Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 304, 2003 г.

С. Н. Манукян

НЕКОТОРЫЕ АЛГЕБРЫ РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКЕ

1. Введение.

Индуктивные методы широко применяются для представления рекурсивных функций и множеств. Например, примитивно рекурсивные и частично рекурсивные функции обычно определяются подобным методом; скажем, примитивно рекурсивные функции обычно определяются как функции, которые могут быть получены, исходя из тождественных функций, функций-констант и функции следования, посредством операций суперпозиции и примитивной рекурсии ([4, 10, 13–15, 19]). Мы можем сказать, что при этом фактически рассматриваются алгебры операций над соответствующими объектами, где, помимо операций, зафиксированы системы базисных элементов; в указанном только что примере в роли операций выступают операции суперпозиции и примитивной рекурсии, в роли базисных элементов – тождественные функции, функции-константы и функция следования. Здесь, как и в дальнейшем, слово "алгебра" употребляется как синоним понятия "универсальная алгебра ([3, 11]), в которой фиксирована система базисных элементов". В каждой алгебре, рассматриваемой в дальнейшем, основным предметом исследования будет множество элементов, *индуктивно представимых* в ней, то есть таких элементов, которые могут быть получены, исходя из базисных элементов, при помощи операций, участвующих в алгебре. Во всех алгебрах, рассматриваемых в дальнейшем, имеется лишь конечное число операций и конечное число базисных элементов.

Рекурсивно перечислимые множества также могут быть представлены указанным методом. Можно указать определенные преимущества, которые дает индуктивное представление множеств

Это исследование было поддержано грантом "Weak arithmetics" INTAS 2001-447.

по сравнению с индуктивным представлением функций; а именно, индуктивные представления множеств основываются обычно на теоретико-множественных операциях, таких, как $\cup$, $\cap$ и это позволяет ввести простые и очевидные правила преобразований выражений для рассматриваемых множеств. Алгебры операций над рекурсивно перечислимыми множествами слов в фиксированном алфавите фактически построены и исследованы в работе Г. С. Цейтина [8]. Алгебра операций над нечеткими рекурсивно перечислимыми множествами ([6, 7, 16–18]) любых размерностей построена и исследована в [6] и [7].

В настоящей статье рассматриваются алгебры операций над рекурсивно перечислимыми множествами размерности 2 в обычном смысле этого понятия ([4, 10, 14, 15]), а также алгебры операций над нечеткими рекурсивно перечислимыми множествами размерности 2. В разделах 2 и 3 рассматриваются рекурсивно перечислимые множества в обычном смысле, в разделах 4 и 5 – нечеткие рекурсивные перечислимые множества. В разделе 2 строится алгебра θ над рекурсивно перечислимыми множествами размерности 2 в обычном смысле; доказывается, что в этой алгебре индуктивно представимы все рекурсивно перечислимые множества размерности 2. В разделе 3 рассматривается подалгебра θ^0 алгебры θ; доказывается, что в этой алгебре индуктивно представимы те и только те рекурсивно перечислимые множества размерности 2, которые могут быть заданы посредством формул арифметической системы М. Пресбургера. В разделе 4 строится алгебра Ω над нечеткими рекурсивно перечислимыми множествами размерности 2; доказывается, что в этой алгебре индуктивно представимы все нечеткие рекурсивно перечислимые множества размерности 2. В разделе 5 строится подалгебра Ω^0 алгебры Ω, полученная из Ω посредством такого же преобразования, при помощи которого из алгебры θ получена подалгебра θ^0. Нечеткие множества, индуктивно представимые в алгебре Ω^0, могут рассматриваться как нечеткие аналоги множеств, задаваемых формулами арифметической системы М. Пресбургера; это вытекает из теоремы, доказанной в раздеде 5.

Слово "индуктивный" в обороте "индуктивно представимые элементы" (и в иных аналогичных оборотах) будет иногда опускаться, если это не ведет к недоразумениям.

Формулировки теорем, устанавливаемых в настоящей статье, опубликованы[1] в [18].

Многие ценные замечания и советы были даны рецензентами, приславшими подробные отзывы о статье. Большую помощь в подготовке окончательного варианта статьи оказали Ю. В. Матиясевич и Г. Е. Минц. Автор приносит всем названным лицам свою глубокую благодарность.

2. Алгебра, представляющая все рекурсивно перечислимые множества размерности 2.

Будем рассматривать рекурсивно перечислимые множества пар (x, y) натуральных чисел $0, 1, 2, \ldots$, иначе говоря, двумерные рекурсивно перечислимые множества (ДРПМ). Введем в рассмотрение следующие операции над ДРПМ (в дальнейших определениях A и B суть любые ДРПМ):

(1) Операция $\cup$ (объединение) задается следующими порождающими правилами (п.п.):
если $(x, y) \in A$, то $(x, y) \in A \cup B$; если $(x, y) \in B$, то $(x, y) \in A \cup B$.
(2) Операция $\cap$ (пересечение) задается следующим п.п.:
если $(x, y) \in A$ и $(x, y) \in B$, то $(x, y) \in A \cap B$.
(3) Операция $\circ$ (композиция) задается следующим п.п.:
если $(x, y) \in A$ и $(y, z) \in B$, то $(x, z) \in A \circ B$.
(4) Операция $*$ (транзитивное замыкание) задается следующими п.п.:
если $(x, y) \in A$, то $(x, y) \in *A$; если $(x, y) \in *A$ и $(y, z) \in *A$, то $(x, z) \in *A$.
(5) Операция $\Diamond$ (арифметическая сумма) задается следующими п.п.:
если $(x, y) \in A$ и $(x, z) \in B$, то $(x, y + z) \in A \Diamond B$.
(6) Операция $^{-1}$ (обращение) задается следующим п.п.:
если $(x, y) \in A$, то $(y, x) \in A^{-1}$.

Очевидно, что все указанные операции, будучи примененными к ДРПМ, дают в результате ДРПМ. Операции $\cup$, $\cap$, $\circ$, $*$, $^{-1}$ были

[1] К сожалению, в [18] имеются досадные опечатки; в английском переводе некоторые части текста оказались опущенными. На стр. 13 (строки 11 и 12 сверху) после слов "for every $(x, y, \varepsilon) \in A$" и "for every $(x, y, \varepsilon) \in B$" следует добавить: "where $\varepsilon > 0$". На стр. 14 (строка 8 снизу) после слов "is expressible in Ω" следует добавить: "(up to the equivalence)".

рассмотрены в работе Г. С. Цейтина [8] как операции над двумерными рекурсивно перечислимыми множествами слов в фиксированном алфавите. Отметим, что Г. С. Цейтин использует обратный порядок исходных множеств в выражении для операции композиции $\circ$.

Посредством $\widetilde{R}$ будем обозначать ДРПМ $\{(x,y)|y=x+1\}$.

Посредством θ будем обозначать алгебру над ДРПМ, определяемую операциями $\cup$, $\cap$, $\circ$, $*$, $\Diamond$, ${}^{-1}$; в качестве списка базисных элементов в θ фиксируется одноэлементный список, состоящий из единственного элемента $\widetilde{R}$.

Теорема 2.1. *Любое* ДРПМ *индуктивно представимо в* θ.

Эта теорема будет доказана ниже на основе лемм 2.1–2.4. Она аналогична одной из теорем, устанавливаемых в работе [8] (см. ниже, лемма 2.3).

Введем в рассмотрение множества $\widetilde{\mathcal{Q}}$, $\widetilde{E}$, $\widetilde{\mathcal{Q}}_1$, $\widetilde{V}$, множества $\widetilde{W}_{kl}$ при $k.l=0,1,2,\ldots$, множества $\widetilde{Z}_k$ при $k=0,1,2,\ldots$, множества $\widetilde{D}_k$ при $k=1,2,\ldots$, множества $\widetilde{T}$ и $\widetilde{T}_1$. Указанные ДРПМ определяются следующим образом: $\widetilde{\mathcal{Q}}=\{(x,y)|x<y\}$; $\widetilde{E}=\{(x,y)|x=y\}$; $\widetilde{\mathcal{Q}}_1=\{(x,y)|x\leqslant y\}$; $\widetilde{V}$ есть множество всех пар натуральных чисел, $\widetilde{W}_{kl}$ состоит из единственной пары (k,l); $\widetilde{Z}_k=\{(k,y)\}$; $\widetilde{D}_k=\{(x,y)|y=kx\}$; $\widetilde{T}$ есть множество пар $(1,2^n)$ при $n=0,1,2,\ldots$; $\widetilde{T}_1$ есть множество всех пар $(x,2^n)$, где x и n – любые натуральные числа.

