Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 305, 2003 г.

А. И. Виноградов

АСИМПТОТИКА ГЕРМАНА ВЕЙЛЯ И СВЕРТКИ РАНКИНА

к 80 летию И. Р. Шафаревича

Введение

В этой работе мы получим известную асимптотику Германа Вейля для собственных чисел оператора Лапласа методами теории чисел, используя укороченное функциональное уравнение для сверток Ранкина. При этом мы будем работать с конгруэнц-группами $\Gamma_0(q)$, снабженными мультипликатором $\chi \equiv \chi_q$ – квадратичным характером $\bmod q$. Характер χ_q будем считать невырожденным, т.е. q является ведущим модулем характера χ_q. При арифметическом методе доказательства удается получить корневое понижение в остатке для асимптотики Германа Вейля.

Если перейти к языку строгих определений, то мы будем работать с пространством автоморфных собственных функций, базисом которого являются собственные функции дискретной серии оператора Лапласа

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$\Delta \cdot f_j(z) = \lambda_j \cdot f_j(z), \tag{0.1}$$

которые автоморфны относительно группы $\Gamma_0(q)$ с выбросом мультипликатора $\chi(\sigma)$ в инвариантном равенстве

$$f_j(\sigma z) = \chi(\sigma) \cdot f_j(z), \quad \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q), \tag{0.2}$$

где мультипликатор $\chi(\sigma)$ определяется равенством

$$\chi(\sigma) \equiv \chi_q(d). \tag{0.3}$$

В дополнение к равенству (0.1) мы примем гипотезу Сельберга [1] об отсутствии малых собственных значений ($0 < \lambda_j < 1/4$)

в спектре конгруэнц-групп. Это условие не принципиально, но позволяет упростить вычисления и не рассматривать ряды Фурье для собственных функций $f_j(z)$, отвечающих малым собственным значениям. Они существенно отличаются от рядов Фурье функций $f_j(z)$, отвечающих большим собственным значениям ($\lambda_j \geqslant 1/4$), в сторону их усложнения. У них появляется нулевой коэффициент Фурье, отличный от нуля. Поэтому такие функции $f_j(z)$ не обращаются в ноль в вершинах фундаментальной области F_1 и требуют особого изучения. Подробности можно найти в работах [2, 3, 13].

Базис (0.1) с условием (0.2) будем также считать ортонормированным и выбранным так, что все функции $f_j(z)$ являются одновременно и собственными функциями всех операторов Гекке. При этом в систему операторов Гекке мы включим и оператор отражения:

$$T_{-1} \cdot f_j(z) \equiv f_j(-\overline{z}) = \xi \cdot f_j(z), \quad \xi_j = \pm 1. \tag{0.4}$$

Подробности об этом базисе можно найти в работе [14]. Здесь же отметим, что систему нормировочных коэффициентов $\{\eta(n)\}$ в работе [14] для операторов Гекке $\{T_n\}$ удобно дополнить сопряженной системой $\{\overline{\eta(n)}\}$ для сопряженных операторов Гекке $\{\overline{T_n}\}$, чтобы нормированный оператор $T_n^* = \eta(n) \cdot T_n$ и сопряженный к нему $\overline{T_n^*} = \overline{\eta(n)} \cdot \overline{T_n}$ имели одно и то же вещественное собственное значение

$$t^*(n) = \eta(n) \cdot t(n) = \overline{\eta(n)} \cdot \overline{t(n)} = \overline{t^*(n)}.$$

Если оставить тот же самый множитель $\eta(n)$ и для сопряженного оператора $\overline{T_n}$, тогда собственные значения нормированных операторов $\eta(n) \cdot T_n$ и $\eta(n) \cdot \overline{T_n}$ будут отличаться знаком при $\chi(n) = -1$, что, конечно же, неудобно.

Для того, чтобы связать асимптотику Вейля со свертками Ранкина, рассмотрим ряд Фурье функции $f_j(z)$

$$f_j(z) = \sum_{n \neq 0} \rho_j(n) \cdot \sqrt{y} K_{i\varkappa_j}(2\pi |n| y) e^{2\pi i n x}, \tag{0.5}$$

где $z = x + iy$, $y > 0$, $\varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - 1/4}$, K – функция Макдональда (см. [5])

$$K_s(a) = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty x^{s-1} \exp\left[-\frac{a}{2}\Big(x + \frac{1}{x}\Big)\right] dx.$$

