $\theta_1(A)$ выводима в HSA, то тогда, на основании леммы 8.10, можем заключить, что формула $\sigma^+(\theta_1(A))$ выводима в HIA, следовательно, в соответствии с лемой 8.11, мы получаем, что формула A выводима в HIA. Лемма доказана.

Лемма 8.13. *Если A – любая формула в $L(Z_1)$ (или в $L^*(Z_1)$), то формулы $\theta_1(\sigma^+(A)) \sim \neg\neg^\circ A$ и $\theta_1(\sigma^-(A)) \sim \neg\neg^\circ\neg A$ выводимы в $HSUA$ (соответственно, в HSA).*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 9.14 из [3], стр. 146–149; дополнительные случаи, связанные с наличием арифметических аксиом и логических констант, рассматриваются теми же методами, что и в указанном доказательстве из [3].

Лемма 8.14. *Формула A в $L(Z_1)$ (или в $L^*(Z_1)$) выводима в $HSUA$ (соответственно, HSA) в том, и только в том случае, когда формула $\sigma^+(A)$ выводима в HIA.*

Доказательство. Если формула A выводима в $HSUA$ (или в HSA), то на основании леммы 8.10 можем заключить, что формула $\sigma^+(A)$ выводима в HIA. Теперь предположим, что формула $\sigma^+(A)$ выводима в HIA. На основании леммы 8.9 получаем, что формула $\theta_1(\sigma^+(A))$ выводима в HSA; но тогда, в соответствии с леммой 8.13, мы получаем, что формула $\neg\neg^\circ A$ выводима в $HSUA$ (соответственно, в HSA). Далее, формула A выводима из $\neg\neg^\circ A$ в $HSUA$ и HSA на основании одного из правил $\neg\supset$-удаления. Таким образом, формула A выводима в $HSUA$ (соответственно, HSA). Лемма доказана.

Лемма 8.15. *Формула A в $L^*(Z_1)$ выводима в HKA в том, и только в том случае, когда формула $\theta_1(A)$ выводима в HLA.*

Лемма 8.16. *Формула A в $L(Z_1)$ (или $L^*(Z_1)$) выводима в $HLUA$ (соответственно, HLA) в том, и только в том случае, когда формула $\sigma^+(A)$ выводима в HKA.*

Доказательства этих лемм аналогичны доказательствам лемм 8.12 и 8.14; соответствующие утверждения, касающиеся схем аксиом HK_7, HLU_{21}, HL_{21}, устанавливаются таким же образом, как и утверждения, касающиеся других схем аксиом в доказательствах вышеупомянутых лемм.

Лемма 8.17. *Формула A в $L^*(Z_2)$ выводима в HIP (соответственно, HKP) в том, и только в том случае, когда формула $\theta_1(A)$ выводима в HSP (соответственно, HKP).*

Доказательство проводится таким же образом, как и доказательство леммы 8.12 (для HIP и HSP) и леммы 8.15 (для HKP и HLP).

Лемма 8.18. *Формула A в $L(Z_2)$ (или $L^*(Z_2)$) выводима в $HSUP$ (соответственно, в HSP) в том, и только в том случае, когда формула $\sigma^+(A)$ выводима в HIP.*

Доказательство проводится таким же образом, как и доказательство леммы 8.14.

Лемма 8.19. *Формула A в $L(Z_2)$ (или в $L^*(Z_2)$) выводима в $HLUP$ (соответственно, HLP) в том, и только в том случае, когда формула $\sigma^+(A)$ выводима в HKP.*

Доказательство проводится так же, как и доказательство леммы 8.16.

Следствие. *Система $HSUA$ (соответственно, $HSUP$, $HLUA$, $HLUP$) является консервативным расширением HSA (соответственно, HSP, HLA, HLP).*

Доказательство получается на основе предыдущих лемм, аналогично доказательству следствия леммы 6.6.

Лемма 8.20. *Системы HLP и HKP эквивалентны.*

Доказательство такое же, как и доказательство эквивалентности систем HLA и HKA ([3], теорема 17.1, стр. 237–238).

Замечание. В леммах 8.9–8.12 было установлено, что операция θ_1 является погружающей операцией из традиционной конструктивной (интуиционистской) арифметики и классической арифметики, соответственно, в симметрическую конструктивную арифметику и трехзначную арифметику. В леммах 8.10–8.16 было установлено, что операция σ^+ осуществляет обратное преобразование, а именно, она является погружающей операцией из симметрической конструктивной арифметики и трехзначной арифметики, соответственно, в традиционную конструктивную (интуиционистскую) арифметику и классическую арифметику. Тем самым устанавливается параллелизм в соотношениях между указанными арифметическими системами и дается еще одно подтверждение высказанному ранее положению о том, что симметрическая конструктивная логика так же соотносится с трехзначной логикой Я. Лукасевича, как традиционная конструктивная (интуиционистская) логика соотносится с классической логикой. Приведенные утверждения, касающиеся погружающих операций, сохраняют силу как для того случая, когда символ неопределенности участвует в рассматриваемых трехзначных системах, так и для того случая, когда он в эти системы не включен. Вместе с тем, свойства систем двух указанных видов (с включенным в них символом неопределенности и без него) существенно отличаются друг от друга. Например, система HLA эквивалентна классической арифметике HKA, система же $HLUA$ ей не эквивалентна.