Лемма 2.1. *Все множества* $\widetilde{\mathcal{Q}}$, $\widetilde{E}$, $\widetilde{\mathcal{Q}}_1$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{W}_{kl}$, $\widetilde{Z}_k$, $\widetilde{D}_k$, $\widetilde{T}$, $\widetilde{T}_1$ *индуктивно представимы в* θ.

Доказательство получается на основании нижеследующих равенств:

$$\widetilde{\mathcal{Q}}=*\widetilde{R};\quad \widetilde{E}=\widetilde{D}_1=\widetilde{R}\circ(\widetilde{R}^{-1});\quad \widetilde{D}_{k+1}=\widetilde{D}_k\Diamond\widetilde{E};\quad \widetilde{\mathcal{Q}}_1=\widetilde{\mathcal{Q}}\cup\widetilde{E};$$

$$\widetilde{V}=\widetilde{\mathcal{Q}}\cup\widetilde{E}\cup(\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1});\quad \widetilde{W}_{00}=\widetilde{D}_2\cap(\widetilde{D}_2^{-1});\quad \widetilde{W}_{k,l+1}=\widetilde{W}_{kl}\circ R;$$

$$\widetilde{W}_{k+1,l}=(\widetilde{R}^{-1})\circ\widetilde{W}_{k,l};\quad \widetilde{Z}_0=\widetilde{W}_{00}\circ\widetilde{\mathcal{Q}}_1;\quad \widetilde{Z}_{k+1}=(\widetilde{R}^{-1})\circ\widetilde{Z}_k;$$

$$\widetilde{T}=\big(\widetilde{Z}_1\cap\big(\widetilde{E}\cup(*\widetilde{D}_2)\big)\big);\quad \widetilde{T}_1=(\widetilde{Z}_1^{-1})\circ\widetilde{T}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь множество всех слов $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_t}$ в алфавите $\{a_1,a_2\}$; это множество будем обозначать посредством Str.

Для каждого слова $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_t}$ введем его алфавитный номер следующим образом:

$$\mathrm{Num}\,(a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_t}) = \sum_{k=1}^{t} 2^{t-k}\cdot i_k;$$

этим устанавливается взаимно-однозначное соответствие между Str и множеством всех натуральных чисел $0, 1, 2, \ldots$ ([4, 22]).

Лемма 2.2. *Пусть $P \in \mathrm{Str}$ есть слово $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_t}$, и пусть x – его алфавитный номер. Тогда длина t слова P определяется в зависимости от x посредством примитивно рекурсивной функции $l(x) = [\log_2(x+1)]$; алфавитные номера слов Pa_1, Pa_2, a_1P, a_2P равны, соответственно, $2x+1$, $2x+2$, $2^{l(x)}+x$, $2^{l(x)+1}+x$; условие $x+2 \leqslant 2^n \leqslant 2x+2$ выполняется для единственного натурального числа $n = l(x)+1$.*

Доказательство легко получается на основании определений.

Будем рассматривать рекурсивно перечислимые множества слов и пар слов. Посредством R_1, R_2, L_1, L_2 обозначим множества пар слов, соответственно $\{(P, Pa_1)\}$, $\{(P, Pa_2)\}$, $\{(a_1P, P)\}$, $\{(a_2P, P)\}$ для всех $P \in \mathrm{Str}$. Если M есть подмножество Str, то *арифметический образ* множества M определяется как множество алфавитных номеров слов, принадлежащих M. Аналогичным образом определяется арифметический образ множества пар слов как множество пар соответствующих им алфавитных номеров.

Лемма 2.3 (Г. С. Цейтин [8]). *Каждое рекурсивно перечислимое множество пар слов в алфавите $\{a_1, a_2\}$ может быть получено исходя из R_1, R_2, L_1, L_2 при помощи операций $\cup$, $\cap$, $\circ$, $*$.*

Доказательство фактически дано в несколько иной терминологии в работе [8]. В самом деле, из результатов работы [8] легко следует, что понятие V-перечислимого множества, рассматриваемое в [8], равносильно понятию многомерного рекурсивно перечислимого множества слов в фиксированном алфавите (см. [8, с. 71, заключительный абзац §2, а также с. 77]). Понятие B-перечислимого множества ([8, с. 79]) для случая двухбуквенного алфавита совпадает с понятием множества, получаемого из R_1, R_2, L_1, L_2 при помощи операций $\cup$, $\cap$, $\circ$, $*$. Поэтому теорема 5 работы [8] (“Всякое V-перечислимое множество размерности 2 является В-перечислимым", с. 79) утверждает для двухбуквенного алфавита то же самое, что и лемма 2.3.

Лемма 2.4. *Арифметические образы* R_1, R_2, L_1, L_2 *индуктивно представимы в* θ.

Доказательство. Арифметические образы $\widetilde{R}_1$ и $\widetilde{R}_2$ множеств R_1 и R_2 суть, соответственно, $\{(x,y)|y = 2x+1\}$ и $\{(x,y)|y = 2x+2\}$; они получаются в θ в виде $\widetilde{D}_2 \circ \widetilde{R}$ и $(\widetilde{D}_2 \circ \widetilde{R}) \circ \widetilde{R}$. Арифметические образы $\widetilde{L}_1$ и $\widetilde{L}_2$ множеств L_1 и L_2 суть, соответственно, $\{(x,y)|x = 2^{l(y)} + y\}$ и $\{(x,y)|x = 2^{l(y)+1} + y\}$; они получаются в θ при помощи множества $\widetilde{L}_3 = \{(x,y)|y = 2^{l(x)+1}\}$. Это множество получается в θ на основании леммы 2.2 следующим образом: $(((\widetilde{R}\circ\widetilde{R})\circ\widetilde{Q}_1)\cap(((\widetilde{D}_2\circ\widetilde{R})\circ\widetilde{R})\circ\widetilde{Q}_1^{-1}))\cap\widetilde{T}_1$. После этого множества $\widetilde{L}_1$ и $\widetilde{L}_2$ получаются соответственно в виде $((\widetilde{L}_3 \circ \widetilde{D}_2^{-1})\Diamond\widetilde{E})^{-1}$ и $(\widetilde{L}_3\Diamond\widetilde{E})^{-1}$.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть A – любое ДРПМ. Очевидно, что оно является арифметическим образом некоторого рекурсивно перечислимого множества B пар слов в алфавите $\{a_1, a_2\}$. Согласно теореме Г. С. Цейтина (см. выше, лемма 2.3), множество B может быть построено исходя из множеств R_1, R_2, L_1, L_2 посредством операций $\cup$, $\cap$, $\circ$, $*$. Рассмотрим арифметические образы всех участвующих в этом построении рекурсивно перечислимых множеств пар слов. Очевидно, что все они индуктивно представимы в θ; в самом деле, индуктивная представимость $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$, $\widetilde{L}_1$, $\widetilde{L}_2$ установлена в лемме 2.4, а операции $\cup$, $\cap$, $\circ$, $*$ включены в θ. Следовательно, A индуктивно представимо в θ. Теорема доказана.

Замечание. Список операций в алгебре θ может быть сокращен с сохранением свойства этой алгебры, устанавливаемого теоремой 2.1 (при соответствующем изменении списка базисных элементов). Например, из результата Г. С. Цейтина (см. выше, лемма 2.3) следует, что этот список может быть взят в виде $(\cup, \cap, \circ, *)$; из другого результата Г. С. Цейтина ([8, теорема 11, с. 94]) следует, что этот список может быть сведен к одноэлементному списку, состоящему из одной лишь операции композиции $\circ$. Однако в таких случаях базисные элементы оказываются существенно более сложными по сравнению с θ; кроме того, значительно усложняется связь подобных алгебр с формальными арифметическими системами и с системами нечетной логики.

3. Алгебра, представляющая двумерные рекурсивно перечислимые множества, задаваемые в системе М. Пресбургера.

Вводится в рассмотрение алгебра θ^0, получающаяся из θ посредством удаления операции транзитивного замыкания $*$ и добавления $\widetilde{Q}$ к списку базисных элементов. Таким образом, список операций в θ^0 имеет вид $(\cup, \cap, \circ, \Diamond^{-1})$; список базисных элементов в θ^0 есть $(\widetilde{R}, \widetilde{Q})$. Ясно, что алгебра θ^0 может рассматриваться как подалгебра θ, поскольку $\widetilde{Q}$ индуктивно представимо в θ.