Нормированная свертка Ранкина $R_j^*(s)$ для функции $f_j(z)$ определяется равенством

$$R_j^*(s) = \iint\limits_{\Pi} |f_j(z)|^2 \cdot y^s \, d\mu(z), \tag{0.6}$$

где Π – единичная полоса верхней полуплоскости H:

$$\Pi = \Big\{ z = x + iy, |x| \leqslant \frac{1}{2}, y > 0 \Big\},$$

$d\mu(z)$ – инвариантный относительно $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ дифференциал

$$d\mu(z) = \frac{dx dy}{y^2}.$$

Подставляя (0.5) в (0.6) и меняя порядки интегрирования и суммирования (что законно в области абсолютной сходимости $\operatorname{Re} s > 1$), получаем в этой области явный вид свертки

$$R_j^*(s) = 2^{s-2} \cdot \Gamma_j(s) \cdot R_j(s), \tag{0.7}$$

где

$$\Gamma_j(s) = \frac{(2\pi)^{-s}}{\Gamma(s)} \cdot \Gamma^2\Big(\frac{s}{2}\Big) \cdot \Gamma\Big(\frac{s}{2} + i\varkappa_j\Big) \Gamma\Big(\frac{s}{2} - i\varkappa_j\Big),$$

$$R_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} |\rho_j(m)|^2 m^{-s}. \tag{0.8}$$

Равенство (0.8) определяет ненормированную свертку Ранкина.

§1. Функциональное уравнение

В равенстве (0.8) молчаливо подразумевается, что свертки $R_j(s)$ рассматриваются относительно вершины $\alpha = \infty$ фундаментальной области F_q группы $\Gamma_0(q)$. На самом деле, для любой собственной функции $f_j(z)$ существует столько разных сверток Ранкина, сколько вершин α имеет фундаментальная области F_q. В каждом из этих случаев используется свое разложение Фурье для $f_j(z)$ относительно вершины α

$$f_j(\sigma_\alpha z) = \sum_{n \neq 0} \rho_{j,\alpha}(n) \cdot \sqrt{y} K_{i\varkappa_j}(2\pi |n| y) e^{2\pi i n x}, \tag{1.1}$$

где σ_α – нормированная матрица, переводящая вершину ∞ в α

$$\sigma_\alpha(\infty) = \alpha. \tag{1.2}$$

Подробности о структуре матриц σ_α можно найти в работе [6].

Нормированная свертка Ранкина $R^*_{j,\alpha}(s)$ относительно вершины α определяется равенством

$$R^*_{j,\alpha}(s) = \iint\limits_{\Pi} |f_j(\sigma_\alpha z)|^2 \cdot y^s \, d\mu(z). \tag{1.3}$$

Равенство (0.6) является частным случаем равенства (1.3), когда $\alpha = \infty$. В этом случае $\sigma_\infty = 1$ (в матричном смысле) и равенство (1.3) переходит в (0.6).

Подставляя разложение Фурье (1.1) в (1.3), получаем общий вид равенства (0.7)

$$R^*_{j,\alpha}(s) = 2^{s-2} \cdot \Gamma_j(s) \cdot R_{j,\alpha}(s), \tag{1.4}$$

где $\Gamma_j(s)$ – то же самое, что и в (0.7),

$$R_{j,\alpha}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} |\rho_{j,\alpha}(m)|^2 m^{-s}. \tag{1.5}$$

Действуя на аргумент ядра в (1.3) множеством матриц $\sigma_\alpha^{-1} \cdot \sigma$, где $\sigma \in \Gamma/\Gamma_\infty$ (представитель из единичной полосы), $\Gamma = \Gamma_0(q)$, приведем равенство (1.3) к новому виду

$$R^*_{j,\alpha}(s) = \iint\limits_{F_q} |f_j(z)|^2 \cdot E_\alpha(z,s) \cdot d\mu(z). \tag{1.6}$$

где E_α – ряд Эйзенштейна вершины α

$$E_\alpha(z,s) = \sum_{\sigma \in \Gamma\big|_{\Gamma_\infty}} y^s(\sigma_\alpha^{-1}\sigma z). \tag{1.7}$$

Используя теорию рядов Эйзенштейна [6, 7], получаем мероморфную продолжимость свертки (1.6) в левую полуплоскость $\operatorname{Re} s \leqslant 1$ для всех вершин α. В частности, вычет ряда Эйзенштейна (1.7) в полюсе $s = 1$ не зависит от вершины и определяет также вычет свертки $R^*_{j,\alpha}$ с помощью равенства (1.6)

$$\operatorname*{res}_{s=1} R^*_{j,\alpha}(s) = \operatorname*{res}_{s=1} E_\alpha(z,s) = \frac{\pi}{2q} \cdot \zeta^{-1}(2) \cdot \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}. \tag{1.8}$$

Подробные вычисления можно найти в [6].

