Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 305, 2003 г.

Е. В. Дыбкова

НАДДИАГОНАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ ДЛЯ ХОРОШЕГО ФОРМЕННОГО КОЛЬЦА НАД НЕКОММУТАТИВНЫМ ТЕЛОМ

Эта работа является естественным продолжением недавно опубликованной статьи [4] и связана с переносом на гиперболические унитарные группы над некоммутативным телом теоремы З. И. Боревича из [1]: *если поле содержит не менее 7 элементов, то всякая подгруппа H полной линейной группы над этим полем, содержащая все обратимые диагональные матрицы, заключена между однозначно определенной D-сетевой подгруппой $G(\sigma)$ и ее нормализатором $N(\sigma)$*. В самом конце статьи [4] (теорема 5) мы доказали, что если для некоммутативного тела с инволюцией форменный параметр, задающий форменное кольцо над этим телом, минимален (такие форменные кольца мы называем *хорошими*), то аналог теоремы Боревича справедлив для гиперболической унитарной группы четвертой степени над таким форменным кольцом (иначе говоря, решетка наддиагональных подгрупп гиперболической унитарной группы в этом случае допускает *стандартное описание*). Целью предлагаемой работы является перенос теоремы 5 из [4] на группы произвольной степени. Как и при формулировке упомянутого результата для групп четвертой степени из [4], мы используем термин *форменная сетевая подгруппа*, хотя в случае хорошего форменного кольца форменные параметры однозначно определяются соответствующей сетью; для поля, содержащего достаточно большое число элементов, приводимая ниже теорема была доказана в [3].

Теорема. *Пусть R – некоммутативное тело с инволюцией, (R,Λ) – хорошее форменное кольцо над R и n – произвольное натуральное число. Если подгруппа H такова, что*

$$\Delta(2n,R,\Lambda)\leqslant H\leqslant U(2n,R,\Lambda),$$

Работа выполнена при поддержке INTAS 00-566.

то существует единственная точная форменная D-сеть (σ, Γ) порядка $2n$б для которой

$$U(\sigma, \Gamma) \leqslant H \leqslant N_U(\sigma, \Gamma).$$

Здесь и далее употребляются термины и обозначения, введеные нами в работе [4], в большинстве случаев мы будем использовать их без дополнительных разъяснений и ссылок. По поводу сведений об истории проблемы мы также отсылаем читателя к [4].

Поскольку доказывать сформулированную теорему мы собираемся индукцией по степени гиперболической унитарной группы, условимся говорить, что для форменного кольца (R, Λ) над некоммутативным телом R выполнено *условие* $\mathbf{T}_m$, если для каждого натурального $n \leqslant m$ любая наддиагональная подгруппа H группы $U(2n, R, \Lambda)$ заключена между форменной сетевой подгруппой, соответствующей ассоциированной с H в силу леммы 5 из [4] точной форменной D-сети, и нормализатором этой форменной сетевой подгруппы в группе $U(2n, R, \Lambda)$. Отметим, что в силу теоремы 4 из [4] условие $\mathbf{T}_1$ выполнено для любого форменного кольца (R, Λ), а по теореме 5 из [4] для хорошего форменного кольца выполнено и условие $\mathbf{T}_2$. Таким образом, нам предстоит установить, что для хорошего форменного кольца условие $\mathbf{T}_n$ выполняется при любом n.

Если не сказано что-то иное, везде далее мы считаем, что R – некоммутативное тело с инволюцией, (R, Λ) — нормализованное форменное кольцо над ним, $n > 2$ – фиксированное натуральное число. Мы фиксируем также наддиагональную подгруппу H группы $U(2n, R, \Lambda)$ и обозначаем через (σ, Γ) точную форменную D-сеть, ассоциированную с H в силу леммы 5 из [4].

Мы будем использовать ту же схему рассуждений, которая применялась в [4] для доказательства теоремы 5. Напомним, что в [4, теорема 1] мы установили следующий критерий включения $H \leqslant N_U(\sigma, \Gamma)$ при произвольной степени унитарной группы: для любой матрицы a из H и любых индексов должны выполняться включения

1) $a_{is}\sigma_{st}a'_{tj} \leqslant \sigma_{ij}$,
2) $a_{is}\Gamma_s a'_{-s,-i} \leqslant \Gamma_i$.