Формальная арифметическая система М. Пресбургера ([10]; [13, сс. 438–453 русс. пер.]; [14, сс. 419 и 479–481 русс. пер.]; [21]) вводится на основе исчисления предикатов первого порядка ([4, 10, 13, 14, 19]) с логическими операциями $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$. Язык этой системы содержит единственный предикатный символ $=$, константу 0, функциональные символы $'$ (функция следования) и $+$ (сложение). Термы и формулы определяются обычным образом ([4, 10, 13, 14, 19]). Если k есть натуральное число, то посредством $\widetilde{k}$ будем обозначать терм $0^{''\cdots'}$, где символ $'$ повторяется k раз. Посредством $\mathrm{Subst}\,(A, x, s)$, где A – формула, x – переменная, s – терм, будем обозначать формулу, полученную посредством подстановки s в формулу A вместо всех свободных вхождений x. Аксиомы системы Пресбургера вводятся следующим образом:

(1) аксиомы равенства: $\forall x(x = x)$, $\forall x \forall y(x = y \supset y = x)$, $\forall x \forall y \forall z(x = y \supset (y = z \supset x = z))$, $\forall x \forall y(x = y \supset x' = y')$, $\forall x \forall y \forall u \forall \nu((x = u \& y = \nu) \supset (x + y = u + \nu))$;
(2) аксиомы Пеано: $\forall x(\neg(x' = 0))$; $\forall x \forall y(x' = y' \supset x = y)$;
(3) аксиомы сложения: $\forall x(x + 0 = x)$, $\forall x \forall y(x + y' = (x + y)')$;
(4) схема аксиом индукции: $\mathrm{Subst}\,(A, x, 0) \supset (\forall x(A \supset \mathrm{Subst}\,(A, x, x')) \supset \forall x(A))$, где A есть любая формула в языке системы.

Известно ([10]; [13, сс. 438–454 русс. пер.]; [14, сс. 419 и 479–481 русс. пер.]; [21]), что система Пресбургера полна, т.е., какова бы ни была замкнутая формула A в языке системы, или A, или $\neg A$ выводима в ней.

Арифметический предикат, задаваемый формулой A системы Пресбургера со свободными переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяется как предикат, истинный на системе $k_1, k_2, \ldots, k_n$ натуральных чисел в том, и только том случае, когда формула, получаемая посредством подстановки $\widetilde{k}_1, \widetilde{k}_2, \ldots, \widetilde{k}_n$ в A вместо всех свободных вхождений, соответственно, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, выводима в рассматриваемой системе; в противном случае указанный предикат ложен на $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ (в этом последнем случае отрицание вышеупомянутой формулы, полученной посредством подстановки, выводимо в рассматриваемой системе). Множество систем $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, задаваемое формулой A указанного выше вида, определяется как множество систем $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, для которых предикат, задаваемый формулой A, истинен. Мы будем иногда отождествлять предикат и множество, задаваемые формулой A. Например, множество $\widetilde{V}$ будет иногда отождествляться с двуместным арифметическим предикатом, истинным на всех парах натуральных чисел; этот предикат задается в системе Пресбургера формулой $(x = x)\&(y = y)$. Множество $\widetilde{D}_3$ задается в этой системе формулой $(y = x + x + x)$, предикат $(t < s)$, где t и s – любые термы – формулой $\exists z(t + z' = s)$; предикат $(t \equiv s)(\operatorname{mod} k)$, где t и s – любые термы, k – натуральная положительная константа, задается формулой $\exists z((t+z+z+\ldots+z = s)\vee(s+z+z+\ldots+z = t))$, где слагаемые z в каждой сумме повторяются k раз (в последних примерах предполагается, что t и s не содержат z).

Теорема 3.1. ДРПМ *индуктивно представимо в* θ^0 *в том, и только в том случае, когда оно задается формулой системы Пресбургера.*

Доказательство основано на нижеследующих леммах 3.1–3.3.

Лемма 3.1. *Любой терм в системе Пресбургера может быть преобразован к виду* $\widetilde{k}_1 x_1 + \widetilde{k}_2 x_2 + \ldots + \widetilde{k}_n x_n + \widetilde{l}$, *где* $k_1, k_2, \ldots, k_n, l$ *суть натуральные константы,* $\widetilde{k}x$ *понимается как* $x + x + \ldots + x$, *где* x *повторяется* k *раз. Арифметический предикат может быть задан формулой системы Пресбургера в том, и только том случае, когда он может быть представлен посредством конъюкции* $(\&)$ *и дизъюнкции* $(\vee)$ *предикатов вида* $t < s$ *и* $(t \equiv s)(\operatorname{mod} k)$, *где* t *и* s *– любые термы,* k *– любая положительная натуральная константа.*

Доказательство фактически дано в [10], в [13, сс. 438–453 русс. пер.], в [14, сс. 479–481 русс. пер.] и в [21].

Следствие. *Каждое множество пар* (x, y), *задаваемое формулой системы Пресбургера, может быть получено посредством опера-*

ций $\cup$, $\cap$, $^{-1}$ *из множеств следующих видов:*

$$\{(x,y)|kx+ly<m\},\quad \{(x,y)|m<kx+ly\},$$
$$\{(x,y)|kx+m<ly\},\quad \{(x,y)|kx<ly+m\},\quad \{(x,y)|kx<ly\},$$
$$\{(x,y)|kx<m\},\quad \{(x,y)|m<kx\},\quad \{(x,y)|x\equiv k(\operatorname{mod} m)\},$$

где k, l, m *– любые натуральные константы; в последнем выражении предполагается, что* $m>0$.

В самом деле, операции $\cap$ и $\cup$ над множествами соответствуют операциям & и $\vee$ над предикатами. Первые 7 видов множеств в формулировке следствия соответствуют всем различным видам предикатов $t<s$, где t и s – любые термы системы Пресбургера, зависящие от x и y (эти виды предикатов рассматриваются с точностью до очевидных преобразований формул и с точностью до перемены ролей x и y; такая перемена может быть осуществлена посредством операции $^{-1}$). Предикат $t\equiv s(\operatorname{mod} k)$, где t и s – любые термы, k – положительная натуральная константа, может быть преобразован к виду

$$((t\equiv 0(\operatorname{mod} k))\&(s\equiv 0(\operatorname{mod} k)))\vee((t\equiv 1(\operatorname{mod} k))\&$$
$$\&(s\equiv 1(\operatorname{mod} k)))\vee\ldots\vee((t\equiv (k-1)(\operatorname{mod} k))\&(s\equiv (k-1)(\operatorname{mod} k)));$$

каждый предикат вида $t\equiv l(\operatorname{mod} k)$, где t – любой терм, зависящий от x и y, k и l – натуральные константы (причем $k>0$), может быть преобразован к одному из видов $(k_1x+k_2y\equiv l(\operatorname{mod} m))$, $(kx\equiv l(\operatorname{mod} m))$, $(ky\equiv l(\operatorname{mod} m))$. Но каждый предикат, задаваемый формулой одного из указанных видов, может быть представлен в виде дизъюнкции предикатов $(x\equiv k)(\operatorname{mod} m)\&(y\equiv l)(\operatorname{mod} m)$, или $(x\equiv k)(\operatorname{mod} m)$, или $(y\equiv l)(\operatorname{mod} m)$. Следствие доказано.

Лемма 3.2. *Каждое ДРПМ, задаваемое формулой системы Пресбургера, индуктивно представимо в* θ^0.

Доказательство. Достаточно установить, что все ДРПМ, указанные в следствии леммы 3.1, индуктивно представимы в θ^0. Рассмотрим множества $\widetilde{F}_m=\{(x,y)|x+y<m\}$ и $\widetilde{G}_m=\{(x,y)|x+y>m\}$. Множество $\widetilde{F}_m$ содержит лишь конечное число пар натуральных чисел, а потому оно может быть получено посредством операции $\cup$ из конечного числа множеств вида $\widetilde{W}_{kl}$. Предикат $x+y>m$ может быть представлен в виде

$$(x=0\&y>m)\vee(x=1\&y>(m-1))\vee\ldots\vee(x=m\&y>0)\vee(x>m),$$

а потому $\widetilde{G}_m$ может быть получено при помощи операций $\cup$ и $\cap$ из множеств $\{(x,y)|x=k\}$, $\{(x,y)|x>k\}$, $\{(x,y)|y>k\}$, но эти множества получаются в θ^0 в виде, соответственно, $\widetilde{Z}_k$, $\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\circ\widetilde{Z}_k$, $\widetilde{Z}_k^{-1}\circ\widetilde{\mathcal{Q}}$. Таким образом, $\widetilde{F}_m$ и $\widetilde{G}_m$ индуктивно представимы в θ^0 при любом натуральном m. Отсюда мы получаем:

множество $\{(x,y)|kx+ly>m\}$ получается в θ^0 в виде $\big((\widetilde{D}_k\circ\widetilde{G}_m)\circ(\widetilde{D}_l^{-1})\big)$,
множество $\{(x,y)|kx+ly<m\}$ – в виде $\big((\widetilde{D}_k\circ\widetilde{F}_m)\circ(\widetilde{D}_l^{-1})\big)$,
множество $\{(x,y)|kx+m<ly\}$ – в виде $\big(\big((\widetilde{D}_k\lozenge(\widetilde{Z}_m^{-1})\big)\circ\widetilde{\mathcal{Q}}\big)\circ$ $\circ(\widetilde{D}_l^{-1})\big)$,
множество $\{(x,y)|kx<ly+m\}$ – в виде $\big((\widetilde{D}_k\circ\widetilde{\mathcal{Q}})\circ(\widetilde{D}_l\lozenge(\widetilde{Z}_m^{-1}))^{-1}\big)$,
множество $\{(x,y)|kx<ly\}$ – в виде $(\widetilde{D}_k\circ\widetilde{\mathcal{Q}})\circ\widetilde{D}_l^{-1}$,
множество $\{(x,y)|kx<m\}$ – в виде $(\widetilde{D}_k\circ\widetilde{\mathcal{Q}})\circ\widetilde{Z}_m$,
множество $\{(x,y)|m<kx\}$ – в виде $\big((\widetilde{D}_k\circ\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1})\circ\widetilde{Z}_m\big)$,
множество $\{(x,y)|x\equiv k(\operatorname{mod}m)\}$ – в виде $\big(\widetilde{V}\circ(\widetilde{D}_m\lozenge(\widetilde{Z}_k^{-1}))\big)^{-1}$.