Кроме продолжимости в левую полуплоскость нам в дальнейшем потребуются оценки сверток Ранкина $R_{j,\alpha}(s)$ из равенства (1.5) в левой полуплоскости. Для того, чтобы их получить, надо иметь функциональное уравнение для $R_{j,\alpha}(s)$, которое позволяет использовать для сверток Ранкина аналоги классической техники укороченных уравнений и оценок по выпуклости [4, 8, 9]. Но эта техника требует, чтобы исследуемые ряды были целыми функциями во всей комплексной плоскости, кроме конечного числа полюсов на вещественной оси. Для того, чтобы поместить свертки Ранкина в этот класс функций, надо обратить внимание на то, что основную мероморфность сверткам Ранкина (1.5) придает классическая дзета-функция Римана от удвоенного аргумента $2 \cdot s$ без простых делителей q в ее эйлеровском произведении

$$\zeta_q(2s) = \zeta(2s) \cdot \prod_{p|q} \Big(1 - \frac{1}{p^{2s}}\Big). \tag{1.9}$$

Это связано с тем, что $\zeta_q(2s)$ входит в знаменатель c-матрицы ряда Эйзенштейна E_α из (1.7). Поэтому следует умножить равенство (1.6) на $\xi_q(2s)$ и привести его к нормированному виду

$$\xi_q(2s) \cdot R^*_{j,\alpha}(s) = \iint\limits_{F_q} |f_j(z)|^2 \cdot \xi_q(2s) \cdot E_\alpha(z,s) \cdot d\mu(z), \tag{1.10}$$

где

$$\xi_q(s) = \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \zeta_q(s) = \xi_1(s) \cdot \prod_{p|q} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big),$$

т.е. это классическая нормировка Римана для $\zeta_1(s) \equiv \zeta(s)$, “ухудшенная” множителями q из эйлеровского произведения.

Разложение Фурье ряда Эйзенштейна E_α относительно вершины $\beta = \infty$ (подробности см. в [6]) показывает, что произведение $\xi_q(2s) \cdot E_\alpha(z,s)$ из ядра (1.10) является целой функций s во всей комплексной плоскости, кроме точки $s = 1$, где оно имеет полюс первого порядка. Точка $s = 1/2$ является разрешимой особенностью, как это видно из правой части равенства (1.10). Поэтому точка $s = 1/2$ является нулем свертки Ранкина (1.5): $R_{j,\alpha}(1/2) = 0$.

Для вычета левой части (1.10) в точке $s = 1$ справедливо равенство

$$\operatorname*{res}_{s=1} {}_{s=1}\zeta_q(2s)\cdot R^*_{j,\alpha}(s) = v_q \operatorname{ch}\pi\varkappa_j, \qquad v_q = 2\cdot\frac{\varphi(q)}{q^2}. \tag{1.11}$$

Оно следует из (1.8), а также из нормировочного равенства

$$\iint\limits_{F_q} |f_j(z)|^2\cdot d\mu(z) = 1$$

и равенства

$$\Gamma_j(s)\Big|_{s=1} = \frac{\pi}{2\cdot\operatorname{ch}\pi\varkappa_j}.$$

Для того, чтобы получить функциональное уравнение для сверток Ранкина $R^*_{j,\alpha}(s)$, соберем равенства (1.6) для всех вершин α и запишем их в векторной форме

$$\widetilde{R}^*_j(s) = \iint\limits_{F_q} |f_j(z)|^2\cdot\widetilde{E}(z,s)\cdot d\mu(z), \tag{1.12}$$

где

$$\widetilde{R}^*_j(s) = {}^t\big[R^*_{j,\alpha_1}(s),\dots,R^*_{j,\alpha_\tau}(s)\big],$$
$$\widetilde{E}(z,s) = {}^t\big[E_{\alpha_1}(z,s),\dots,E_{\alpha_\tau}(z,s)\big],$$

$\tau = \tau(q)$ – число делителей q, равное числу вершин F_q. Отметим, что такое совпадение справедливо для ведущих модулей q квадратичных характеров потому, что в общем случае число вершин равно

$$\sum_{d|q}\varphi\Big(\Big(d,\frac{q}{d}\Big)\Big)$$

и, если q – ведущий модуль, тогда $(d, q/d) = 1$, либо 2, поэтому $\varphi((d, q/d) = 1$ для всех $d|q$.

Для вектора $\widetilde{E}(z,s)$ справедливо функциональное уравнение [7]

$$\widetilde{E}(z,s) = \Phi(s)\cdot\widetilde{E}(z,1-s), \tag{1.13}$$

где

$$\Phi(s) = \big(c_{\alpha,\beta}(s)\big). \tag{1.14}$$

Это c-матрица Сельберга постоянных коэффициентов Фурье для рядов E_α относительно вершин β.