Доказательство справедливости этих включений мы проводим в два этапа: сначала для матриц, содержащих хотя бы один нулевой элемент, а затем – для остальных матриц из H.

В [4, леммы 8 и 9] мы показали (для произвольной степени унитарной группы), что если некоторый элемент a_{rk} матрицы a равен 0, то при $l = \pm k$, $j = \pm r$ и $i \neq \pm r$ имеются включения

$$a_{il}a'_{lj} \in \sigma_{ij} \quad \text{и} \tag{1}$$

$$a_{jl}S_{l,-l}(a^{-1})a'_{-l,-j} \in \Gamma_j. \tag{2}$$

Рассматривая в [4] наддиагональные подгруппы в $U(4, R, \Lambda)$, мы обнаружили, что при наличии в матрице a нулевого элемента включения (1) и (2) имеют место также для произвольных l, j и $i \neq \pm j$. Наша ближайшая цель – доказательство таких же включений при $n > 2$.

Начнем с частичного ослабления условий на индексы в [4, леммы 8 и 9] и перенесем на случай группы произвольной степени лемму 10 из [4] (это – первая из лемм о трансвекциях в работе [4], где мы ограничивались группой малой степени).

Лемма 1. *Предположим, что для форменного кольца выполнено условие $\mathbf{T}_{n-1}$. Если для матрицы $a \in H$ при некоторых индексах r и k имеем $a_{rk} = 0$, то для $j = \pm r$, $i \neq \pm r$ и любого индекса l справедливы включения* (1) *и* (2).

Доказательство. С небольшими изменениями мы фактически повторим рассуждения, применявшиеся ранее при $n = 2$. Для $l \neq \pm k$ все четыре элемента $a_{\pm r, \pm l}$ можно считать ненулевыми. Как и при доказательстве леммы 10 из [4], рассуждения ставим в зависимость от числа нулевых элементов в четверке $a_{\pm r, \pm k}$.

1. Если в указанной четверке есть хотя бы два ненулевых элемента, то будем считать нулевым $a_{-r,k}$ – во всех остальных случаях можно просто сослаться на соответствующую часть доказательства леммы 10 в [4]. Из равенства $\sum\limits_s a'_{ks}a_{sk} = 1$ следует, что существует такой индекс $s \neq \pm r$, что произведение $a'_{ks}a_{sk}$ отлично от 0. Фиксируем такой s и отметим, что в силу лемм 8 и 9 из [4] оба идеала σ_{sr} и $\sigma_{s,-r}$ совпадают с R, а это означает справедливость включений (1) при $i = s$. Идеалы же $\sigma_{-s,r}$ и $\sigma_{-s,-r}$ можно считать нулевыми: в противном случае справедливость всех наших включений легко устанавливается применением уже упоминавшихся частей доказательства леммы 10 из [4] либо к матрице $T_{rs}(\alpha)a$, либо к матрице $T_{-r,s}(\alpha)a$ при подходящем выборе α. Легко понять, что в таком случае элемент $a_{-s,k}$ должен быть

нулевым, а это значит, что наша лемма справедлива, если пару индексов (r,k) заменить парой (s,k). Нетрудно подсчитать, что тогда $a_{-s,l} = a_{-s,-l} = 0$, поэтому при $i = -s$ оба наших включения тривиальны.