Следствие доказано.

Лемма 3.3. *Каждое* ДРПМ, *индуктивно представимое в* θ^0, *может быть задано посредством некоторой формулы системы Пресбургера.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по ходу процесса построения ДРПМ в алгебре θ^0. Базисные множества $\widetilde{R}$ и $\widetilde{\mathcal{Q}}$ задаются формулами, соответственно, $y=x+1$ и $\exists z(x+z'=y)$. Посредством $A(x,y)$ и $B(x,y)$ будем обозначать любые формулы A и B в языке системы Пресбургера, не содержащие свободных переменных, отличных от x и y; посредством $A(s,t)$ и $B(s,t)$, где s и t – любые термы, будем обозначать формулы, полученные из $A(x,y)$ и $B(x,y)$ посредством подстановки термов s и t вместо всех свободных вхождений, соответственно, x и y. Теперь, если ДРПМ F и G задаются формулами $A(x,y)$ и $B(x,y)$, то $F\cap G$ задается формулой $A(x,y)\&B(x,y)$, $F\cup G$ – формулой

$A(x,y) \vee B(x,y)$, $F \circ G$ – формулой $\exists z(A(x,z) \& B(z,y))$, $F \Diamond G$ – формулой $\exists u \exists \nu (A(x,u) \& B(x,\nu) \& u + \nu = y)$, F^{-1} – формулой $A(y,x)$ (предполагается, что переменные z, u, ν не входят в $A(x,y)$ и $B(x,y)$). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1 теперь получается на основании лемм 3.2 и 3.3.

4. Алгебра, представляющая все двумерные нечеткие рекурсивно перечислимые множества.

Напомним основные понятия, связанные с нечеткими рекурсивно перечислимыми множествами ([6, 7, 16–18]). Нечеткое рекурсивно перечислимое множество (НРПМ) размерности n определяется как рекурсивно перечислимое множество систем $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть натуральные числа, ε есть двоично-рациональное число $\frac{m}{2^n}$ такое, что $0 \leqslant \frac{m}{2^n} \leqslant 1$. Это понятие по существу эквивалентно понятию двоично-рационального многомерного рекурсивно перечислимого множества, введенного в [1] в качестве нижнего уровня рассмотренной в [1] логической системы непрерывной конструктивной логики; конструктивная семантика этой системы определена в [1]. В дальнейшем аналогичное понятие рекурсивно перечислимого нечеткого предиката рассматривалась в [5]; приведенное выше определение НРПМ дано в [6] и [7], где исследовалось индуктивное представление НРПМ любых размерностей в соответствующей алгебре над этими множествами. Мы рассматриваем в настоящей статье лишь НРПМ размерности 2, т.е. двумерные нечеткие рекурсивно перечислимые множества (ДНРПМ). Говорим, что ДНРПМ A *покрывает* ДНРПМ B, если для любой тройки $(x, y, \varepsilon) \in B$, где $\varepsilon > 0$, можно указать тройку $(x, y, \delta) \in A$ такую, что $\delta \geqslant \varepsilon$. Говорим, что два ДНРПМ A и B *эквивалентны*, если A покрывает B, и B покрывает A. Такое понятие эквивалентности ДНРПМ является частным случаем понятия эквивалентности многомерных нечетких рекурсивно перечислимых множеств, рассматриваемого в [6, 7]; оно отличается от нескольких более широкого понятия эквивалентности, рассматриваемого в [16]. ДНРПМ A называется *стандартным*, если все тройки вида $(x, y, 0)$ принадлежат A.

Пусть задано некоторое ДРПМ (т.е. двумерное рекурсивно перечислимое множество в обычном смысле). Обозначим его через

A. *Нечетким образом* A будем называть ДНРПМ B, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) тройка (x, y, ε) принадлежит B только при $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$;
(2) все тройки вида $(x, y, 0)$ принадлежат B;
(3) тройка $(x, y, 1)$ принадлежит B в том, и только том случае, когда $(x, y) \in A$.

Очевидно, что указанные условия определяют ДНРПМ B однозначно; ясно, что всякое множество B указанного вида стандартно.

Рассмотрим кратко содержательную интерпретацию введенных понятий. В соответствии с концепциями нечеткой логики ([12, 20, 24]), каждое нечеткое множество в содержательном толковании этого понятия определяется на основе так называемых "коэффициентов принадлежности" различных элементов этому множеству. А именно, каждому элементу, о котором можно поставить вопрос, принадлежит ли он данному нечеткому множеству, ставится в соответствие "коэффициент его принадлежности" данному множеству, представляющий собой действительное число ε такое, что $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Если "коэффициент принадлежности" какого-либо элемента рассматриваемому нечеткому множеству равен 1, то это означает, что наши знания о принадлежности данного элемента рассматриваемому множеству полностью достоверны, т.е. мы можем с уверенностью констатировать, что этот элемент действительно принадлежит нашему множеству. В противном случае "коэффициент принадлежности" может интерпретироваться как мера наших знаний относительно факта принадлежности элемента рассматриваемому множеству (иначе говоря, как "мера достоверности", с которой можно утверждать, что указанный факт действительно имеет место). Если "коэффициент принадлежности" равен 0, то это означает, что мы ничего не знаем об указанном факте (или, в другой интерпретации: мы знаем, что элемент не принадлежит рассматриваемому множеству).

Имеются и другие содержательные толкования понятия нечеткого множества. "Коэффициент принадлежности" может пониматься, например, как "степень приемлемости" утверждения о принадлежности соответствуюшего элемента данному множеству или "степень допустимости" подобного утверждения.

Каждое НРПМ A размерности n рассматривается как алгорифмическое описание некоторого (содержательно понимаемого) нечеткого множества n-членных систем натуральных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Более точно: НРПМ A рассматривается как алгорифмическое описание процесса постепенного накопления знаний о принадлежности различных систем $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ этому нечеткому множеству. Если в процессе конструктивного порождения элементов рекурсивно перечислимого множества A обнаружился элемент $(x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) \in A$, то этот факт понимается в том смысле, что принадлежность системы $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нашему нечеткому множеству может утверждаться, по крайней мере, с коэффициентом ε. Если в дальнейшем по ходу процесса породится элемент $(x_1, x_2, \dots, x_n, \delta) \in A$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – те же самые, что в предыдущем случае, а $\delta \leqslant \varepsilon$, то будем считать, что это не прибавляет нам знаний о принадлежности системы $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нашему нечеткому множеству, но если при тех же условиях мы имеем $\delta > \varepsilon$, то принадлежность системы $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нашему нечеткому множеству может теперь утверждаться, по крайней мере, с коэффициентом δ. В соответствии с такой интерпретацией, факт порождения системы $(x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) \in A$ понимается в том смысле, что "коэффициент принадлежности" системы $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нечеткому множеству, описываемому НРПМ A, больше или равен ε. В целом "коэффициент принадлежности" системы $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нечеткому множеству, описываемому НРПМ A, интерпретируется как точная верхняя граница тех ε, для которых $(x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) \in A$. Заметим, что эта точная верхняя граница, вообще говоря, не может быть выражена конструктивным действительным числом ([2, 9]); но она может быть выражена так называемым "шпекеровым числом", т.е. псевдочислом ([2]), определяемым монотонно возрастающей ограниченной конструктивной последовательностью двоично-рациональных чисел ([2, 23]). Понятия, относящиеся к шпекеровым числам, характеризующим уровни принадлежности различных систем $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ к НРПМ, исследованы в [16].

