Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 305, 2003 г.

В. Г. Бойцов, И. Б. Жуков

ПРОДОЛЖИМОСТЬ ЦИКЛИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЙ ПОЛНЫХ ДИСКРЕТНО НОРМИРОВАННЫХ ПОЛЕЙ

Для полного дискретно нормированного поля K характеристики 0 с полем вычетов характеристики $p > 0$ рассмотрим возможность вложения данного циклического расширения L/K степени p в циклическое расширение степени p^n для различных n. Пусть $c(L/K)$ — это максимальное n, для которого такое вложение возможно. Интерес представляет связь между $c(L/K)$ и $c(LM/M)$, где M/K — данное расширение, линейно разделенное с L/K.

В данной работе доказываются два независимых результата. В первом параграфе мы исследуем $c(LM/M)$ в предположении, что M — достаточно большое p-круговое расширение K (то есть получается присоединением первообразного корня степени p^n из 1 при каком-либо n), а поле K — стандартное (то есть неразветвлено над своим максимальным подполем с совершенным полем вычетов). Во втором параграфе мы показываем, что величина $c(LM/M) - c(L/K)$ ограничена сверху для фиксированного расширения M/K и меняющегося L/K при следующих предположениях:

1) поле K стандартное, содержит первообразный корень степени p из единицы, а его p-круговые расширения являются вполне разветвленными; кроме того, p-круговое расширение K степени p^2 должно иметь достаточно большую глубину ветвления;

2) расширение M/K константное, то есть определено над подполем K с совершенным полем вычетов;

3) $c(L/K)$ конечно и отлично от минимально возможного для данного K.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 01-01-00997) и Программы 2003 г. фундаментальных исследований Президиума РАН "Исследования в фундаментальных областях современной математики".

Обозначения

- p — нечетное простое число;
- ζ — первообразный корень степени p из единицы;
- ζ_{p^i} — первообразный корень степени p^i из единицы.

Для полного дискретно нормированного поля K характеристики 0 с полем вычетов характеристики p:

- $\overline{K}$ — поле вычетов;
- $e_K = v_K(p)$ — индекс ветвления поля K;
- $\mathcal{O}_K = \{a \in K \mid v_K(a) \geqslant 0\}$;
- $\mathfrak{M}_K = \{a \in K \mid v_K(a) > 0\}$;
- $U_K = \mathcal{O}_K \setminus \mathfrak{M}_K$;
- $U_K(i) = 1 + \mathfrak{M}_K^i$;
- $d_K(L/M) = \inf\{v_K(\mathrm{Tr}_{L/M}(y)/y) \mid y \in L^*\}$ — глубина ветвления L/M, $K \subset M \subset L$;
- $K^{(i)} = K(\zeta_{p^i})$;
- $K_n = K^{(i+n)}$ для $K = K^{(i)} \neq K^{(i+1)}$;
- $N_{j/i}$ — сокращенное обозначение для N_{K_j/K_i};
- $M_{n,K} = (N_{n/0}K_n^*)(K^*)^p$.

Максимальное полное подполе k поля K с совершенным полем вычетов будем называть подполем констант поля K. Если $e(K/k) = 1$, то поле K называется стандартным.

§0. Предварительные факты

Лемма 0.1 ([3, §1, Сл. Предл. 3]). *Пусть p — простое, K — поле характеристики, не равной p, L/K — циклическое расширение степени p, i — натуральное число.*

Тогда следующие условия равносильны:

1. *Существует циклическое расширение M/K степени p^i такое, что $L \subset M$.*
2. *$L(\zeta_p) = K^{(1)}(\sqrt[p]{a})$, где $a \in N_{K^{(i)}/K^{(1)}}(K^{(i)})$.*

Далее K обозначает полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с полем вычетов характеристики p.