При доказательстве (1) для $i \neq \pm s$ мы используем редукцию к унитарной группе меньшей степени. Обозначим через H_1 подгруппу тех матриц из H, для которых все внедиагональные элементы s-ого столбца равны 0. Если в каждой матрице из H_1 вычеркнуть строки и столбцы с номерами $\pm s$. то группа H_1 гомоморфно отобразится на наддиагональную подгруппу H_2 группы $U(2n-2,R,\Lambda)$. Обозначив через (τ,B) точную форменную D-сеть порядка $2n-2$, ассоциированную с H_2, имеем $U(\tau,B) \leqslant H_2 \leqslant N_U(\tau,B)$ в силу условия $\mathbf{T}_{n-1}$, причем $\tau_{ij} \leqslant \sigma_{ij}$ и $B_i \leqslant \Gamma_i$ при всех индексах, отличных от $\pm s$ (это следует из [4, лемма 6]). Далее замечаем, что при любом обратимом θ из R подгруппе H_1 принадлежат все матрицы $b = ad_l(\theta)a^{-1}$, и поэтому для каждого $i \neq \pm s$ и любого $\theta \in R^*$ мы имеем включения

$$b_{i,-r}b'_{-r,r} \in \sigma_{ir} \qquad \text{и} \qquad b_{ir}b'_{r,-r} \in \sigma_{i,-r}. \tag{3}$$

Остается показать, что если $a_{i,\pm l}$ обратимы, то при подходящем выборе θ в левых частях полученных включений стоят ненулевые произведения. Ограничимся первым из этих произведений, для второго рассуждения аналогичны.

Предположим сначала, что $a_{-r,l}a'_{lr} + a_{-r,-l}a'_{-l,r} \neq 0$. Тогда в силу леммы 7 из [4] элемент $b'_{-r,r}$ отличен от 0 для всякого обратимого $\theta \neq 1$. Если взять θ коммутирующим с произведением $a'_{l,-r}(a'_{-l,-r})^{-1}$ и предположить, что для него $b_{i,-r} = b'_{i,-r} = 0$, то, как несложно подсчитать, $\theta\bar{\theta} = 1$. Разумеется, для всех обратимых θ из бесконечного централизатора $a'_{l,-r}(a'_{-l,-r})^{-1}$ такое тождество выполняться не может, поэтому при некотором обратимом θ произведение в левой части первого условия (3) отлично от 0. Если же $a_{-r,l}a'_{lr} + a_{-r,-l}a'_{-l,r} = 0$, то рассмотрим для $\mu = a^{-1}_{-r,l}a_{-r,-l}$ его централизатор $R_1 = \zeta_R(\mu)$, инвариантный относительно инволюции. Для обратимого θ из R_1^0, отличного от ± 1 (множество таких θ бесконечно), имеем $b'_{-r,r} \neq 0$. Выполнение равенства $b_{i,-r} = 0$ для всех наших θ означало бы, что при некотором ненулевом γ имеет место тождество $\theta\gamma\theta = \gamma$, а это, как показывает несложная выкладка, невозможно.

При доказательстве включений (2) сначала рассматриваем ситуацию, когда $a'_{lt}a_{t,-l} \neq 0$ для некоторого $t \neq \pm r$; в этом случае из-за (1) единичными оказываются все четыре идеала $\sigma_{\pm t,\pm r}$. Поэтому $\sigma_{r,-r} = \sigma_{-r,r} = R$ и, следовательно, оба сетевых форменных параметра Γ_r и Γ_{-r} содержат Λ^m. Выберем ненулевой элемент α так, чтобы для принадлежащей H матрицы $c = T_{-r,t}(\alpha)a$ элемент $c_{-r,-l}$ был нулевым. Из первой части наших рассуждений следует, что частичная сумма $S_{l,-l}(c^{-1})$ принадлежит пересечению Γ_r и Γ_{-r}; для окончания доказательства в рассматриваемом случае остается учесть, что суммы $S_{l,-l}(c^{-1})$ и $S_{l,-l}(a^{-1})$ отличаются на элемент из Λ^m.

Не приводя подробности соответствующих вычислений, заметим, что аналогичным образом рассматривается случай, когда $a'_{-l,t}a_{tl} \neq 0$ при некотором $t \neq \pm r$. В оставшемся случае ($a'_{lt}a_{t,-l} = a'_{-l,t}a_{tl} = 0$ при всех $t \neq \pm r$) рассматриваем матрицы $b = ad_l(\theta)a^{-1}$ для обратимых θ и применяем уже упоминавшуюся редукцию к группе меньшей степени.