Если A – некоторое ДРПМ, то его нечеткий образ B, в соответствии с определениями, данными выше, обладает следующими свойствами: $(x, y, 1) \in B$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in A$; в противном случае $(x, y, \varepsilon) \in B$ лишь при $\varepsilon = 0$. Таким образом, шпекерово число, определяющее "коэффициент принадлежности" пары (x, y) нечеткому множеству, описываемому ДНРПМ

B, равно либо 0, либо 1; оно равно 1, если $(x, y) \in A$, и 0 в противном случае. В последнем предложении дизъюнкция "равно либо 0, либо 1", вообще говоря, неконструктивна. В самом деле, назовем шпекерово число "0-1-числом", если оно не может быть отличным от 0 и от 1. Тогда, как легко видеть, невозможен алгорифм, распознающий по всякому шпекерову 0-1-числу, равно оно 0 или 1.

Введем теперь в рассмотрение операции над ДНРПМ, определяемые следующими порождающими правилами, где A и B суть любые ДНРПМ:

(1) Операция $+$ (сумма) определяется следующим образом: если $(x, y, \varepsilon) \in A$ и $(x, y, \delta) \in B$, то $(x, y, \min(1, \varepsilon + \delta)) \in A + B$.
(2) Операция $\cdot$ (произведение) определяется следующим образом: если $(x, y, \varepsilon) \in A$ и $(x, y, \delta) \in B$, то $(x, y, \varepsilon \cdot \delta)) \in A \cdot B$.
(3) Операция $\circ$ (композиция) определяется следующим образом: если $(x, y, \varepsilon) \in A$ и $(y, z, \delta) \in B$, то $(x, z, \varepsilon \cdot \delta)) \in A \circ B$.
(4) Операция $\oplus$ (аддитивно-транзитивное замыкание) определяется следующим образом: если $(x, y, \varepsilon) \in A$, то $(x, y, \varepsilon) \in \oplus A$; если $(x, y, \varepsilon) \in \oplus A$ и $(y, z, \delta) \in \oplus A$, то $(x, z, \min(1, \varepsilon + \delta)) \in \oplus A$.
(5) Операция $\otimes$ (мультипликативно-транзитивное замыкание) определяется следующим образом: если $(x, y, \varepsilon) \in A$, то $(x, y, \varepsilon) \in \otimes A$; если $(x, y, \varepsilon) \in \otimes A$ и $(y, z, \delta) \in \otimes A$, то $(x, z, \varepsilon \cdot \delta) \in \otimes A$.
(6) Операция $\lozenge$ (арифметическая сумма) определяется следующим образом: если $(x, y, \varepsilon) \in A$ и $(x, z, \delta) \in B$, то $(x, y+z, \varepsilon \cdot \delta) \in A \lozenge B$.
(7) Операция $^{-1}$ (обращение) определяется следующим образом: если $(x, y, \varepsilon) \in A$, то $(y, x, \varepsilon) \in A^{-1}$.

Очевидно, что эти операции дают стандартные ДНРПМ, будучи применены к стандартным ДНРПМ. Аналогичные операции $+$, $\cdot$, $\oplus$, $\otimes$, относящиеся к многомерным НРПМ, были рассмотрены в [6] и [7]. Мы используем $\circ$, $\lozenge$, $^{-1}$ в качестве обозначений как для операций, применяемым к ДРПМ, так и для операций, применяемых к ДНРПМ; различие между ними будет видно из контекста.

Определения операций 1)–7) над ДНРПМ введены по аналогии с соответствующими определениями для обычных рекурсивно перечислимых множеств; некоторые из этих операций (например, $+$ или $\cdot$) соответствуют действиям над нечеткими множествами, применяемыми в определенных ситуациях в практических приложениях нечеткой логики [20]. Можно рассматривать операции суммы и произведения как обобщения операций $\cup$ и $\cap$ над рекурсивно перечислимыми множествами в обычном смысле. В самом деле, если A и B – некоторые ДРПМ, а C и D – их нечеткие образы, то, как легко видеть, $C + D$ является нечетким образом $A \cup B$; а $C \cdot D$ – нечетким образом $A \cap B$. Операции $\circ$, $\otimes$, $\Diamond$, $^{-1}$ над ДНРПМ могут рассматриваться как естественные обобщения операций, соответственно $\circ$, $*$, $\Diamond$, $^{-1}$ над ДНРПМ. Операция аддитивно-транзитивного замыкания $\oplus$ введена по аналогии с операцией мультипликативно-транзитивного замыкания $\otimes$. Хотя эта операция не имеет прямого логического истолкования как обобщение какой-либо операции над ДРПМ, однако возможны иные, например, "физические" ее интерпретации, скажем, при описании весов, приписываемых различным путям в ориентированных графах, в зависимости от заданных весов отдельных дуг в графах. Примеры интерпретаций подобного рода нетрудно построить.

Отметим, что введенные здесь обобщения операций над ДРПМ – не единственно возможные. Другой вариант определения операций, являющихся обобщениями $\cup$ и $\cap$, получается, например, если мы в определениях (1) и (2) заменим выражения $(x, y, \min(1, \varepsilon + \delta))$ и $(x, y, \varepsilon \cdot \delta)$ соответственно выражениями $(x, y, \max(\varepsilon, \delta))$ и $(x, y, \min(\varepsilon \cdot \delta))$. Вопрос о том, верны ли устанавливаемые ниже теоремы для понятий, измененных указанным образом, остается открытым.

Посредством R обозначим ДНРПМ, являющееся нечетким образом $\widetilde{R}$. Посредством H обознчим ДНРПМ такое, что при любых натуральных x и y тройка (x, y, ε) принадлежит H в том, и только в том случае, когда $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1/2$.

Посредством Ω будем обозначать алгебру над ДНРПМ такую, что ее список операций есть $(+, \cdot, \circ, \oplus, \otimes, \Diamond, ^{-1})$; в качестве списка базисных элементов алгебры Ω фиксируется список (R, H).

Теорема 4.1. *Каждое* ДНРПМ *индуктивно представимо в* Ω *с точностью до эквивалентности (иначе говоря: для всякого* ДНРПМ A *можно построить* ДНРПМ A_1*, индуктивно представимое в* Ω *и эквивалентное* A*).*

Для доказательства этой теоремы нам потребуются некоторые вспомогательные понятия.

Введем в рассмотрение примитивно рекурсивные функции σ, λ, τ, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между парами натуральных чисел и натуральными числами [4], т.е. такие, что

$$\sigma\big(\lambda(z), \tau(z)\big) = z;$$
$$\lambda\big(\sigma(x, y)\big) = x;$$
$$\tau\big(\sigma(x, y)\big) = y.$$

Введем в рассмотрение алгорифмы ρ и ω, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между натуральными числами и двоично-рациональными числами вида $m/2^n$, удовлетворяющими условию $0 \leqslant m/2^n \leqslant 1$; эти алгорифмы определены в [7]. Для каждого двоично-рационального числа ε такого, что $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, $\omega(\varepsilon)$ есть натуральное число, соответствующее ε; алгорифм ρ есть алгорифм, обратный для ω. Алгоритм ω определяется следующими равенствами:

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(1) = 1, \quad \omega\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = 2^{n-1} + k + 1$$

(см. [7]), где n и k суть любые натуральные числа такие, что $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{2k+1}{2^n} \leqslant 1$; алгорифм ρ определяется равенствами $\rho(\omega(\varepsilon)) = \varepsilon$ и $\omega(\rho(n)) = n$. Очевидно, что алгорифмы ω и ρ примитивно рекурсивны в том смысле, что можно построить примитивно рекурсивные функции ρ_1, ρ_2, ω_1 такие, что $\omega_1(m, n) = \omega\big(\frac{m}{2^n}\big)$ при $0 \leqslant m \leqslant 2^n$; числа $\rho_1(n)$ и $\rho_2(n)$ суть, соответственно, числитель и знаменатель дроби $\rho(n)$.

Лемма 4.1. *Для каждого* ДНРПМ A *можно построить стандартное* ДНРПМ, *эквивалентное* A.

В самом деле, стандартное ДНРПМ, эквивалентное A, получается посредством добавления к A множества всех троек вида $(x, y, 0)$.

Лемма 4.2. *Нечеткий образ каждого* ДРПМ *индуктивно представим в* Ω.

Доказательство. Как было сказано выше, R есть нечеткий образ $\widetilde{R}$. Далее, операциям $\cup$, $\cap$, $\circ$, $*$, $\Diamond$, $^{-1}$ над ДРПМ, очевидно, соответствуют операции $+$, $\cdot$, $\circ$, $\otimes$, $\Diamond$, $^{-1}$ над их нечеткими образами.