Отметим также, что формула $\sigma^+(\theta_1(A))$ эквивалентна A в HIA (см. лемму 8.11), но формула $\theta_1(\sigma^+(A))$, вообще говоря, не эквивалентна A в HSA и $HSUA$; например, если A есть U, то $\theta_1(\sigma^+(A))$ есть $1 = 0$.

Luk-распределение δ на Z_1 (или Z_2) будем называть *стандартным*, если единственный предикатный символ $=$ в Z_1 (или Z_2) интерпретируется как обычный предикат равенства, а именно: $p(x, y) = 2$, если x и y совпадают как элементы основного множества распределения δ, и $p(x, y) = 0$ в противном случае. Очевидно, что каждое стандартное Luk-распределение может рассматриваться естественным образом как классическое распределение.

Лемма 8.21. *Если Luk-интерпретация формулы A в $L(Z_1)$ (или $L(Z_2)$) относительно стандартного Luk-распределения δ есть трехзначный предикат p, то пара классических интерпретаций формул $\sigma^+(A)$ и $\sigma^-(A)$ относительно δ (рассматриваемого как классическое распределение) является классическим образом предиката p.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 6.1 посредством индукции по процессу построения рассматриваемых формул.

Таким образом, интуитивная интерпретация операций σ^+ и σ^- может быть описана (в рамках трехзначной логики Я. Лукасевича и классической логики) следующим образом: $\sigma^+(A)$ и $\sigma^-(A)$ дают описание (средствами классической арифметики) области истинности и области ложности трехзначного предиката, выражаемого формулой A. Обратное преобразование, позволяющее построить формулу, выражающую какой-либо трехзначный предикат, исходя из заданных областей его истинности и ложности, может быть осуществлено на основании нижеследующей теоремы 8.1.

Теорема 8.1. *Пусть заданы формулы B и C в $L^*(Z_1)$, такие что формула $\neg(B \& C)$ выводима в HIA (или, соответственно, в HKA). Тогда можно построить формулу A в $L(Z_1)$, такую что формулы $(\sigma^+(A) \sim B)$ и $(\sigma^-(A) \sim C)$ выводимы в HIA (соответственно, в HKA).*

Доказательство. Формула A строится следующим образом[2]:

$$(\theta_1(B) \vee ((\theta_1(C) \supset U) \supset U))\&(\theta_1(C) \supset \neg\theta_1(C)).$$

В самом деле, на основании леммы 8.11 и эквивалентностей $\vdash (D \supset (1 = 0)) \sim \neg D$, $\vdash ((1 = 0) \supset D) \sim (0 = 0)$, $\vdash (D\&(0 = 0)) \sim D$, которые, очевидно, имеют место в HIA для любой формулы D, мы получаем, используя соответствующие пункты в определении операции σ^+, что в HIA формула $\sigma^+(A)$ эквивалентна формуле $(B \vee \neg\neg C)\&\neg C$, следовательно, формуле $B\&\neg C$. Но формула $\neg(B\&C)$ выводима в HIA; используя эту выводимость, мы получаем, что формула $B\&\neg C$ эквивалентна B в HIA; таким образом, формула $\sigma^+(A)$ эквивалентна B в HIA. Далее, на основании леммы 8.11, используя эквивалентности $\vdash (D\&(1 = 0)) \sim (1 = 0)$, $\vdash ((1 = 0) \vee D) \sim D$ в HIA, легко получаем, что формула $\sigma^-(A)$ эквивалентна C в HIA. Аналогичные утверждения для HKA получаются таким же образом, поскольку HIA является подсистемой HKA. Теорема доказана.

Теорема 8.1 дает весьма широкие возможности для построения формул, выражающих те или иные трехзначные арифметические предикаты; например, с помощью этой теоремы мы можем построить формулу в языке $L(Z_1)$, выражающую в системах $HSUA$ и $HLUA$ трехзначный одноместный предикат, истинный на нечетных простых числах, ложный на четных числах и неопределенный на остальных числах.

Доказательство теоремы 4.3. Мы дадим доказательство для системы HSA; для остальных систем, указанных в формулировке теоремы, рассуждения в точности такие же. Будем считать, что зафиксирован какой-либо способ кодирования формул, термов и логических выводов посредством натуральных чисел, такой, что для него выполнены условия, указанные в разделе 4. Будем использовать рассмотренные в разделе 4 примитивно рекурсивные функции Num, Sub, Neg.