Лемма 0.2 ([1, Гл. 3, Лемма (1.1)]). *Пусть L/K — конечное сепарабельное расширение простой степени, тогда для любого элемента $a \in \mathfrak{M}_L$*

$$N_{L/K}(1+a) = 1 + N_{L/K}(a) + \mathrm{Tr}_{L/K}(a) + \mathrm{Tr}_{L/K}(b)$$

для некоторого элемента $b \in \mathfrak{M}_L$ такого, что $v_L(b) \geqslant 2v_L(a)$.

Следствие. *Пусть* L/K *— конечное сепарабельное расширение,* n *— натуральное число. Тогда*

$$N_{L/K}U_L(n) \subset U_K(\min(nf(L/K), n' + d_K(L/K))),$$

где n' *— минимальное целое, большее* $n/e(L/K)$.

Лемма 0.3 ([2, (2–16)])**.** *Пусть* K *содержит* ζ_p, *тогда можно классифицировать все циклические расширения* L/K *степени* p *следующим образом:*

1. $a^p = w\pi, d_K(L/K) = e_K$, *где* $w \in U_K$.
2. $a^p = u, d_K(L/K) = e_K$, *где* $u \in U_K$ *и* $\bar{u} \notin \overline{K}^p$.
3. $a^p = 1 + w\pi^s, 0 < s < \frac{pe_K}{p-1}, p \nmid s, d_K(L/K) = e_K - \frac{p-1}{p}s$, *где* $w \in U_K$.
4. $a^p = 1 + u\pi^{pt}, 0 < t < \frac{e_K}{p-1}, d_K(L/K) = e_K - (p-1)t$, *где* $u \in U_K$ *и* $\bar{u} \notin \overline{K}^p$.
5. $a^p = 1 + v(1-\zeta_p)^p, d_K(L/K) = 0$, *где* $v \in U_K$ *и* $\bar{v} \notin \{x^p - x \mid x \in \overline{K}\}$.

Здесь $L = K(a)$, *а* π *— простой элемент* K. *При этом в случаях 1 и 3* L/K *вполне разветвлено, в случаях 2 и 4* L/K *свирепо разветвлено, а в случае 5* L/K *неразветвлено.*

Лемма 0.4 ([2, (4-1)]; см. также [4, Предложение 1.4])**.** *Пусть* L/K *— циклическое расширение степени* p^2, *а* M *– промежуточное поле. Тогда*

$$d_K(L/M) \geqslant \min\left(\left(p - 1 + \frac{1}{p}\right)d_K(M/K), \frac{p-1}{p}e_K + \frac{1}{p}d_K(M/K)\right).$$

Следствие. *В условиях предыдущей леммы пусть* $n \geqslant d_M(L/M)$ *— натуральное число. Тогда*

$$N_{M/K}U_M(n) \subset U_K(n' + d_K(M/K)),$$

где n' *— минимальное целое, большее* $n/e(M/K)$.

§1. Общий случай

С этого момента зафиксируем полное дискретно нормированное поле K характеристики 0 с полем вычетов характеристики p.

Будем писать e вместо e_K и $d(L/M)$ вместо $d_K(L/M)$.

Определение. Для натурального числа n будем говорить, что поле K удовлетворяет условию R_n, если $e(K_n/K) = p^n$, и

$$d(K_n/K) \geqslant \frac{pe}{p-1}.$$

Замечание. Если K удовлетворяет условию R_2, то

$$d(K_1/K) \geqslant \frac{e}{p-1},$$

так как по лемме 0.3 $d(K_2/K_1) \leqslant e$.

Пример. Пусть $K = K^{(i)}$ таково, что $p^i \nmid e$. Тогда K удовлетворяет условию R_2.

Действительно, по лемме 0.3

$$d(K_{j+1}/K_j) = e - \frac{e}{p^{i+j}}$$

для любого натурального j, и, очевидно, $e(K_j/K) = p^j$.