Но каждое ДРПМ индуктивно представимо в θ; повторяя процесс его построения в терминах операций, участвующих в алгебре Ω, мы получаем, что нечеткий образ рассматриваемого ДРПМ индуктивно представим в Ω.

Следствие. *Нечеткие образы* Q, E, Q_1, V, W_{kl}, Z_k, D_k, T, T_1 ДРПМ, *соответственно*, $\widetilde{Q}$, $\widetilde{E}$, $\widetilde{Q}_1$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{W}_{kl}$, $\widetilde{Z}_k$, $\widetilde{D}_k$, $\widetilde{T}$, $\widetilde{T}_1$, *введенных в разделе* 2, *индуктивно представимы в* Ω.

Лемма 4.3. *Можно построить стандартное* ДНРПМ Δ, *индуктивно представимое в* Ω *и такое, что* $(n, n, \rho(n)) \in \Delta$ *для любого натурального числа* n, *и каждая тройка* $(x, y, \varepsilon) \in \Delta$, *где* $\varepsilon > 0$ *удовлетворяет условиям* $x = y$ *и* $\varepsilon \leqslant \rho(x)$.

Доказательство. Построим некоторые ДНРПМ, индуктивно представимые в Ω; все ДНРПМ, рассматриваемые ниже, стандартны, а потому мы будем иногда опускать указания на тройки вида $(x, y, 0)$ в перечислении элементов, принадлежащих этим множествам.

Построим ДНРПМ G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 такие, что $G_1 = \otimes(R \cdot H)$, $G_2 = W_{00} \circ G_1$, $G_3 = (((Z_0)^{-1} \circ G_2) \cdot E) \cup W_{00}$, $G_4 = (R^{-1} \circ G_3) \circ R$, $G_5 = W_{00} \cup G_4$. Легко видеть, что (не считая элементов вида $(x, y, 0)$) множество G_1 состоит из троек вида $(x, x+k, \frac{1}{2^k})$ для всех натуральных чисел x и для $k \geqslant 1$; множество G_2 состоит из троек $(0, k, \frac{1}{2^k})$ при $k \geqslant 1$; множество $(Z_0)^{-1} \circ G_2$ состоит из троек $(l, k, \frac{1}{2^k})$ при всех натуральных l, k, где $k \geqslant 1$; множество G_3 состоит из троек $(k, k, \frac{1}{2^k})$ при всех k; множество G_4 – из троек $(k+1, k+1, \frac{1}{2^k})$; множество G_5 – из троек $(k, k, \min(1, \frac{1}{2^{k-1}}))$ при всех натуральных k. Теперь рассмотрим примитивно рекурсивную функцию φ, такую что $\varphi(x) = \sigma(\lambda(x)+1, \tau(x))$ при всех натуральных x. Для любого p построим p-ю итерацию $\varphi^{(p)}$ функции φ; эти функции определим посредством равенств $\varphi^{(0)}(x) = x$, $\varphi^{(p+1)}(x) = \varphi(\varphi^{(p)}(x))$. Построим ДРПМ $\widetilde{\Pi} = \{(x, \varphi(x))\}$, $\widetilde{\Gamma} = \{(x, \lambda(x))\}$, $\widetilde{\Sigma} = \{(x, \tau(x))\}$, а также ДНРПМ Π, Γ, Σ, являющиеся нечеткими образами, соответственно $\widetilde{\Pi}$, $\widetilde{\Gamma}$, $\widetilde{\Sigma}$. Построим ДНРПМ G_6 и G_7 такие, что $G_6 = ((\Sigma \circ G_5) \circ \Sigma^{-1}) \cdot E$, $G_7 = G_6 \circ \Pi$. Легко видеть, что множество $(\Sigma \circ G_5) \circ \Sigma^{-1}$ состоит из троек $(x, y, \min(1, \frac{1}{2^{\tau(x)-1}}))$ при всех x и y таких, что $\tau(x) = \tau(y)$; множество G_6 состоит из троек $(x, x, \min(1, \frac{1}{2^{\tau(x)-1}}))$; множество G_7 состоит из троек вида $(x, \varphi(x), \min(1, \frac{1}{2^{\tau(x)-1}}))$ при всех натуральных x. Теперь построим ДНРПМ $G_8 = \oplus G_7$ (заметим, что это единственный случай применения операции $\oplus$ в доказательстве теоремы 4.1). Легко видеть, что множество G_8 состоит из троек $(x, \varphi^{(k)}(x), \min(1, \frac{q}{2^{r(x)-1}}))$ при любых натуральных x, при $k \geqslant 1$ и при всех q таких, что $1 \leqslant q \leqslant k$; в частности, все системы вида $(x, \varphi^{(k)}(x), \min(1, \frac{k}{2^{r(x)-1}}))$ при $k \geqslant 1$ принадлежат G_8. Теперь мы рассмотрим иную параметризацию элементов множества G_8, а именно, введем параметры u и ν такие, что $x = \sigma(u, \nu)$. Ясно, что $\varphi^{(k)}(x) = \sigma(u + k, \nu)$, а потому G_8 может быть представлено как множество троек вида $(\sigma(u, \nu), \sigma(u + k, \nu), \min(1, \frac{q}{2^{\nu-1}}))$ при всех натуральных u, ν, при $k \geqslant 1$ и при всех q таких, что $1 \leqslant q \leqslant k$. Построим ДРПМ $\widetilde{G}_9$, являющееся множеством пар $(\sigma(u + k, \nu), \sigma(u, \nu))$ при всех u, ν и при $k \geqslant 1$; через G_9 обозначим нечеткий образ $\widetilde{G}_9$; через G_{10} – множество $(G_9 \circ G_8) \cdot E$. Легко видеть, что G_{10} есть множество троек $(\sigma(u + k, \nu), \sigma(u + k, \nu), \min(1, \frac{q}{2^{\nu-1}}))$ при всех u, ν, при $k \geqslant 1$ и при всех q таких. что $1 \leqslant q \leqslant k$. Введем параметр t посредством соотношения $t = u + k$; тогда G_{10} может быть представлено как множество троек вида $(\sigma(t, \nu), \sigma(t, \nu), \min(1, \frac{q}{2^{\nu-1}}))$ при всех ν, при $t \geqslant 1$ и при всех q таких, что $1 \leqslant q \leqslant t$ (в самом деле, если $u + k = t$ и $t \geqslant 1$, то тогда $k \geqslant 1$ может принимать все значения, удовлетворяющие условию $1 \leqslant k \leqslant t$, следовательно, q может принимать все значения такие, что $1 \leqslant q \leqslant t$). Но все тройки вида $(x, y, 0)$ принадлежат G_{10}, следовательно, мы можем сказать, что G_{10} есть множество троек $(\sigma(t, \nu), \sigma(t, \nu), \min(1, \frac{q}{2^{\nu-1}}))$ при всех t, ν и при всех q, удовлетворяющих условию $0 \leqslant q \leqslant t$.

Теперь построим ДНРПМ $G_{11} = ((\Sigma \circ G_3) \circ \Sigma^{-1}) \cdot E$ и $G_{12} = G_{10} + G_{11}$. Легко видеть, что G_{11} может быть представлено как множество троек вида $(\sigma(t, \nu), \sigma(t, \nu), \frac{1}{2^\nu})$ при всех t, ν, а G_{12} состоит из троек вида $(\sigma(t, \nu), \sigma(t, \nu), \min(1, \frac{2q+1}{2^\nu}))$, $(\sigma(t, \nu), \sigma(t, \nu), \frac{1}{2^\nu})$ и $(\sigma(t, \nu), \sigma(t, \nu), \min(1, \frac{2q}{2^\nu}))$ при всех t, ν и при q таких, что $0 \leqslant q \leqslant t$; в частности, мы можем сказать, что все тройки вида $(\sigma(t, \nu), \sigma(t, \nu), \min(1, \frac{2t+1}{2^\nu}))$ принадлежат G_{12}, и для всех троек вида $(\sigma(t, \nu), \sigma(t, \nu), \varepsilon)$, принадлежащих G_{12}, имеет место неравенство $\varepsilon \leqslant \min(1, \frac{2t+1}{2^\nu}))$. Наконец, построим ДРПМ $\widetilde{G}_{13}$, состоящее из пар вида $(\omega(\min(1, \frac{2t+1}{2^\nu})), \sigma(t, \nu))$ при всех натуральных t, ν, нечеткий образ G_{13} множества $\widetilde{G}_{13}$, и множество $\Delta = (G_{13} \circ G_{12}) \circ G_{13}^{-1}$. Легко видеть, что все тройки вида $(\omega(\min(1, \frac{2t+1}{2^\nu})), \omega(\min(1, \frac{2t+1}{2^\nu})), \min(1, \frac{2t+1}{2^\nu}))$ принадлежат Δ и для каждой тройки $(\omega(\min(1, \frac{2t+1}{2^\nu})), \omega(\min(1, \frac{2t+1}{2^\nu})), \varepsilon)$, принадлежащей