Пусть Ω – система аксиом, являющаяся HS-перечислимым и HS-непротиворечивым расширением системы HSA. Обозначим через G множество геделевых номеров формул, принадлежащих HS-теории Δ, основанной на Ω. Поскольку система Ω

[2]К сожалению, имеются досадные опечатки в выражении для этой формулы в [38]; буквы Q в этом выражении следует заменить на G.

HS-перечислима, множество G рекурсивно перечислимо. Следовательно ([11, 21, 24, 26, 28]), можно построить примитивно рекурсивную функцию Ded, такую, что $x \in G$ в том, и только в том случае, когда $\exists y(\mathrm{Ded}(x, y) = 0)$.

Мы будем использовать конструкцию К. Гёделя–Дж. Россера ([21]; [23], том 2, стр. 342–348 русского перевода; [24], стр. 188 русского перевода; [28], стр. 161–164 русского перевода), модифицированную в соответствии со свойствами системы HSA. Пусть x, y, z – какие-либо различные предметные переменные, и пусть ξ – гёделев номер переменной x. Посредством $f\,\mathrm{Num}$, $f\,\mathrm{Sub}$, $f\,\mathrm{Neg}$, $f\,\mathrm{Ded}$ обозначим функциональные символы, выражающие примитивно рекурсивные функции, соответственно, Num, Sub, Neg, Ded в языке $L^*(Z_1)$. Рассмотрим формулу A, определяемую следующим образом:

$$\begin{gathered}\forall y((f\,\mathrm{Ded}(f\,\mathrm{Sub}(x, \xi^*, f\,\mathrm{Num}(x)), y) = 0) \\ \supseteq \exists z(z \leqslant y \& (f\,\mathrm{Ded}(f\,\mathrm{Neg}(f\,\mathrm{Sub}(x, \xi^*, f\,\mathrm{Num}(x))), z) = 0))).\end{gathered} \tag{4.3.1}$$

Пусть α – гёделев номер формулы A. Рассмотрим формулу B, получаемую из A посредством подстановки терма α^* в формулу A вместо всех свободных вхождений переменной x; формула B будет иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}\forall y((f\,\mathrm{Ded}(f\,\mathrm{Sub}(\alpha^*, \xi^*, f\,\mathrm{Num}(\alpha^*)), y) = 0) \\ \supseteq \exists z(z \leqslant y \& (f\,\mathrm{Ded}(f\,\mathrm{Neg}(f\,\mathrm{Sub}(\alpha^*, \xi^*, f\,\mathrm{Num}(\alpha^*))), z) = 0))).\end{gathered} \tag{4.3.2}$$

Мы докажем, что формула B удовлетворяет всем условиям теоремы, т.е. ни формула B, ни формула $\neg B$, ни формула $(B \supset \neg B)\&(\neg B \supset B)$ не принадлежат теории Δ.

Ясно, что B замкнута. Пусть β – гёделев номер формулы B. Имеем:

$$\beta = \mathrm{Sub}(\alpha, \xi, \mathrm{Num}(\alpha)). \tag{4.3.3}$$

Предположим (чтобы придти к противоречию), что B принадлежит теории Δ. Тогда $\beta \in G$, и можно построить натуральное число η, такое что $\mathrm{Ded}(\beta, \eta) = 0$. На основании (4.3.3) имеем:

$$\mathrm{Ded}(\mathrm{Sub}(\alpha, \xi, \mathrm{Num}(\alpha)), \eta) = 0,$$

отсюда, с помощью леммы 8.7, получаем, что формула

$$f\,\mathrm{Ded}(f\,\mathrm{Sub}(\alpha^*, \xi^*, f\,\mathrm{Num}(\alpha^*)), \eta^*) = 0 \tag{4.3.4}$$

выводима в HSA, а потому она принадлежит Δ. Далее, если B принадлежит Δ, то из (4.3.2) и (4.3.4) мы получаем, что формула

$$\exists z(z \leqslant \eta^* \& (f\,\mathrm{Ded}(f\,\mathrm{Neg}(f\,\mathrm{Sub}(\alpha^*, \xi^*, f\,\mathrm{Num}(\alpha^*))), z) = 0)) \tag{4.3.5}$$

также принадлежит Δ.