Лемма 1.1. *Пусть K удовлетворяет условию R_m, $0 < j < m$. Тогда*

$$N_{j/0} U_{K_j}(d_{K_j}(K_m/K_j)) \subset U_K\left(\frac{pe}{p-1} + 1\right).$$

Доказательство. Использовать следствие леммы 0.4 и индукцию по j. •

Лемма 1.2. *Пусть L/K — циклическое расширение степени p^n, а M/K — промежуточное расширение степени p. Тогда для любых $a_1, \ldots, a_r \in \mathcal{O}_L$ выполнено*

$$N_{L/K}(a_1 + \ldots + a_r) \equiv N_{L/K} a_1 + \ldots + N_{L/K} a_r \mod U_K(d(M/K)).$$

Доказательство. Не умаляя общности, можем предполагать, что $r = 2$ и $a_1 = 1$. Для $n = 1$ утверждение следует из леммы 0.2. Переход индукции по n следует из следствия леммы 0.4. •

Лемма 1.3. *Предположим что K удовлетворяет условию R_{j+1} для некоторого целого $j > 0$. Тогда для $n \geqslant 0$*

$$N_{j+n/0}(1 + u_1\pi_{j+n} + u_2\pi_{j+n}^2 + \ldots) \equiv$$
$$\equiv N_{j/0}(1 + u_1^{p^n}\pi_j + \ldots + u_m^{p^n}\pi_j^m) \mod U_K\left(\frac{pe}{p-1} + 1\right),$$

где $m = p^j\left(\frac{pe}{p-1} - d(K_j/K)\right)$; π_j, π_{j+n} — *простые элементы* K_j, K_{j+n} *соответственно, согласованные относительно отображения нормы;* $u_l \in U_K$, $\quad l = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. По лемме 1.2 и лемме 1.1. •

Зафиксируем n и будем предполагать, что K_{n+1}/K вполне разветвлено.

Через $\pi = \pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n+1}$ обозначим последовательность простых элементов полей $K, K_1, \ldots, K_{n+1}$ соответственно, согласованных относительно отображения нормы.

Лемма 1.4. *Если* $d_{K_n}(K_{n+1}/K_n) > e/p^n$, *то для* $A \in M_{n,K}/M_{n+1,K}$ *существует* $b \in K_n$ *такой, что* A *является классом* $N_{n/0}(b)$, *и существует представление* b *в виде*

$$b = 1 + u_{r_1}\pi_n^{r_1} + u_{r_2}\pi_n^{r_2} + \ldots + u_{r_m}\pi_n^{r_m},$$

где $u_{r_j} \in U_K$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\bar{u}_{r_j} \notin \overline{K}^p$, $p \nmid r_j$ *для любого* j, $r_m \leqslant p^n\left(\frac{pe}{p-1} - d(K_n/K)\right)$, *и* $\{r_j\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$ — *набор строго возрастающих натуральных чисел.*

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь $b \in K_n$ такой, что A является классом $N_{n/0}(b)$.

Можно предполагать, что $b \in U_{K_n}$, так как $v_K(b-1) = 0$, можно представить $b = u_0\pi_n^{r_0}b_1$, где $b_1 \in U_{K_n}(1)$, а $u_0 \in U_K$. Так как $N_{n/0}(u_0) \in (K^*)^{p^n}$, то можно считать $u_0 = 1$. Но π_n — норма некоторого элемента K_{n+1}, таким образом можно заменить b на b_1.

Итак,

$$b = 1 + u_{r_1}\pi_n^{r_1} + u_{r_2}\pi_n^{r_2} + \ldots + u_{r_m}\pi_n^{r_m}, \qquad (*)$$

где $u_{r_j} \in U_K, r_1 < \ldots < r_m$, и по следствию из леммы 0.4 можно считать, что $r_m \leqslant p^n\left(\frac{pe}{p-1} - d(K_{n-1}/K)\right)$.

Рассмотрим минимальное r_j такое, что $p \mid r_j$.