Δ, имеет место неравенство $\varepsilon \leqslant \min(1, \frac{2t+1}{2^\nu})$. Теперь заметим, что каждое натуральное число n может быть представлено в виде $\omega(\min(1, \frac{2t+1}{2^\nu}))$ и, если $\omega(\min(1, \frac{2t+1}{2^\nu})) = n$, то $\min(1, \frac{2t+1}{2^\nu}) = \rho(n)$. Таким образом, все тройки вида $(n, n, \rho(n))$, принадлежат Δ, и для каждой тройки (n, n, ε), принадлежащей Δ, имеет место неравенство $\varepsilon \leqslant \rho(n)$. Очевидно, что никакая тройки вида (x, y, ε), где $x \neq y$ и $\varepsilon > 0$, не принадлежит Δ. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть A – любое ДНРПМ. Очевидно, что можно построить ДРПМ $\widetilde{B}$ такое, что $(\sigma(x, y), n) \in \widetilde{B}$ в том, и только в том случае, когда $(x, y, \rho(n)) \in A$. Пусть B есть нечеткий образ $\widetilde{B}$. Построим ДНРПМ $B_1 = ((B \circ \Delta) \circ B^{-1}) \cdot E$, где Δ есть ДНРПМ, удовлетворяющее условиям леммы 4.3. Легко видеть, что $(\sigma(x, y), \sigma(x, y), \rho(n)) \in B_1$ в случае, когда $(x, y, \rho(n)) \in A$ и, если $(\sigma(x, y), \sigma(x, y), \varepsilon) \in B_1$, где $\varepsilon > 0$, то $(x, y, \rho(n)) \in A$ для некоторого n такого, что $\varepsilon \leqslant \rho(n)$. Теперь рассмотрим множество $A_1 = (\Gamma^{-1} \circ B_1) \circ \Sigma$, где Γ и Σ – ДРПМ, рассмотренные в доказательстве леммы 4.3. Легко видеть, что если $(x, y, \rho(n)) \in A$, то $(x, y, \rho(n)) \in A_1$ и, если $(x, y, \varepsilon) \in A_1$, где $\varepsilon > 0$, то $(x, y, \rho(n)) \in A$ для некоторого n такого, что $\varepsilon \leqslant \rho(n)$. Следовательно, A и A_1 эквивалентны. Теорема доказана

5. Алгебра, представляющая нечеткие аналоги множества системы М. Пресбургера.

Рассмотрим алгебру Ω^0, полученную из Ω посредством удаления операций $\oplus$ и $\otimes$ и добавления множества $\mathcal{Q}$, являющегося нечетким образом $\widetilde{\mathcal{Q}}$, к списку базисных элементов. Таким образом, список операций алгебры Ω^0 есть $(+, \cdot, \circ, \Diamond, ^{-1})$; список базисных элементов Ω^0 есть $(R,\ H,\ \mathcal{Q})$.

Будем говорить, что ДНРПМ A является *n-дискретным*, если в каждой тройке $(x, y, \varepsilon) \in A$ третья компонента ε имеет вид $\frac{k}{2^n}$ при некотором натуральном k. Будем говорить, что ДНРПМ A является *дискретным*, если оно является n-дискретным при некотором n (например, нечеткий образ всякого ДРПМ является 0-дискретным). Если A есть ДНРПМ, то *ε_0-уровень* множества A для числа ε_0, удовлетворяющего условию $0 \leqslant \varepsilon_0 \leqslant 1$, определяется как множество пар (x, y) таких, что $(x, y, \varepsilon_0) \in A$. Ясно, что для любого ДНРПМ A и для каждого ε_0, удовлетворяющего условию $0 \leqslant \varepsilon_0 \leqslant 1$, ε_0-уровень множества A есть ДРПМ.[2] Будем

[2] В [18] понятие, совпадающее с понятием ε_0-уровня, названо “set of ε_0-

обозначать ε_0-уровень ДНРПМ A посредством $A[\varepsilon_0]$; при этом будем говорить, что ε_0 есть индекс множества $A[\varepsilon_0]$ в A.

Теорема 5.1. ДНРПМ A *индуктивно представимо в* Ω^0 *(с точностью до эквивалентности) в том, и только в том случае, когда оно дискретно, и все его* ε_0*-уровни задаются формулами арифметической системы Пресбургера.*

Более точно: каждое ДНРПМ, индуктивно представимое в Ω^0, дискретно, и все его ε_0-уровни задаются формулами системы Пресбургера; если ДНРПМ дискретно, и все его ε_0-уровни задаются формулами системы Пресбургера, то можно построить ДНРПМ A_1, эквивалентное A и индуктивно представимое в Ω^0.

Лемма 5.1. *Нечеткий образ всякого* ДНРПМ, *индуктивно представимого в* θ^0, *является представимым в* Ω^0.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.2.

Лемма 5.2. *Каждое* ДНРПМ, *индуктивно представимое в* Ω^0, *дискретно, и все его* ε_0*-уровни задаются формулами системы Пресбургера.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по процессу построения ДНРПМ в алгебре Ω^0; достаточно доказать, что всякое ДНРПМ, индуктивно представимое в Ω^0, дискретно и все его ε_0-уровни индуктивно представимы в θ^0 (см. теорему 3.1). Очевидно, все базисные элементы в Ω^0 дискретны (а именно, R и $\mathcal{Q}$ 0-дискретны, H является 1-дискретным). Если ДНРПМ A m-дискретно, а ДНРПМ B n-дискретно, то ДНРПМ A^{-1} m-дискретно, ДНРПМ $A+B\max(m,n)$-дискретно, ДНРПМ $A\cdot B$, $A\circ B$, $A\Diamond B$ $(m+n)$-дискретны (например, каждая третья компонента ε тройки $(x,y,\varepsilon)\in A\circ B$ является произведением $\varepsilon=\delta\cdot\eta$, где $(x,z,\delta)\in A$ и $(z,y,\eta)\in B$ при некотором z, поэтому $\varepsilon=\frac{k}{2^m}\cdot\frac{l}{2^n}=\frac{kl}{2^{m+n}}$ при некоторых k и l). Таким образом, все ДНРПМ, индуктивно представимые в Ω^0, дискретны. Все ε_0-уровни базисных элементов в Ω^0 индуктивно представимы в θ^0, а именно: $R[0]=\widetilde{V}$, $R[1]=\widetilde{R}$, $\mathcal{Q}[0]=\widetilde{V}$, $\mathcal{Q}[1]=\widetilde{Q}$, $H[0]=\widetilde{V}$, $H[\frac{1}{2}]=\widetilde{V}$, $H[1]$ является пустым множеством; оно представимо, например, в виде $\widetilde{R}\cap(\widetilde{R})^{-1}$. Теперь, если $C=A\circ B$, и наше утверждение уже установлено для ДНРПМ A и B, то тогда, как легко

level."

видеть, $C[\varepsilon_0] = (A[\delta_1] \circ B[\eta_1]) \cup (A[\delta_2] \circ B[\eta_2]) \cup \ldots \cup (A[\delta_t] \circ B[\eta_t])$ для любого ε_0, где δ_i, η_i при $1 \leqslant i \leqslant t$ суть все индексы уровней, соответственно в A и B, такие, что $\varepsilon_0 = \delta_i \cdot \eta_i$ (здесь, как и в других аналогичных случаях, мы не рассматриваем пустые уровни множества C). Таким образом, множество $C[\varepsilon_0]$ индуктивно представимо в θ^0. Аналогично, если $C = A\Diamond B$, тогда имеет место аналогичное равенство с заменой символа $\circ$ на $\Diamond$; в этом случае $C[\varepsilon_0]$ также индуктивно представимо в θ^0. Если $C = A+B$, то $C[1] = (A[\delta_1] \cap B[\eta_1]) \cup (A[\delta_2] \cap B[\eta_2]) \cup \ldots \cup (A[\delta_t] \cap B[\eta_t])$, где δ_i, η_i при $1 \leqslant i \leqslant t$ суть все индексы уровней, соответственно, в A и B, такие, что $\delta_i + \eta_i \geqslant 1$; если $\varepsilon_0 < 1$, то $C[\varepsilon_0]$ задается таким же выражением, где δ_i и η_i удовлетворяют условию $\delta_i + \eta_i = \varepsilon_0$. Если $C = A \cdot B$, то $C[\varepsilon_0] = (A[\delta_1] \cap B[\eta_1]) \cup (A[\delta_2] \cap B[\eta_2]) \cup \ldots \cup (A[\delta_t] \cap B[\eta_t])$, где δ_i, η_i при $1 \leqslant i \leqslant t$ суть все индексы уровней, соответственно, в A и B, такие, что $\delta_i \cdot \eta_i = \varepsilon_0$. Наконец, если $C = A^{-1}$, то $C[\varepsilon_0] = (A[\varepsilon_0])^{-1}$ для каждого ε_0 такого, что $0 \leqslant \varepsilon_0 \leqslant 1$. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Если некоторое ДНРПМ A дискретно, и все его ε_0-уровни могут быть заданы посредством формул системы Пресбургера, то можно построить ДНРПМ A_1, эквивалентное A и индуктивно представимое в Ω^0.*