2. Случай, когда в четверке $a_{\pm r,\pm k}$ ровно один элемент отличен от 0, фактически рассмотрен в доказательстве леммы 10 из [4]. Предположим теперь, что все элементы этой четверки нулевые, и вновь зафиксируем индекс s, для которого произведение $a'_{ks}a_{sk}$ обратимо. Используя рассуждения, аналогичные применявшимся в начале доказательства нашей леммы, сводим ситуацию к случаю, когда все четыре идеала $\sigma_{\pm s,\pm r}$ равны 0. Далее исследуем условие $a_{s,-k}a'_{-k,s} = 0$ — из первой части нашего доказательства тогда следует, что нулевыми являются все четыре элемента $a_{\pm s,\pm l}$, а это значит, что наши включения можно получить, применяя к матрицам $b = ad_l(\theta)a^{-1}$ редукцию.

Теперь будем считать все элементы четверки $a_{\pm s,\pm k}$ ненулевыми. Несложными вычислениями, которые мы приводить не будем, ситуацию можно свести к случаю, когда для любого индекса $i \neq \pm s$ все элементы четверки $a_{\pm i,\pm k}$ равны 0. В этом случае мы применим к матрице $g = ad_k(\theta)a^{-1}$ новую редукцию — вычеркнем ее строки и столбцы с номерами $\pm r$. Если h — образ матрицы g при указанной редукции, то из включения $h_{-s,s}S_{s,-s}(h^{-1})h'_{-s,s} \in \Gamma_{-s}$ следует, что сетевому форменному параметру Γ_{-s} принадлежит произведение $a'_{-k,-s}a_{-s,k}$. Для окончания доказательства достаточно рассмотреть принадлежащую группе H матрицу

$$c = T_{-s,s}\left(-a_{-s,k}\overset{-1}{a_{sk}}\right)a,$$

заметив, что $c_{-s,k} = 0$, а остальные элементы в четверке $c_{\pm s,\pm k}$ отличны от 0.

Теперь, как и было обещано, мы перенесем на случай групп произвольной степени лемму 11 из [4].

Лемма 2. *Предположим, что для форменного кольца выполнено условие $\mathbf{T}_{n-1}$. Если для матрицы $a \in H$ при некоторых индексах r и k имеем $a_{rk} = 0$, то для любых индексов l, j и $i \neq \pm j$ справедливы включения* (1) *и* (2)*.*

Доказательство. Мы, разумеется, считаем индекс j отличным от $\pm r$, а все элементы j-ой и $(-j)$-ой строк нашей матрицы — обратимыми. Как и в доказательстве предыдущей леммы, фиксируем индекс s, для которого произведение $a'_{rs}a_{sr}$ отлично от 0. При доказательстве (1) берем $i \neq \pm r$ и полагаем, что все элементы i-ой и $(-i)$-ой строк обратимы (иначе наше утверждение очевидно); по предыдущей лемме имеем $a_{i,-s}a'_{-s,-r} \in \sigma_{i,-r} = R$ и $a_{-j,s}a'_{sr} \in \sigma_{-j,r} = R$, откуда $\sigma_{ij} = R$, что и требуется. При доказательстве (2) воспользуемся тем, что в наших условиях все четыре идеала $\sigma_{\pm j,\pm r}$ совпадают с R и поэтому $\sigma_{-j,j} = \sigma_{j,-j} = R$; отметим, что в такой ситуации оба сетевых форменных параметра Γ_j и Γ_{-j} содержат Λ^m. Далее подбираем $\alpha \in R$ так, чтобы для содержащейся в H матрицы $c = T_{-j,r}(\alpha)a$ элемент $c_{-j,s}$ был равен 0 (ясно, что при этом $\alpha \neq 0$). Применяем к матрице c лемму 1 и ссылаемся на то, что разность $S_{l,-l}(c^{-1}) - S_{l,-l}(a^{-1})$ принадлежит Λ^m.

Далее для групп четвертой степени в [4] мы показывали, что доказательство включения $H \leqslant N_U(\sigma,\Gamma)$ можно свести к отысканию в H какой-нибудь нетривиальной трансвекции короткого типа; эту лемму 12 из [4] мы просто переформулируем для общего случая, поскольку ее доказательство фактически не зависит от степени унитарной группы.