Из (1.12) и (1.13) получаем функциональное уравнение для сверток Ранкина

$$\widetilde{R}_j^*(s) = \Phi(s)\widetilde{R}_j^*(1-s). \tag{1.15}$$

Из векторно-матричного уравнения (1.15) получаем функциональное уравнение сверток Ранкина для каждой вершины α

$$R_{j,\alpha}^*(s) = \sum_{\beta} c_{\alpha,\beta}(s) \cdot R_{j,\beta}^*(1-s). \tag{1.16}$$

В силу симметричности матрицы Сельберга (1.14), т.е. $\Phi = {}^t\Phi$, уравнение (1.16) можно переписать в другой форме

$$R_{j,\alpha}^*(s) = \sum_{\beta} c_{\beta,\alpha}(s) \cdot R_{j,\beta}^*(1-s). \tag{1.17}$$

Выше мы уже отмечали, что число вершин F_q для ведущего модуля q совпадает с числом делителей q. Это условие позволяет задать все вершины β условием

$$\beta = \frac{1}{w}, \quad w|q. \tag{1.18}$$

При задании вершин β равенством (1.18) следует помнить, что для $w = 1$ вершина $\beta = 1$ эквивалентна вершине 0, а при $w = q$ вершина $\beta = 1/q$ эквивалентна вершине ∞. Доказательство первого утверждения можно найти в [10], а второе – тривиально. С учетом сказанного положим в равенстве (1.17) $\alpha = \infty$ и перепишем его в новом виде

$$R_{j,\infty}^*(s) = \sum_{w|q} c_{1/w,\infty}(s) \cdot R_{j,1/w}^*(1-s). \tag{1.19}$$

Явный вид коэффициентов $c_{1/w,\infty}(s)$ приведен в [6]

$$c_{1/w,\infty}(s) = \frac{\varphi(w)}{\varphi((w,q/w))} \cdot \left(\frac{(w,q/w)}{w \cdot q}\right)^s \cdot \frac{\xi_{q/w}(2s-1)}{\xi_q(2s)}. \tag{1.20}$$

Для нормированной дзета-функции из (1.10) справедливо функциональное уравнение

$$\xi_{q/w}(2s-1) = \xi_1(2(1-s)) \cdot \prod_{p|q/w} \left(1 - \frac{1}{p^{2s-1}}\right). \tag{1.21}$$

Формулы (1.20) можно упростить и сократить число выкладок, если считать q – нечетным и бесквадратным. В этом случае они примут простой вид

$$c_{1/w,\infty}(s) = \frac{\varphi(w)}{(qw)^s} \cdot \xi_{q/w}(2s-1)/\xi_q(2s). \tag{1.22}$$

В дальнейшем при использовании уравнения (1.21) следует помнить, что конечное произведение

$$\prod_{p|q/w} \left(1 - \frac{1}{p^{2s-1}}\right)$$

не участвует в римановом инвариантном уравнении

$$\xi_1(s) = \xi_1(1-s),$$

поэтому при сдвигах контура в левую полуплоскость это произведение начинает расти как величина порядка

$$\left(\frac{q}{w}\right)^{-2s+1}, \quad \operatorname{Re} s < 0.$$

Используя явный вид коэффициентов (1.22), умножим обе части равенства (1.19) на величину

$$q^s \cdot \xi_q(2s).$$

В результате уравнение (1.19) примет вид

$$q^s \cdot \xi_q(2s) \cdot R^*_{j,\infty}(s) = \sum_{w|q} \frac{\varphi(w)}{w^s} \xi_{q/w}(2s-1) \cdot R^*_{j,1/w}(1-s). \tag{1.23}$$

В уравнении (1.23) мы получили целые функции справа и слева, кроме точки $s = 1$, где обе части имеют простой полюс первого порядка. Тем самым мы получили стандартный вид функционального уравнения (см. [4, 8, 9]), которым можно пользоваться для получения укороченного функционального уравнения и оценки по выпуклости.