Поскольку B принадлежит Δ, формула $\neg B$ не может принадлежать Δ, ввиду HS-непротиворечивости системы Ω. Пусть γ – гёделев номер формулы $\neg B$. На основании определения функции Neg имеем:

$$\gamma = \mathrm{Neg}(\mathrm{Sub}(\alpha, \xi, \mathrm{Num}(\alpha))). \tag{4.3.6}$$

Но $\gamma \notin G$, следовательно, для любого натурального числа τ мы имеем $\neg(\mathrm{Ded}(\gamma, \tau) = 0)$, а тогда из (4.3.6) получаем

$$\neg(\mathrm{Ded}(\mathrm{Neg}(\mathrm{Sub}(\alpha, \xi, \mathrm{Num}(\alpha))), \tau) = 0) \tag{4.3.7}$$

для любого τ. В частности (4.3.7) имеет место при $\tau = 0, 1, 2, \ldots, \eta$. Пользуясь леммой 8.7, мы получаем, что формулы

$$\neg(f\,\mathrm{Ded}(f\,\mathrm{Neg}(f\,\mathrm{Sub}(\alpha^*\xi^*, f\,\mathrm{Num}(\alpha^*))), \tau^*) = 0) \tag{4.3.8}$$

выводимы в HSA при $\tau = 0, 1, 2, \ldots, \eta$.

Обозначим терм $f\,\mathrm{Ded}(f\,\mathrm{Neg}(f\,\mathrm{Sub}(\alpha^*, \xi^*, f\,\mathrm{Num}(\alpha^*))), z)$ посредством $\mathcal{Q}(z)$ (очевидно, что этот терм выражает некоторую примитивно рекурсивную функцию).

Из (4.3.5) и (4.3.8) мы получаем, что формула

$$\exists z(z \leqslant \eta^* \& \mathcal{Q}(z) = 0), \tag{4.3.9}$$

а также формулы

$$\neg(\mathcal{Q}(\tau^*) = 0) \tag{4.3.10}$$

при $\tau = 0, 1, 2, \ldots, \eta$ принадлежат теории Δ. Из (4.3.10), пользуясь леммой 8.5, мы заключаем, что формула

$$\forall z(z \leqslant \eta^* \supseteq \neg(\mathcal{Q}(z) = 0)) \tag{4.3.11}$$

также принадлежит теории Δ. Но теперь, на основании (4.3.9) и (4.3.11), мы закючаем, что $1 = 0$ принадлежит теории Δ. В самом деле, для установления выводимости

$$\exists z(z \leqslant \eta^* \& (\mathcal{Q}(z) = 0)), \forall z(z \leqslant \eta^* \supseteq \neg(\mathcal{Q}(z) = 0)) \vdash \quad 1 = 0$$

достаточно доказать, что

$$(z \leqslant \eta^*\&(\mathcal{Q}(z)=0)), \forall z(z \leqslant \eta^* \supseteq \neg(\mathcal{Q}(z)=0)) \vdash 1=0;$$

но эта последняя выводимость легко получается при помощи правил $\&-$, $\forall-$, $\neg-$ и $\supset$-удаления. Мы пришли к заключению, что система Ω HS-противоречива, но это не так. Тем самым доказано, что формула B не может принадлежать теории Δ.

Теперь предположим (чтобы придти к противоречию), что формула $\neg B$ принадлежит теории Δ. Тогда $\gamma \in G$, и можно указать натуральное число τ, такое что $\mathrm{Ded}(\gamma,\tau)=0$. На основании (4.3.6) имеем $\mathrm{Ded}(\mathrm{Neg}(\mathrm{Sub}(\alpha,\xi,\mathrm{Num}(\alpha))),\tau)=0$. Следовательно, формула

$$f\,\mathrm{Ded}(f\,\mathrm{Neg}(f\,\mathrm{Sub}(\alpha^*,\xi^*,\mathrm{Num}(\alpha^*))),\tau^*)=0 \tag{4.3.12}$$

или, используя обозначение $\mathcal{Q}$, формула

$$\mathcal{Q}(\tau^*)=0 \tag{4.3.13}$$

выводима в HSA на основании леммы 8.7. Но если $\neg B$ принадлежит теории Δ, то B не может принадлежать Δ вследствие HS-непротиворечивости системы Ω; таким образом, $\mathrm{Ded}(\beta,\eta)\neq 0$ для любого натурального η. На основании (4.3.3), имеем

$$\mathrm{Ded}(\mathrm{Sub}(\alpha,\xi,\mathrm{Num}(\alpha)),\eta)\neq 0 \tag{4.3.14}$$

для любого натурального η. Обозначим терм $f\,\mathrm{Ded}(f\,\mathrm{Sub}(\alpha^*,\xi^*, f\,\mathrm{Num}(\alpha^*)),y)$ посредством $R(y)$ (очевидно, что этот терм выражает некоторую примитивно рекурсивную функцию). Пользуясь леммой 8.7, из (4.3.14) получаем, что формула

$$\neg(R(\eta^*)=0) \tag{4.3.15}$$

выводима в HSA при любом η.