Доказательство. Очевидно, что каждое n-дискретное ДНРПМ A полностью определяется его уровнями вида $A[\frac{k}{2^n}]$, где $0 \leqslant k \leqslant 2^n$. Пусть A – n-дискретное ДНРПМ, и все его уровни $A[\frac{k}{2^n}]$ могут быть заданы посредством формул системы Пресбургера. Ясно, что если множества F и G могут быть заданы посредством формул этой системы, то их дополнения и разность $F - G$ также могут быть заданы посредством формул указанной системы. Рассмотрим ДНРПМ B такое, что $B[1] = A[1]$, $B[\frac{2^n-1}{2^n}] = A[\frac{2^n-1}{2^n}] - A[1]$, $B[\frac{k}{2^n}] = A[\frac{k}{2^n}] - (A[\frac{k+1}{2^n}] \cup A[\frac{k+2}{2^n}] \cup \ldots \cup A[1])$ для всех k таких, что $1 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$, и $B[0] = \widetilde{V}$. Очевидно, что B эквивалентно A, и все его уровни могут быть заданы посредством формул системы Пресбургера; кроме того, все пересечения $B[\frac{k}{2^n}] \cap B[\frac{l}{2^n}]$ при $k > 0$, $l > 0$, $k \neq l$, суть пустые множества.

Теперь построим ДНРПМ U_n такие, что $U_1 = H$, $U_{n+1} = U_n \cdot H$ при любых $n \geqslant 1$; построим также ДНРПМ $Y_{n,k}$ такие, что $Y_{n,0}$ состоит лишь из троек вида $(x, y, 0)$ при всех x, y, и $Y_{n,k+1} = Y_{n,k} + U_n$ при всех $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 0$. Легко видеть. что U_n состоит из троек

$(x, y, 0)$ и $(x, y, \frac{1}{2^n})$ при всех x, y; $Y_{n,k}$ состоит из систем $(x, y, \frac{q}{2^n})$ при всех x, y и при всех q таких, что $0 \leqslant q \leqslant \min(2^n, k)$. Посредством C_k, где $0 \leqslant k \leqslant 2^n$, обозначим нечеткий образ $B[\frac{k}{2^n}]$. Рассмотрим ДНРПМ A_1, являющееся суммой ДНРПМ $C_k \cdot Y_{n,k}$ при $0 \leqslant k \leqslant 2^n$. Легко видеть, что A_1 эквивалентно A и индуктивно представимо в Ω^0 (см. теорему 3.1 и лемму 5.1). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5.1 теперь получается непосредственно на основании лемм 5.2 и 5.3.

Таким образом, мы можем сказать, что нечеткие множества, индуктивно представимые в Ω^0, могут рассматриваться как нечеткие аналоги множеств, задаваемых посредством формул системы М. Пресбургера.

Литература

1. И. Д. Заславский, *О конструктивной истинности суждений и некоторых нетрадиционных системах конструктивной логики.* — В кн.: — Труды ВЦ АН Арм. ССР и ЕГУ. Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники **8** (1975), 99–153.
2. Б. А. Кушнер, *Лекции по конструктивному математическому анализу.* Наука, М. (1973).
3. А. И. Мальцев, *Алгебраические системы.* Наука, М. (1970).
4. А. И. Мальцев, *Алгоритмы и рекурсивные функции.* 2-е изд., Наука, М. (1986).
5. С. Н. Манукян, *О перечислимых предикатах и секвенциальных исчислениях нечеткой логики.* — В кн.: — 9-я Всесоюзная конференция по математической логике. Тезисы докладов, Ленинград (1988), 5.
6. С. Н. Манукян, *О представлении нечетких рекурсивно перечислимых множеств.* — В кн.: — 11-я Межреспубликанская конференция по математической логике. Тезисы докладов, Казань (1992), 94.
7. С. Н. Манукян, *О структуре нечетких рекурсивно перечислимых множеств.* — В кн.: — Труды Института проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕГУ. Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники **17** (1997), 86–91.
8. Г. С. Цейтин, *Один способ изложения теории алгорифмов и перечислимых множеств.* — Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова **72** (1964), 69–98.
9. Н. А. Шанин, *Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства.* — Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова **67** (1962), 15–294.
10. H. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic.* 2nd ed., San Diego, Harcourt, Academic Press (2001).
11. G. Graetzer, *Universal algebra.* 2 ed., New York–Heideberg–Berlin (1979).
12. P. Hajek, *Metamathematics of Fuzzy Logik.* Kluwer (1998).

13. D. Hilbert, P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik.* Band I. Zweite Auflage, Berlin–Heideberg–New York, Springer-Verlag (1968); Русский перевод: Д. Гильберт, П. Бернайс. Основания математики, том I (Логические исчисления и формализация арифметики). Наука, М. (1979).

14. S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics.* D. van Nostrand Comp., Inc., New York–Toronto (1952); Русский перевод: С. К. Клини, Введение в метаматематику, ИИЛ, М. (1957).

15. H. R. Lewis, C. H. Papadimitriou, *Elements of the Theory of Computation.* Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey (1998).

16. S. N. Manukian, *On some properties of recursively enumerable fuzzy sets.* — In: Proceedings of the Conference "Computer Science and Information Technologies," CSIT-99 (August 1999), Yerevan, Armenia, (1999), pp. 5–6.

17. S. N. Manukian, *Algorithmic operators on recursively enumerable fuzzy sets.* — In: Proceedings of the Conference "Computer Science and Information Technologies," CSIT-01 (September 2001), Yerevan, Armenia (2001), pp. 125–126.

18. S. N. Manukian, *On binary recursively enumerable fuzzy sets.* — In: International Conference "21st Days of Weak Arithmetics," St. Petersburg, Russia (June 2002), Abstracts, St. Petersburg (2002), pp. 13–15 URL `http://at.yorku.ca/cgi-bin/amca/cail-01`.

19. E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic.*. D. van Nostrand Comp., Inc., Princeton–Toronto–New York–London (1963); Русский перевод: Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. Наука, М. (1971).

20. V. Novak, *Fuzzy sets and their applications.* Adam Hilger, Bristol (1989).

21. M. Presburger, *Über die Vollstaendigkeit eines gewissen System der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervotritt.* Sprawozdanie z I Kongresu Matematikow Krajow Slowianskich (Comptes Rendu du I Congres des Mathematiciens des Pays Slaves), Warsawa (1930), pp. 92–101.

22. R. M. Smullyan, *Theory of formal systems.* Revised edn. Princeton University Press, Princeton, N.-Y. (1963); Русский перевод: Р. Смальян, Теория формальных систем, Наука, М. (1981).

23. E. Specker, *Nicht konstruktiv beweisbare Saetze der Analysis.* — J. of Symb. Logic **14**, No. 3 (1949), 145–158.

24. L. Zadeh, *Fuzzy sets.* — Information and Control **8** (1965), 338–353.

Manukian S. N. Some algebras of recursively enumerable sets and their applications to the fuzzy logic.

Algebras of operations defined on recursive enumerable sets of different kinds are considered. Every such algebra is given by the list of operations taking part in it; besides, in every considered algebra some list of basic elements is fixed. An element of algebra is said to be inductively representable in this algebra if it can be obtained from the basic elements by use of operations contained in the algebra. Two kinds of recursively enumerable sets are considered: recursively enumerable sets in the usual sense and fuzzy recursively enumerable sets. Some algebras of operations are introduced on two-dimensional recursively enumerable sets of the mentioned kinds. An algebra θ is constructed, where all two-dimensional recursively enumerable sets are inductively representable. A subalgebra θ^o of the algebra θ is constructed, where all two-dimensional recursively enumerable sets described by formulas of M. Presburger's arithmetical system (and only such sets) are inductively representable. An algebra Ω is constructed where all two-dimensional recursively enumerable fuzzy sets are inductively representable. A subalgebra Ω^o of the algebra Ω is constructed such that fuzzy recursively enumerable sets inductively representable in it can be considered as fuzzy analogues of sets described by the formulas of M. Presburger's arithmetical system.

Институт проблем
информатики и автоматизации
Национальной АН Армении, г. Ереван

Поступило 21 мая 2003 г.