§2. Укороченное уравнение

Функциональное уравнение (1.23) нам нужно для того, чтобы получить приближенное функциональное уравнение в критической полосе для явного задания свертки Ранкина $R_{j,\infty}(s)$. Сейчас техника получения таких уравнений хорошо развита (см. [8, 9]) и, в принципе, все, что нам нужно, содержится в неявном виде в работе [9]. Но не так-то просто перенести чисто линейную схему работы [9] на векторно-матричное уравнение (1.15). Поэтому для удобства читателя мы приведем здесь необходимые вычисления для уравнения (1.23). Для этого рассмотрим интеграл

$$J_j(N,s)=\frac{1}{2\pi ki}\int\limits_{\operatorname{Re}w>1} N^w\,\Gamma\Big(\frac{w}{k}\Big)q^z\,\zeta_q(2z)R_{j,\infty}(z)\,dw, \tag{2.1}$$

где $w+s=z$, s – фиксированный параметр из критической полосы

$$s=\sigma+it\in\Big\{\frac12\leqslant\sigma\leqslant1, |t|\leqslant T\Big\}. \tag{2.2}$$

Параметр $k\geqslant2$ – достаточно большое фиксированное целое число. В дальнейшем положим

$$\frac{1}{k}=\varepsilon, \tag{2.3}$$

где $\varepsilon>0$ – фиксированное число из интервала $0<\varepsilon\leqslant1/2$. Ядро в интеграле (2.1) имеет только два полюса в полуплоскости $\operatorname{Re}w>-k$. Один – в точке $w=0$ от функции $\Gamma(w/k)$, второй – в точке $z=1\Rightarrow w=1-s$, т.к. $z=w+s$. Полюс $\zeta_q(2z)$ в точке $z=1/2$ гасится нулем $R_{j,\infty}(1/2)=0$. Поэтому после переноса контура (2.1) влево на прямую $\operatorname{Re}w=-k$, равенство (2.1), по теореме Коши о вычетах, преобразуется к новому виду

$$\begin{aligned}J_j(N,s)&=\frac1k\cdot\Gamma\Big(\frac{1-s}{k}\Big)\cdot N^{1-s}\cdot q\cdot v_q\cdot\operatorname{ch}\pi\varkappa_j+\\&+q^s\cdot\zeta_q(2s)\cdot R_{j,\infty}(s)+\frac{1}{2\pi ki}\int\limits_{\operatorname{Re}w=-k}(\,\cdot\,)\,dw.\end{aligned} \tag{2.4}$$

При этом мы использовали в (2.4) символ вычета v_q из (1.11). Контур $\operatorname{Re}w=-k$ в (2.4) обходит полюс функции $\Gamma(w/k)$ в точке $w/k=-1$ по правой дужке радиуса $r=1/\log N$. В дальнейшем будем считать, что $\log N>2$. После этого подставим в ядро интеграла правой части (2.4) функциональное уравнение (1.23), применительно к произведению

$$q^z\cdot\zeta_q(2z)\cdot R_{j,\infty}(z),$$

т.е. разделим правую часть (1.23) на произведение Г-множителей

$$\pi^{-z} \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma_j(z) = (2\pi^2)^{-z} \cdot \Gamma^2\Big(\frac{z}{2}\Big) \cdot \Gamma\Big(\frac{z}{2} + i\varkappa_j\Big) \cdot \Big(\frac{z}{2} - i\varkappa_j\Big).$$

При этом ряды Ранкина $R_{j,\alpha}(1-z)$ будут быстро и абсолютно сходиться, имея величину порядка $\operatorname{ch}\pi\varkappa_j$ по каждой вершине α. Это следует из оценки $\operatorname{Re}(1-z) \geqslant k \geqslant 2$, справедливой на контуре $\operatorname{Re} w = -k$ при $\operatorname{Re} s \in (1/2, 1)$. Для того, чтобы упростить ситуацию с оценкой отношения Г-множителей в ядре (2.4), поместим параметр $\varkappa_j$ в интервале

$$\frac{1}{2}X \leqslant \varkappa_j \leqslant X, \tag{2.5}$$

где $X > 1$ – произвольный растущий параметр, который мы ограничим снизу условием

$$X > q^2 + |s|^2 \geqslant 2 \cdot q \cdot |s|. \tag{2.6}$$

Тогда интеграл в правой части (2.4) будет иметь порядок величины

$$\ll \left(\frac{q \cdot |s| \cdot X}{\sqrt{N}}\right)^{2k} (q|s|X)^{1-2\sigma} \operatorname{ch}\pi\varkappa_j \log N, \tag{2.7}$$

где $\sigma \geqslant 1/2$ из (2.2). При этом константа в знаке Виноградова $\ll$ зависит только от k. Условие (2.5) исключает малые собственные значения $\lambda_j < 1/4$, поэтому все асимптотики и оценки становятся независимыми от гипотезы Сельберга о малых собственных значениях. Переход от собственных значений λ_j к параметру $\varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - 1/4}$ связан с переходом от уравнения Лапласа $\Delta f_j(z) = \lambda_j f_j(z)$ к модифицированному уравнению Бесселя

$$\begin{aligned} -y^2 a_n''(y) + (2\pi n y)^2 a_n(y) &= \lambda_j a_n(y), \quad n \neq 0, \\ -y^2 a_0''(y) &= \lambda_j a_0(y), \quad n = 0 \end{aligned}$$

для коэффициентов Фурье $a_n(y)$ функции $f_j(z)$

$$f_j(z) = a_0(y) + \sum_{n \neq 0} a_n(y) \cdot e^{2\pi i n x}.$$

Поэтому удобнее изучать функцию $f_j(z)$ как функцию параметра $\varkappa_j$ вместо λ_j. С этим и связан переход от собственных чисел λ_j

к параметру $\varkappa_j$ в интервале (2.5). Подробности можно найти в работах [2, 3].