Тогда для

$$b_1 = \frac{b}{1 + u_{r_j}\pi_{n-1}^{\frac{r_j}{p}}}$$

получим, что существует представление b_1 в виде $(*)$, для которого $r_j < r_j^1$, где r_j^1 — минимальное такое, что $p \mid r_j^1$. Но

$$N_{n/0}\left(1 + u_{r_j}\pi_{n-1}^{\frac{r_j}{p}}\right) \in (K^*)^p$$

следовательно, A — класс $N_{n/0}(b_1)$ и можно заменить b на b_1.

Рассмотрим минимальное r_j такое, что $\bar{u}_{r_j} \in (\overline{K}^*)^p$.

Существует $v \in U_{K_{n+1}}$ такое, что $\bar{v}^p = \bar{u}_{r_j}$ и для

$$b_1 = \frac{b}{N_{n+1/n}(1 + v\pi_{n+1}^{r_j})}$$

из ограничения на глубину расширения K_{n+1}/K_n получим, что существует представление b_1 в виде (*), для которого $r_j < r_j^1$, где r_j^1 — минимальное такое, что класс вычетов коэффициента при $\pi_n^{r_j^1}$ принадлежит $(\overline{K}^*)^p$.

Тогда

$$N_{n+1/0}\big(1 + v\pi_{n+1}^{\frac{r_j}{p}}\big) \in M_{n+1,K}$$

таким образом, A— класс $N_{n/0}(b_1)$ и можно заменить b на b_1.

Повторяя эти два шага, мы получим требуемое b. •

Определение. Элементы $U_K\left(\frac{pe}{p-1}\right) \setminus U_K\left(\frac{pe}{p-1}+1\right)$ называются примарными.

Теорема 1.5. *Пусть поле K — стандартное. Тогда для любого циклического расширения $M = K(\sqrt[p]{a})/K$ степени p, где $a \in K$, возможны только два случая:*

(i) *существует натуральное число $N > 0$ такое, что для любого $i > N$ выполнено $a \notin M_{1,K_i}$;*

(ii) *a можно представить в виде произведения примарного элемента, элемента подполя констант и элемента $(K^*)^p$.*

Доказательство. Пусть a не удовлетворяет условию (ii).

Для любого $i \geqslant 0$ рассмотрим элемент $a_i \in K_i$ такой, что

$$a_i \equiv a \mod (K_i)^p$$

и нормирование $a_i - 1$ максимально среди всех таких элементов.

Для $j \geqslant 0$ положим $\bar{a}'_j$ равным классу вычетов

$$\frac{a_j - \varepsilon}{\pi_j^{v_j(a_j-\varepsilon)}},$$

где π_j — произвольный простой элемент подполя констант поля K_j, $\varepsilon = 1$, если $v_j(a_j - 1) > 0$, и $\varepsilon = 0$, если $v_j(a_j - 1) = 0$.

Поскольку a не удовлетворяет условию (ii), то расширение $K(a)/K$ — инфернальное, то есть не лежит в композите константного и неразветвленного расширений (по лемме 0.3 неразветвленные расширения соответствуют примарным элементам). Из [5, Теорема 3.2.1] следует, что для достаточно большого i расширения $K_i(a)/K_i$ являются свирепыми, вследствие чего $\bar{a}'_i$ не принадлежит $\overline{K}^p$.

Таким образом, существует такое натуральное число N_0, что для $i > N_0$ выполняется $\bar{a}'_i \not\equiv 0 \mod \overline{K}^p$.

Для a, не удовлетворяющего условию (ii), имеем

$$v_i(a_i - 1) = n_i = n_{N_0} p^{i-N_0} < \frac{pe_i}{p-1},$$

где $e_i = e_{K_i}$.

Из леммы 0.4 следует, что существует натуральное $N > N_0$ такое, что для $i > N$

$$\frac{p \cdot d_{K_i}(K_{i+1}/K_i)}{p-1} = h_i > n_i.$$

Будем также считать N настолько большим, что K_{i+1}/K_i вполне разветвлено при любом $i > N$.

Если для некоторого $i > N$ имеет место $a \in M_{1,K_i}$, тогда

$$a_i = N_{i+1/i}(1+b) \cdot c^p,$$

где $b \in K_{i+1}, c \in K_i$.