Теперь докажем, что следующая выводимость

$$y \geqslant \tau^* \vdash (R(y)=0) \supseteq \exists z(z \leqslant y\&(\mathcal{Q}(z)=0)) \tag{4.3.16}$$

имеет место в HSA. В самом деле, для установления (4.3.16) достаточно доказать, что

$$y \geqslant \tau^*, \quad R(y)=0 \vdash \exists z(z \leqslant y\&(\mathcal{Q}(z)=0));$$

для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что

$$y \geqslant \tau^*, \quad R(y) = 0 \vdash \tau^* \leqslant y \& (\mathcal{Q}(\tau^*) = 0,$$

но последняя выводимость получается очевидным образом на основании (4.3.13). Далее, формула (4.3.15) выводима в HSA при всяком натуральном η, в частности, при $\eta = 0, 1, \ldots, \tau - 1$. Мы можем заключить, что выводимость

$$y = \eta^* \vdash (R(y) = 0) \supseteq \exists z(z \leqslant y \& (\mathcal{Q}(z) = 0)) \tag{4.3.17}$$

имеет место в HSA при $\eta = 0, 1, \ldots, \tau - 1$. В самом деле, для установления (4.3.17), на основании леммы 8.5, достаточно доказать, что

$$\vdash (R(\eta^*) = 0) \supseteq \exists z(z \leqslant \eta^* \& (\mathcal{Q}(z) = 0)),$$

или

$$(R(\eta^*) = 0 \vdash \exists z(z \leqslant \eta^* \& (\mathcal{Q}(z) = 0)),$$

но эта выводимость получается очевидным образом из (4.3.15) при помощи правила противоречия.

Теперь, сочетая (4.3.16) и (4.3.17), мы получаем посредством правила $\vee$-удаления, что

$$\begin{gathered} y \geqslant \tau^* \vee y = 0 \vee y = 1 \vee \cdots \vee y \\ = (\tau - 1)^* \vdash (R(y) = 0) \supseteq \exists z(z \leqslant y \& (\mathcal{Q}(z) = 0)). \end{gathered} \tag{4.3.18}$$

Но формула $y \geqslant \tau^* \vee y = 0 \vee y = 1 \vee \cdots \vee y = (\tau - 1)^*$ выводима в HSA согласно лемме 8.4. Следовательно, формула $(R(y) = 0) \supseteq \exists z(z \leqslant y \& (\mathcal{Q}(z) = 0))$ выводима в HSA, так же, как и формула

$$\forall y((R(y) = 0) \supseteq \exists z(z \leqslant y \& (\mathcal{Q}(z) = 0))). \tag{4.3.19}$$

Однако формула (4.3.19) совпадает с B. Мы получили, таким образом, что формулы B и $\neg B$ принадлежат Δ, следовательно, система Ω HS-противоречива. Но это не так. Тем самым доказано, что формула $\neg B$ не принадлежит Δ.

Наконец, предположим (чтобы придти к противоречию), что формула $(B \supset \neg B) \& (\neg B \supset B)$ принадлежит Δ. Тогда формула $\neg B \supset B$ принадлежит Δ, так же, как и формула $\neg B \supset \neg\neg B$. Но формула $\neg B \supset \neg\neg B$ есть $\neg^\circ \neg B$. С другой стороны, формула $\neg B$ может быть преобразована (при помощи соответствующего закона де Моргана) к виду $\exists y(C)$, где формула C HSA-разрешима на основании леммы 8.2, следствия из этой леммы, леммы 5.2 и леммы 8.3. Следовательно, формула $\neg B$ HSA-полуразрешима. На основании леммы 5.1 мы приходим к заключению, что $\neg^{\circ}\neg B$ и $\neg\neg B$ эквивалентны в HSA. Поэтому формула $\neg\neg B$ принадлежит Δ, а тогда и B принадлежит Δ. Но такое допущение уже было рассмотрено выше и приведено к противоречию. Теорема доказана.

Следствие из теоремы 4.3 теперь устанавливается очевидным образом, поскольку доказательство теоремы 4.3 проходит также для систем HLA и $HLUA$, а понятия эффективной HLA-неполноты и эффективной $HLUA$-неполноты эквивалентны, как уже указывалось выше, понятию эффективной Luk-неполноты.