После этого отступления снова вернемся к оценке (2.7). Параметр N у нас произвольный, поэтому определим его равенством

$$N = c \cdot \bigl(q|s|X\bigr)^2 X^{2\varepsilon}, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{1}{k}, \tag{2.8}$$

$c \geqslant 1$ – любая фиксированная константа.

В этом случае величина (2.7) будет иметь порядок

$$\ll \frac{\operatorname{ch} \pi\varkappa_j}{X^2} \log X. \tag{2.9}$$

С другой стороны, интеграл (2.1) имеет и другое представление. Для того, чтобы получить его, запишем произведение $\zeta_q(2z)R_{j,\infty}(z)$ в области абсолютной сходимости $\operatorname{Re} z > 1$ в виде единого ряда Дирихле

$$\zeta_q(2z)R_{j,\infty}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_j(m) \cdot m^{-z}, \tag{2.10}$$

$$a_j(m) = \sum_{\substack{m=nd^2,\\ (d,q)=1}} \bigl|\rho_{j,\infty}(n)\bigr|^2. \tag{2.11}$$

Подставляя ряд (2.10) в ядро интеграла (2.1) и меняя порядки интегрирования и суммирования (что законно в области $\operatorname{Re} z > 1$), сведем задачу к вычислению интеграла

$$J_j\Bigl(\frac{m}{qN}\Bigr) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w > 1} \Bigl(\frac{m}{qN}\Bigr)^{-w} \Gamma\Bigl(\frac{w}{k}\Bigr) d\frac{w}{k}.$$

Легко видеть, что этот интеграл, при замене переменной интегрирования $w/k = s$, сводится к классическому интегралу

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s > 0} x^{-ks}\Gamma(s)ds = \exp(-x^k), \quad x = \frac{m}{qN}.$$

Тем самым для интеграла (2.1) мы получили другое представление

$$J_j(N,s) = q^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_j(m)}{m^s} \exp\Bigl[-\Bigl(\frac{m}{qN}\Bigr)^k\Bigr]. \tag{2.12}$$

Подставляя (2.12) в левую часть (2.4), получаем укороченное уравнение для $R_{j,\infty}(s)$ с учетом оценки (2.9)

$$v_q\,(qN)^{1-s}\cdot\frac{1}{k}\cdot\Gamma\Big(\frac{1-s}{k}\Big)\cdot\operatorname{ch}\pi\varkappa_j+\zeta_1(2s)\cdot R_{j,\infty}(s)=$$

$$=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_j(m)}{m^s}\exp\left[-\Big(\frac{m}{qN}\Big)^k\right]+O\Big(\frac{\operatorname{ch}\pi\varkappa_j}{q^\sigma X^2}\log X\Big). \qquad (2.13)$$

В правой части уравнения (2.13) присутствует только один приближающий отрезок длины qN с гладкой обрезающей функцией. На самом деле можно получить и два приближающих отрезка, каждый длиной $\sqrt{qN}$, но в этом случае – второй из них – распадется на $\tau(q)$ (число вершин) отрезков со сложными Г-коэффициентами перед каждым из них. Поэтому мы ограничились простейшей формой уравнения (2.13) за счет увеличения длины одного из отрезков.

§3. Асимптотика Германа Вейля

Для ее получения следует воспользоваться предельным равенством (2.13) при $s\to 1$. Для этого возьмем два лорановских разложения в окрестности $|s-1|\leqslant 1/4$. Одно для Г-функции

$$\frac{1}{k}\cdot\Gamma\Big(\frac{1-s}{k}\Big)=\frac{1}{s-1}-\frac{\gamma}{k}+O((s-1)),$$

где γ – константа Эйлера, другое – для свертки Ранкина

$$\zeta_q(2s)R_{j,\infty}(s)=\Big[\frac{v_q}{s-1}+r_j\Big]\operatorname{ch}\pi\varkappa_j+O(|s-1|).$$