Рассуждая как в доказательстве леммы 1.4, получаем, что $p \nmid v_{i+1}(b)$. Положим $n'_i = v_i(N_{i+1/i}(1+b) - 1)$, $n''_i = v_i(c^p - 1)$.

Рассмотрим случай, когда $n'_i \leqslant n_i$. Поскольку $n_i < h_i$, имеем $n'_i = v_i(N_{i+1/i}(b)) = v_{i+1}(b)$, откуда $p \nmid n'_i$. Следовательно, $n'_i < n_i$, и $n'_i = n''_i$, что невозможно, поскольку $p | n''_i$ при условии $n''_i < \frac{pe_i}{p-1}$.

Наконец, случай $n'_i > n_i$ также невозможен, поскольку $\bar{a}'_i \notin \overline{K}^p$, тогда как класс вычетов $(c^p - 1)/\pi_i^{n''_i}$ лежит в $\overline{K}^p$. $\bullet$

§2. Поля с условием R_2

Далее полагаем:

(1) K — абсолютно стандартно, то есть K — стандартно, и K_n/K вполне разветвлено для любого n;

(2) K удовлетворяет условию R_2.

Обозначим через h скачок K_1/K. Заметим, что $p \nmid h$ по лемме 0.3.

Обозначим через h' минимальное целое такое, что

$$\tfrac{pe}{p-1} - h' < \tfrac{1}{p}\bigl(\tfrac{pe}{p-1} - h\bigr).$$

Пусть π — простой элемент поля K, принадлежащий подполю констант. Определим $U(i;N)$ как подгруппу K^*, порожденную всеми $1+\pi^j u^{p^N}$, где $j \geqslant i$, $u \in U_K$.

Пусть $\lambda > 0$ — *рациональное* число. Определим $E(\lambda) = E_K(\lambda)$ как подгруппу K^*, порожденную $(K^*)^p$, π и всеми элементами вида $1+\pi^i u^{p^N}$, где $u \in U_K$, $1 \leqslant i \leqslant \frac{pe}{p-1}$,

$$p^{-N}\bigl(\tfrac{pe}{p-1} - i\bigr) < \lambda.$$

Легко видеть, что мы получим ту же группу, если возьмем только образующие с $p \nmid i$, $i \leqslant \frac{pe}{p-1} - \lambda$, и с $i > \frac{pe}{p-1} - \lambda$.

Лемма 2.1. 1. $U(h+1;N-1)\cdot(K^*)^p = N_{N/0}U_{K_N}(h+1)\cdot(K^*)^p$ *для любого* $N \geqslant 1$.

2. $U(h;N-1) \supset N_{N/0}U_{K_N}(h)$ *для любого* $N \geqslant 1$.

Доказательство. Оба утверждения вытекают из леммы 1.3; при доказательстве первого используется индукция по $\frac{pe}{p-1} - v(u)$, где u — заданный элемент $U(h+1;N-1)$. •

Следствие. $U(h';N) \subset M_{N+2,K}$ *для любого* $N \geqslant 0$.

Доказательство. Следует из

$$1 + u^{p^N}\pi^{h'+\delta} \equiv 1 + u'^{p^{N+1}}\pi^{h+\delta'} \mod (K^*)^p,$$

где $h+\delta' = p(h'+\delta-e)$ для $\delta \geqslant 0$, и

$$1 + u'^{p^{N+1}}\pi^{h+\delta'} \in M_{N+2,K}$$

по лемме 2.1. •

Лемма 2.2. *Пусть* $N \geqslant 1$. *Тогда*

$$M_{N,K} \subset E\bigl(p^{-N+1}\bigl(\tfrac{pe}{p-1} - \tfrac{p-1}{p}h\bigr)\bigr).$$

Доказательство. $M_{N,K} \subset U(1;N)U(D;N-1)(K^*)^p$, где D — минимальное целое, большее $d(K_1/K) = \frac{(p-1)h}{p}$. •