Замечание 1. Теоремы 4.1, 4.2, 4.3, так же, как и устанавливаемая ниже теорема 4.4, могут рассматриваться как теоремы конструктивной математики, доказательства этих теорем в метатеории находятся в рамках конструктивной логики (хотя сохраняют силу и в рамках классической логики). На основании некоторых особенностей доказательства теоремы 4.3 (например, вследствие применения в нем правила reductio ad absurdum) может создаться впечатление, что это доказательство проходит лиошь в рамках традиционной конструктивной (интуиционистской) логики, но не симметрической конструктивной логики. Однако это не так; доказательства всех указанных теорем проходят также и в рамках симметрической конструктивной логики (при некоторых естественных допущениях, касающихся способа кодирования формул, термов и логических выводов посредством натуральных чисел). В самом деле, правило reductio ad absurdum применяется в указанных доказательствах лишь в связи с суждениями вида "данная формула выводима в данном исчислении". Но предикаты "x есть геделев номер логического вывода в данном исчислении" и "x есть геделев номер заключительной формулы в логическом выводе y в данном исчислении" для естественных методов кодирования формул, термов и логических выводов будут примитивно рекурсивными, следовательно, разрешимыми в рамках рассматриваемых метатеорий. Поэтому предикат "формула x выводима в рассматриваемом исчислении" будет полуразрешимым в рамках этих метатеорий. На основании аналога леммы 5.1 в метатеории мы можем заключить, что применение правила reductio ad absurdum в указанных случаях законно с точки зрения симметрической конструктивной логики.

Замечание 2. Формулировки теоремы 4.3 и ее следствия несколько отличаются от формулировки теоремы 1 из [41] вследствие некоторых технических различий между понятием эффективной Luk-неполноты, введенным выше, и понятием эффективной Luk-неполноты, рассмотренным в [41].

Замечание 3. Утверждение теоремы 4.3 может иметь различный смысл для различных расширений системы HSA. Например, классическая система HKA может рассматриваться в качестве расширения системы HSA, однако теорема 4.3 в этом случае не дает ничего нового для системы HKA (и для ее расширений) по сравнению с классической теоремой К. Гёделя–Дж. Россера, поскольку никакая формула вида $(B \supset \neg B)\&(\neg B \supset B)$ не выводима в HKA. Но если в роли системы Ω выступает, например $HSUA$, то различие между классическим и трехзначным вариантом теоремы о неполноте становится уже существенным, поскольку некоторые формулы вида $(B \supset \neg B)\&(\neg B \supset B)$ выводимы в $HSUA$.

9. Аналоги системы М. Пресбургера

В этом разделе мы дадим доказательство теоремы 4.4.

Лемма 9.1. *Системы HKP и HIP эквивалентны.*

Эта лемма известна (см. [24], стр. 184 русского перевода). Доказательство ее основано на том, что метод элиминации кванторов, применяемый в доказательстве полноты классической системы М. Пресбургера ([21]; [23], том 1, стр. 438–453 русского перевода; [24], стр. 479–481 русского перевода) может быть применен также и в конструктивном (интуиционистском) варианте этой системы. Для этого перед каждым применением преобразований, проводимых в процессе элиминации кванторов, предварительно доказывается разрешимость формул, к которым применяется это преобразование (ср., например, [24], стр. 172–174 русского перевода).

Лемма 9.2. *Системы HSP, HLP, HKP эквивалентны.*

В самом деле, эквивалентность систем HLP и HKP была установлена в лемме 8.20; эквивалентность систем HSP и HLP получается на основании лемм 8.18, 8.19, 9.1.

Лемма 9.3. *Системы $HSUP$ и $HLUP$ эквивалентны.*

Доказательство получается на основании тех же лемм 8.18, 8.19, 9.1.

Доказательство теоремы 4.4. Мы докажем Luk-полноту системы $HLUP$; аналогичное утверждение для $HSUP$ будет следовать после этого из леммы 9.3. Пусть A – любая замкнутая формула в языке $L(Z_2)$. Рассмотрим формулы $\sigma^+(A)$ и $\sigma^-(A)$. Ясно, что эти формулы замкнуты. Система HKP полна в классическом смысле, следовательно одна из формул $\sigma^+(A)$ и $\neg\sigma^+(A)$, а также одна из формул $\sigma^-(A)$ и $\neg\sigma^-(A)$ выводима в HKP. Но формулы $\sigma^+(A)$ и $\sigma^-(A)$ не могут быть одновременно выводимы в HKP в силу леммы 8.8. Таким образом, имеет место один из следующих трех случаев: (1) в HKP имеют место выводимости $\vdash \sigma^+(A)$ и $\vdash \neg\sigma^-(A)$; (2) в HKP имеют место выводимости $\vdash \neg\sigma^+(A)$ и $\vdash \sigma^-(A)$; (3) в HKP имеют место выводимости $\vdash \neg\sigma^+(A)$ и $\vdash \neg\sigma^-(A)$. В случае (1) мы заключаем на основании леммы 8.19, что формула A выводима в системе $HLUP$. В случае (2) мы заключаем на основании той же леммы, что формула $\neg A$ выводима в $HLUP$ (поскольку $\sigma^+(\neg A)$ совпадает с $\sigma^-(A)$). Наконец, в случае (3) формула $(A \supset \neg A)\&(\neg A \supset A)$ выводима в $HLUP$. В самом деле, формула $\sigma^+((A \supset \neg A)\&(\neg A \supset A))$ есть $(\sigma^+(A) \supset \sigma^-(A))\&(\sigma^+(A) \supset \sigma^-(A))\&(\sigma^-(A) \supset \sigma^+(A))\&(\sigma^-(A) \supset \sigma^+(A))$, или, что эквивалентно, $(\sigma^+(A) \supset \sigma^-(A))\&(\sigma^-(A) \supset \sigma^+(A))$. Но формула $\sigma^+(A) \supset \sigma^-(A)$ выводима из $\neg\sigma^+(A)$ в HKP на основании правила противоречия; аналогично, формула $\sigma^-(A) \supset \sigma^+(A)$ выводима из $\neg\sigma^-(A)$ в HKP на основании того же правила. Следовательно, в случае (3) формула $(\sigma^+(A) \supset \sigma^-(A))\&(\sigma^-(A) \supset \sigma^+(A))$ выводима в HKP. На основании леммы 8.19 мы можем заключить, что в случае (3) формула $(A \supset \neg A)\&(\neg A \supset A)$ выводима в $HLUP$. Теорема доказана.