Подставляя оба равенства в (2.13) и нормируя полученное равенство величиной $\operatorname{ch}\pi\varkappa_j$, приведем его в новому виду

$$v_q\cdot\frac{1-(qN)^{s-1}}{s-1}=J_j^*(N,s)+c_j+O(|s-1|)+O\Big(\frac{\log X}{q\cdot X^2}\Big), \qquad (3.1)$$

где

$$c_j=r_j-\frac{\gamma}{k}\cdot v_q, \qquad (3.2)$$

$J_j^*(N,s)$ – сумма правой части (2.13), нормированная величиной $\operatorname{ch}\pi\varkappa_j$

$$J_j^*(N,s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{s_j(m)}{m^s}\exp\left[-\Big(\frac{m}{qN}\Big)^k\right], \qquad (3.3)$$

$$s_j(m) = a_j(m)/\operatorname{ch}\pi\varkappa_j. \tag{3.4}$$

Теперь, устремляя $s \to 1$ в (3.1), получаем предельное равенство

$$v_q \cdot \log(qN) = J_j^*(N) + c_j + O\left(\frac{\log X}{q \cdot X^2}\right), \tag{3.5}$$

где

$$J_j^*(N) \equiv J_j^*(N,s)\Big|_{s=1},$$

причем параметр c_j из (3.2) не зависит от N. Чтобы избавиться от него, следует вспомнить, что в определении параметра N из (2.8) есть произвольная константа $c \geqslant 1$. Полагая $c = c_1 = 1$ и затем $c = c_2 = e$ (неперова константа), получаем два разных равенства (3.5): одно – с параметром N, другое – с параметром $N_2 = e \cdot N_1$. Вычитая почленно одно из другого, мы уничтожим в (3.5) параметр c_j и получим новое равенство для вычета v_q (т.к. $\log N_2 - \log N_1 = 1$)

$$v_q = J_j^*(N_2) - J_j^*(N_1) + O\left(\frac{\log X}{q \cdot X^2}\right). \tag{3.6}$$

Суммируя это равенство по всем $\varkappa_j$ из интервала (2.5), получаем усредненную форму равенства (3.6)

$$v_q\, W\left(\frac{1}{2}X, X\right) = J(N_2) - J(N_1) + O\left(\frac{W(\frac{1}{2}X, X)}{q \cdot X^2}\log X\right), \tag{3.7}$$

где

$$W(Y,X) = \sum_{Y \leqslant \varkappa_j \leqslant X} 1,$$

$$J(N) = \sum_{1/2X \leqslant \varkappa_j \leqslant X} J_j^*(N) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s(m)}{m} \exp\left[-\left(\frac{m}{qN}\right)^k\right],$$

$$s(m) = \sum_{1/2X \leqslant \varkappa_j \leqslant X} a_j(m)/\operatorname{ch}\pi\varkappa_j. \tag{3.8}$$

Из определения коэффициента $a_j(m)$ в (2.11) получаем явный вид суммы (3.8)

$$s(m) = \sum_{\substack{m=n\cdot d^2\\(d,q)=1}} \sum_{1/2X \leqslant \varkappa_j \leqslant X} \left|\rho_{j,\infty}(n)\right|^2/\operatorname{ch}\pi\varkappa_j. \tag{3.9}$$

Дальше нам осталось воспользоваться теоремой 6, [11] для конгруэнц-группы $\Gamma_0(q)$ с мультипликатором χ_q. Отметим, что перенос теоремы 6 на этот случай $\Gamma_0(q)$ без мультипликатора подробно сделан в работе [6]. Присутствие мультипликатора χ_q в группе $\Gamma_0(q)$ означает, что конгруэнц-модуль q совпадает с ведущим модулем характера χ_q, что сужает множество q до бесквадратных чисел по всем простым кроме двойки, которой может не быть совсем, либо она присутствует во 2-ой или 3-ей степени. Это условие на модуль q упрощает схему работы [6] и ее детали становятся прозрачными при добавке мультипликатора. Поэтому мы сразу приведем окончательный вид теоремы 6 из [11] для $\Gamma_0(q)$ с χ_q.