Для $N \geqslant 1$ обозначим через D_N класс таких элементов $b \in K^*$, которые можно представить в виде

$$b = N_{N/0} \prod_{i=1}^{t} (1 + \pi_N^{n_i} u_i),$$

где для $j \geqslant 0$ полагаем π_j — простой элемент поля K_j, норма которого равна π; $0 < n_1 < \dots < n_t < h + p(h' - h)$ взаимно просты с p; $n_i \equiv h \mod p$ для любого i такого, что $n_i > h$; $u_i \in U_K$; $\bar{u}_i \notin \overline{K}^p$.

Заметим, что по леммам 0.2 и 1.3

$$N_{N/0}(1 + \pi_N^{n_i} u_i) \equiv 1 + \pi^{n_i} u_i^{p^N} \mod U_K(n_i + 1),$$

при $n_i < h$;

$$N_{N/0}(1 + \pi_N^{n_i} u_i) \equiv 1 + \pi^{\frac{n_i}{p} + d(K_1/K)} u_i^{p^{N-1}} \mod U_K(\frac{n_i}{p} + d(K_1/K) + 1),$$

при $n_i > h$; и

$$N_{N/0}(1 + \pi_N^{h} u_i) \equiv 1 + \pi^{h}(u_i^{p^{N-1}} + u_i^{p^N}) \mod U_K(h + 1).$$

Лемма 2.3. $M_{l+N,K} = D_N M_{l+N+1,K}$.

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия к лемме 2.1 с учетом леммы 1.4. •

Лемма 2.4. *Пусть* $N \geqslant 1$, $s \geqslant 0$, $b_0 \in D_N$, $\dots$, $b_s \in D_{N+s}$, *и* $b_0 \neq 1$. *Тогда*

$$b_0 \dots b_s \notin E\big(p^{-(N+s)}\big(\tfrac{pe}{p-1} - h + p^s\big)\big). \tag{1}$$

Доказательство. Индукция по s. Пусть $s = 0$. Если $v(b_0 - 1) < h$, то

$$b_0 \equiv 1 + \pi^i u^{p^N} \mod U_K(i + 1),$$

где $p \not| i$, $u \in U_K$ и $\bar{u} \notin \overline{K}^p$. Из предположения $b_0 \in E(\lambda)$ следует, что

$$\lambda > p^{-N}\big(\tfrac{pe}{p-1} - i\big) \geqslant p^{-N}\big(\tfrac{pe}{p-1} - h + 1\big).$$

Далее, пусть $v(b_0 - 1) \geqslant h$. Тогда

$$b_0 \equiv 1 + \sum_{i=i_0}^{\frac{pe}{p-1} - 1} \pi^i u_i^{p^{N-1}} \mod U_K\big(\tfrac{pe}{p-1}\big),$$

где $i_0 < h'$, $u_i \in \mathcal{O}_K$ для всех i, $\bar{u}_{i_0} \notin \overline{K}^p$. Из предположения $b_0 \in E(\lambda)$ следует, что

$$\begin{aligned}\lambda &> p^{-(N-1)}\left(\tfrac{pe}{p-1} - i_0\right)\\ &\geqslant p^{-(N-1)}\left(\tfrac{pe}{p-1} - h' + 1\right)\\ &\geqslant p^{-N}\left(\tfrac{pe}{p-1} - h + 1\right).\end{aligned}$$

Далее, пусть $s > 0$. Если $v(b_s - 1) \geqslant h$, из части 2 леммы 2.1 следует

$$b_s \in U(h; N+s-1) \subset E\left(p^{-(N+s-1)}\left(\tfrac{pe}{p-1} - h\right)\right).$$

По предположению индукции

$$b_0 \dots b_{s-1} \notin E\left(p^{-(N+s-1)}\left(\tfrac{pe}{p-1} - h + p^{s-1}\right)\right), \tag{2}$$

таким образом,

$$b_0 \dots b_s \notin E\left(p^{-(N+s-1)}\left(\tfrac{pe}{p-1} - h + p^{s-1}\right)\right), \tag{3}$$

и тем более (1).