Общая характеристика трехзначных предикатов, выразимых в системе $HLUP$, может быть получена, исходя из лемм 8.19, 8.21, а также исходя из доказательства теоремы 4.4. Мы можем сказать, что в $HLUP$ выразимы такие трехзначные арифметические предикаты, у которых области истинности, ложности и неопределенности выразимы в системе HKP, то есть в классической системе М. Пресбургера.

Очевидно, что система $HLUP$ неполна в классическом смысле.

В самом деле, если A есть U, то ни A, ни $\neg A$ не выводимы в этой системе.

Литература

1. О. Р. Болибекян, *Теорема компактности для многозначных логик.* — Препринт Института проблем информат. и автомат. НАН РА N 02–001 (2002).
2. И. Д. Заславский, *О предикатных и арифметических исчислениях симметрической конструктивной логики* .— ДАН СССР **210**, N 3 (1973), 517–520.
3. И. Д. Заславский, *Симметрическая конструктивная логика.* — Изд-во АН Арм.ССР (1978).
4. И. Д. Заславский, *О симметрической конструктивной истинности арифметических формул.* — В кн.: 7-я Всесоюзн. конференция по матем. логике, Тезисы докладов, Новосибирск (1984), 67.
5. И. Д. Заславский, *Симметрическая конструктивная логика и некоторые ее приложения.* — Докт. дисс., Ереван (1987).
6. И. Д. Заславский, *О симметрической конструктивной арифметике.* — В кн.: 9-я Всесоюзн. конференция по матем. логике, Тезисы докладов, Ленинград (1988), 59.
7. И. Д. Заславский, *О биконструктивных арифметических формулах.* — В кн.: 10-я Всесоюзн. конференция по матем. логике, Тезисы докладов, Алма–Ата (1990), 67.
8. И. Д. Заславский, *Об итерациях определяющих алгорифмов симметрической конструктивной логики.* — В кн.: 11-я Межреспубликанская конференция по матем. логике, Тезисы докладов, Казань (1992), 62.
9. Б. А. Кушнер, *Лекции по конструктивному математическому анализу.* — Наука, М. (1973).
10. А. И. Мальцев, *Untersuchungen aus der Gebiete der Mathematischen Logik.* — Матем. сборник, т. 1(43) (1936), 323–336.
11. А. И. Мальцев, *Алгоритмы и рекурсивные функции.* — 2-е издание, Наука, М. (1986).
12. А. А. Марков, *Конструктивная логика.* — Успехи матем. наук, т. 5(37), N 3 (1950), 187–188.
13. А. А. Марков, *О конструктивной математике.* — Труды МИАН СССР, т. 67 (1962), 8–14.
14. А. А. Марков, *О логике конструктивной математики.* — М., Знание (1972).
15. Н. А. Шанин, *О конструктивном понимании математических суждений.* — Труды МИАН СССР, т. 52 (1958), 266–311.
16. Н. А. Шанин, *Об иерархии способов понимания суждений в конструктивной математике.* — Труды МИАН СССР, т. 129 (1974), 203–266.
17. Н. А. Шанин, *Эскиз финитарного варианта математического анализа.* — Препринт ПОМИ 06/2000 (2000).
18. L. Bolc and P. Borowik, *Many-valued Logics 1: Theoretical Foundations.* — Springer-Verlag (1992).