При любом $X \geqslant 2$ и любом целом $n \geqslant 1$ справедливо асимптотическое равенство

$$\sum_{\varkappa_j \leqslant X} |\rho_{j,\infty}(n)|^2/\operatorname{ch}\pi\varkappa_j =$$
$$= \frac{1}{\pi^2} X^2 + \theta\Big[X + v_q + \sqrt{\frac{n}{q}}\Big]\sigma_0(q)\sigma_0^2(n)\log^3(X+q+n), \qquad (3.10)$$

где $\theta \ll 1$, σ_0 – функция числа делителей

$$\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^3.$$

Имея асимптотику (3.10), уже легко вычислить правую часть равенства (3.7)

$$v_q\, W\Big(\frac{1}{2}X, X\Big) = \frac{\zeta_q(2)}{\pi^2}\Big[X^2 - \Big(\frac{X}{2}\Big)^2\Big] + O\big((qX)^{1+\varepsilon}\big). \qquad (3.11)$$

Складывая равенства (3.11) для параметров $X_l = 2^{-l}X$, $l = 0, 1, \ldots$, получаем асимптотику Германа Вейля

$$W(X) = \frac{\zeta_q(2)}{\pi^2\, v_q} + O\big((q^2X)^{1+\varepsilon}\big), \qquad (3.12)$$

где

$$W(X) = W(0, X) = \sum_{0 \leqslant \varkappa_j \leqslant X} 1, \qquad (3.13)$$

$\varepsilon > 0$ – сколь угодно мало, но фиксировано. Константа в O-символе (3.12) зависит от ε. Асимптотика (3.12) не тривиальна при $X > q$. Отметим также, что справедливо тождество

$$\frac{\zeta_q(2)}{\pi^2\, v_q} = \frac{q}{12}\prod_{p|q}\Big(1+\frac{1}{q}\Big) = c_q.$$

Это классический коэффициент Г. Вейля в его асимптотике для конгруэнц-группы $\Gamma_0(q)$ как с мультипликатором χ_q, так и без него.

Асимптотика (3.12) формально зависит еще и от малых собственных значений, которые мы исключили в самом начале, приняв гипотезу Сельберга [1]. Но количество малых собственных значений $\ll \|F_q\| \ll q^{1+\varepsilon}$ (см. по этому поводу работу [12]). Поэтому их добавление в правую часть (3.12) означает, что мы добавляем величину не больше остатка по своему порядку. Поэтому равенство (3.12) остается верным и без гипотезы Сельберга [1]. Но в этом случае определение суммы Вейля (3.13) надо модернизировать:

$$W(X) = \sum_{0\leqslant|\varkappa_j|\leqslant X} 1, \tag{3.14}$$

так как при $\lambda_j < 1/4$, параметр $\varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - 1/4}$ становится чисто мнимым; либо перевести асимптотику (3.12) на язык собственных чисел

$$\sum_{0\leqslant\lambda_j\leqslant N} 1 \leqslant c_1 N + O\Big(q^2\cdot N^{1/2+\varepsilon}\Big). \tag{3.15}$$

Литература

1. A. Selberg, *Discontinuous groups and harmonic analysis.* In: Proc. Intern. Congress Math., Stockholm (1962), pp. 177–189.
2. W. Roeleke, *Das Eigenwertproblem automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene.* I, II. Math. Ann. **167** (1986), 292–337; **168** (1987), 261–324.
3. J. Elstrodt, *Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene.* I, II, III. Math. Z. **132** (1973), 99–134; Math. Ann. **208** (1974), 99–132.
4. E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function.* Oxford (1951). Русский перевод: И. Л., Москва (1953).
5. H. Bateman, A. Erde'lyi, *Higher Transcendental Functions.* Vol. 2 (1953), Русский перевод: Наука, Москва (1968).
6. J.-M. Deshouillers, H. Jwaniec, *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms.* — Invent. Math. **70,** No. 2 (1982), 219–288.
7. T. Kubota, *Elementary Theory of Eisenstein series.* Kodansha, Tokio (1973), Русский перевод: Наука, Москва (1986).

8. Р. М. Кауфман, *Об укороченных уравнениях А. Ф. Лаврика.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **74** (1978), 124–158.
9. А. Ф. Лаврик, *Приближенные функциональные уравнения функций Дирихле.* — Изв АН СССР, Сер. мат. **32**, No. 1 (1968), 134–185.
10. L. A. Takhtajan, A. I. Vinogradov, *The Gauss–Hasse hypothesis on real quadratic fields with class number one.* — J. reine angew. Mathematik **335** (1982), 40–86.
11. Н. В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника.* — Мат. сб. No. 3 (1980), 330–383.
12. А. Б. Венков, *Спектральная теория автоморфных функций.* Труды МИАН СССР, **153** (1981).
13. А. И. Виноградов, Internet www pdmi ras ru /preprint/ index html No. 18.
14. А. И. Виноградов, *Оператор отражения и канонический базис.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **291** (2002), 109–131.

Vinogradov A. I. H. Weyl asymptotics and Rankin convolutions.

Well-known H. Weyl asymptotics for eigenvalues is obtained by the arithmetic method. For congruence groups, the remainder in this asymptotics is a square root of the principal term.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 18 января 2003 г.