Таким образом, можно предполагать, что $\alpha = v(b_s - 1) < h$. Имеем

$$b_s \equiv N_{1/0} \prod_{i=1}^{t} (1 + \pi_1^{n_i} u_i^{p^{N+s-1}}) \mod (K^*)^p,$$

где $n_1 = \alpha$. Пусть

$$T = \prod_{i=1}^{t} \left(1 + \pi^{n_i} u_i^{p^{N+s}}\right).$$

Тогда легко видеть, что $v(b_s/T - 1) \geqslant (\alpha + (p-1)h)/p$, таким образом,

$$b_s/T \in E\left(p^{-(N+s-1)}\left(\tfrac{pe}{p-1} - (\alpha + (p-1)h)/p\right)\right). \tag{4}$$

Предположим, что $\alpha > h - p^s$. Отсюда следует

$$T \in E\left(p^{-(N+s)}\left(\tfrac{pe}{p-1} - h + p^s\right)\right). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что

$$b_s \in E\left(p^{-(N+s-1)}\left(\tfrac{pe}{p-1} - h + p^{s-1}\right)\right),$$

и опять, используя предположение индукции (2), мы получим (3).

Осталось рассмотреть случай $\alpha \leqslant h - p^s$. Имеем

$$b_0 \dots b_s \equiv 1 + \pi^{\alpha'} u^{p^{N'}} \mod U(\alpha' + 1),$$

где

$$\alpha' = \min(\alpha, v(1 - b_0 \dots b_{s-1})) \leqslant h - p^s.$$

Заметим, что если $\alpha = v(1 - b_0 \dots b_{s-1})$, то

$$b_s \in U(\alpha, N + s) \cdot U_K(\alpha + 1),$$

но

$$b_0 \dots b_{s-1} \notin U(\alpha, N + s) \cdot U_K(\alpha + 1).$$

Таким образом, $N' \leqslant N + s$, $u \in U_K$, $\bar{u} \notin \overline{K}^p$. Непосредственные вычисления (как в случае $s = 0$, $v(b_0 - 1) < h$) дают (1). $\bullet$

Предложение 2.5. *Пусть* $N \geqslant 1$, $a \in M_{N,K}$, $a \notin M_{N+1,K}$. *Определим* m_h *из условия* $p^{m_h} < h \leqslant p^{m_h+1}$. *Тогда*

$$a \notin E\big(p^{-(N+m_h)}\big(\tfrac{pe}{p-1} - h + p^{m_h}\big)\big).$$

Доказательство. Пусть $a \in M_{N,K} \setminus M_{N+1,K}$. Пусть $s = m_h$. Из леммы 2.3 следует, что $a = b_0 \dots b_s a'$, где $b_i \in D_{N+i}$, $i = 0, \dots, s$, $a' \in M_{N+s+1,K}$ и $b_0 \neq 1$.

Из леммы 2.4 следует, что

$$b_0 \dots b_s \notin E\big(p^{-(N+s)}\big(\tfrac{pe}{p-1} - h + p^s\big)\big).$$

По лемме 2.2

$$M_{N+s+1,K} \subset E\big(p^{-(N+s)}\big(\tfrac{pe}{p-1} - \tfrac{p-1}{p}h\big)\big).$$

Так как $h \leqslant p^{s+1}$, то

$$a \notin E\big(p^{-(N+s)}\big(\tfrac{pe}{p-1} - h + p^s\big)\big). \quad \bullet$$

Замечание.

$$E\big(p^{-(N+m_h)+1}\big(\tfrac{pe}{p-1} - \tfrac{p-1}{p}h\big)\big) \subset E\big(p^{-(N+m_h)}\big(\tfrac{pe}{p-1} - h + p^{m_h}\big)\big).$$

Предложение 2.6. *Пусть L/K — константное расширение.*

1. $E_K(\lambda) \subset E_L(\lambda e(L/K))$.