19. K. Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls.* — Monatshefte für Mathematik und Physik, Band 37 (1930), 349–360.
20. K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwandter Systeme.* — Monatshefte fuer Mathematik und Physik, Band 38 (1931), 173–198.
21. H. B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic.* — 2nd edition, San Diego, Harcourt, Academic Press (2001).
22. R. Haenle and G. Escalada–Imaz., *Deduction in Many-Valued Logics: a Survey.* — Marthware & Soft Computing, vol. IV (2) (1997), 69–97.
23. D. Hilbert und P. Bernays, *Grundlagen der Mathematic*, Zweite Auflage. Band 1, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1968; Band 2, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag (1970). Русский перевод: Д. Гильберт, П. Бернайс, Основания математики. Том 1 (Логические исчисления и формализация арифметики). — Наука, М. (1979). Том 2 (Теория доказательств). — Наука, М. (1982).
24. S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics.* — D. van Nostrand Comp., Inc., New York–Toronto (1952). Русский перевод: С. К. Клини, Введение в математику. — ИИЛ, М. (1957).
25. C. I. Lewis and C. H. Langford, *Symbolic Logic.* — Century Comp, New York–London (1932).
26. H. R. Lewis and C. H. Papadimitriou, *Elements of the Theory of Computation.* — Prentice–Hall, Upper Saddle River, New Jersey (1998).
27. J. Lukasiewicz, *O logice trojwartosciowej.* — Ruch filozoficzny (Lwow), **5** (1920), 168–171.
28. E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic.* — D. van Nostrand Comp., Inc., Princeton, New Jersey–Toronto–New York–London (1963). Русский перевод: Э. Мендельсон, Введение в математическую логику. — Наука, М. (1971).
29. M. Presburger, *Ueber die Vollstaendigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt.* — In: Sprawozdanie z I Kongresu Matematikow Krajow Slowianskich (Comptes Rendu du I Congres des Mathematiciens des Pays Slaves), Warszawa, 92-101 (1930).
30. N. Resher, *Many-valued logic.* — McGraw-Hill, New York (1969).
31. J. B. Rosser, *Extensions of some theorems of Gödel and Church.* — Journ. of Symbolic Logic, vol. 1, (1936), 87–91.
32. J. B. Rosser and A. R. Turquette, *Many-valued logics.* — Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam, North–Holl. Publ. Comp. (1952).
33. J. Rousseau, *Sequents in Many-valued Logics I.* — Fundamenta Mathematicae, vol. 67(1) (1967), 23–33.
34. J. Rousseau, *Sequents in Many-valued Logics II.* — Fundamenta Mathematicae, vol. 70(1) (1970), 125–131.
35. A. S. Troelstra, H. Schwichtenberg, *Basic proof theory.* — Cambridge–New York, Cambridge University Press (2000).
36. I. D. Zaslavsky, *On the theory of constructive reducibility.* — In: Proc. Internat. Conf. on Computer Science and Information Technologies, CSIT'97, Yerevan (1997), 10–11.

37. I. D. Zaslavsky, *On a logicaly but not functionally complete calculus in three-valued logic.* — In: The Tbilisi Symposium on Logic, Language and Computation, selected papers, CSLI publications, Stanford, California (1998), 309–313.
38. I. D. Zaslavsky, *On three-valued arithmetic.* — In: Proc. Internat. Conf. on Computer Science and Information Technologies, CSIT'01, Yerevan (2001), 133–136.
39. I. D. Zaslavsky, *Dual realizability in symmetric logic.* — Annals of Pure and Applied Logic, vol.113 (2002), 389–397.
40. I. D. Zaslavsky, *On three-valued logical models and their applications to arithmetical theories.* — Submitted to Denis Richard 60th Birthday Conference, Clermont-Ferrand, France (2002).
41. I. D. Zaslavsky, *On the Completeness Properties of the Systems of Symetric Constructive and Three-valued Logic.* — International Conference "21st Days of Weak Arithmetic", St. Petersburg, Russia, June 7–9, 2002, Abstracts, St. Petersburg (2002), 17–18. URL http://at.yorku.ca/cgi-bin/amca/cail-01.

Zaslavsky I. D. Formal axiomatic theories on the base of three-valued logic.

Formal axiomatic theories on the base of J. Lukasiewicz's three-valued logic are considered. Main notions connected with these theories are introduced, for example, the notion of a Luk-model (i.e., model of a theory in terms of J. Lukasiewicz's logic), of a Luk-consistent theory, Luk-complete theory. Logical calculi describing such theories are defined; analogues of the classical theorems on compactness and completeness are proved. Arithmetical theories based on J. Lukasewicz's logic and on its constructive (intuitionistic) variant are investigated; the theorem on effective Luk-incompleteness for a large class of arithmetical systems is proved which is a three-valued analogue of K.Goedel's famous theorem on the incompleteness of formal theories. Three-valued analogues of M.Presburger's arithmetical system are defined; it is proved that they are Luk-complete but not complete in the classical sense.

Институт проблем
информатики и автоматизации
Национальной Академии Наук Армении,
Ереван, Армения

Поступило 20 декабря 2002 г.