2. Пусть $a \notin E_K(\lambda)$, тогда $a \notin E_L(\lambda e(L/K))$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно, будем доказывать второе.

Если L/K неразветвлено либо слабо разветвлено, то утверждение очевидно. Пусть L/K — вполне разветвленное расширение степени p. Не умаляя общности, будем считать, что λ — минимальное, для которого $a \notin E(\lambda)$. Тогда

$$a \equiv 1 + \pi^i u^{p^N} \mod E_K(\lambda),$$

где π — простой в K, $p \nmid i$, $u \in U_K$, $\overline{u} \notin \overline{K}^p$, и

$$p^{-N}\big(\tfrac{pe}{p-1} - i\big) = \lambda.$$

Отсюда

$$a \equiv 1 + \pi_L^{pi} u^{p^N} \mod E_L(p\lambda),$$

где π_L — простой в L, и легко видеть, что $a \notin E_L(p\lambda)$. •

Теорема 2.7. *Пусть L/K — константное расширение. Тогда существует целое δ такое, что для любого натурального n и любого $a \in M_{1,K}$, если $a \notin M_{n+1,K}$, то $a \notin M_{n+\delta,L}$.*

Доказательство. Для достаточно большого j поле L удовлетворяет условию R_{j+1}. Следовательно, по лемме 1.3 при $s \geqslant 0$ имеем

$$M_{j+s,L} \subset E_L\big(p^{-s} \cdot \tfrac{pe}{p-1}\big).$$

Легко видеть, что можно подобрать $\delta > j$, при котором

$$p^{-(\delta-j)} \cdot \tfrac{pe}{p-1} \leqslant p^{-m_h}\big(\tfrac{pe}{p-1} - h + p^{m_h}\big)e(L/K),$$

где m_h определяется из условия $p^{m_h} < h \leqslant p^{m_h+1}$.

Пусть теперь $a \in M_{1,K}$, $a \notin M_{n+1,K}$. Пусть $N \leqslant n$ таково, что $a \in M_{N,K}$, $a \notin M_{N+1,K}$. По предложению 2.5,

$$a \notin E_K\big(p^{-(N+m_h)}\big(\tfrac{pe}{p-1} - h + p^{m_h}\big)\big).$$

По предложению 2.6,

$$a \notin E_L\big(p^{-(N+m_h)}\big(\tfrac{pe}{p-1} - h + p^{m_h}\big)e(L/K)\big)$$

и тем более

$$a \notin E_L\big(p^{-(N+\delta-j)} \cdot \tfrac{pe}{p-1}\big)$$

и $a \notin M_{N+\delta,L}$. •

Список литературы

1. I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local fields and their extensions.* — AMS, 2002.
2. O. Hyodo, *Wild ramification in the imperfect residue field case.* — Adv. Studies in Pure Math. **12** (1987), 287–314.
3. H. Miki, *On $\mathbb{Z}_p$-extensions of complete p-adic power series fields and function fields.* — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. **2** (1974), 377–393.
4. И. Б. Жуков, *Структурная теорема для полных полей.* — Труды Санкт-Петербургского мат. общества **3** (1995), 215–234.
5. И. Б. Жуков, М. В. Коротеев, *Устранение высшего ветвления.* — Алгебра и анализ **11**, № 6 (1999).

Bojtsov V. G., Zhukov I. B. Continuability of cyclic extensions of complete discrete valuation fields.

For a complete discrete valuation field K of characteristic 0 with the residue field of characteristic $p > 0$ consider the embedding problem of a given cyclic extension M/K of degree p into a cyclic extension of degree p^n for various n. Let $c(M/K)$ be the maximal n such that this embedding problem has a solution. In this paper we consider relations between $c(M/K)$ and $c(LM/L)$ where L/K is a given extension linearly disjoint with M/K.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 6 сентября, 2003 г.