Лемма 3. *Если выполнено условие $\mathbf{T}_{n-1}$ и хотя бы для одной пары индексов $r \neq \pm k$ идеал σ_{rk} совпадает с R, то $H \leqslant N_U(\sigma,\Gamma)$.*

Следующее утверждение, завершающее первый этап доказательства нашей теоремы и начинающее второй, — это аналог леммы 14 из [4]; мы не приводим его доказательства, вновь ссылаясь на то, что соответствующий результат в [4] установлен фактически для унитарных групп произвольной степени.

Лемма 4. *Если справедливо предположение* $\mathbf{T}_{n-1}$ *и для группы* H *выполнено хотя бы одно из двух условий*

1. *каждая матрица из* H *содержит нулевой элемент или*
2. H *содержит некоторую матрицу, все элементы которой отличны от* 0*, и при этом* $\sigma_{rk} = R$ *для некоторых индексов* $r \neq \pm k$*,*

то $H \leqslant N_U(\sigma, \Gamma)$*.*

Начиная с этого места, везде далее мы будем считать, что наша подгруппа H *содержит хотя бы одну матрицу, все элементы которой отличны от* 0*.* Для окончания доказательства теоремы, таким образом, достаточно убедиться в том, что H содержит нетривиальную трансвекцию короткого типа.

Следующее утверждение является переносом на случай $n > 2$ леммы 18 из [4].

Лемма 5. *Пусть выполнено условие* $\mathbf{T}_{n-1}$ *и* H *содержит такую матрицу из ненулевых элементов* a*, что для некоторого индекса* r *частичная сумма длинного типа* $S_{r,-r}(a)$ *равна* 0*. Тогда* H *содержит и нетривиальную трансвекцию короткого типа.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что индекс r, о котором идет речь в условии, можно считать равным 1. Действительно, в противном случае мы можем взять подстановку π из группы W_n, для которой $\pi(r) = 1$, а условия $\varepsilon(i) = \varepsilon(j)$ и $\varepsilon(\pi(i)) = \varepsilon(\pi(j))$ эквивалентны при любых индексах. Если p_π — унитарная матрица такой подстановки (см. [2]), то $H_1 = p_\pi H p_\pi^{-1}$ — наддиагональная подгруппа в $U(2n, R, \Lambda)$, причем не содержащая нулевых элементов матрица $b = p_\pi a p_\pi^{-1}$ принадлежит H_1 и $S_{1,-1}(b) = 0$. Легко понять, что H содержит нетривиальную трансвекцию короткого типа тогда и только тогда, когда некоторую нетривиальную трансвекцию короткого типа содержит подгруппа H_1.

Итак, пусть $S_{1,-1}(a) = 0$. Предположим, что утверждение нашей леммы неверно и подгруппа H не содержат нетривиальных трансвекций короткого типа. Домножая при необходимости a справа на подходящую диагональную унитарную матрицу, можно считать, что $a_{1l} = 1$ при всех $l > 0$; ясно, что при этом условие

$S_{1,-1}(a)=0$ сохранится и будет означать, что

$$\sum_{l>0} a'_{l,-1} = \sum_{l>0} a_{1,-l} = 0.$$

Для обратимых θ из R нам потребуются дальше матрицы

$$c(\theta) = ad(\theta)a^{-1} = ad_1(\theta)\dots d_n(\theta)a^{-1}$$

— легко понять, что $c_{1,-1}(\theta)=0$ для каждого θ. Из-за отсутствия в H нетривиальных трансвекций короткого типа в силу леммы 2 для произвольного обратимого θ либо $c_{1k}(\theta)=0$ для всех $k\neq 1$ (такие θ условимся называть элементами первого рода, они образуют подгруппу в R^*), либо $c_{11}(\theta)=0$ (в этом случае скажем, что θ — элемент второго рода). Дальнейшие рассуждения, которые мы разделим на две большие части, связаны с существованием элементов второго рода.

1) Сначала предположим, что при всех $l>0$ элементы $a_{1,-l}$ коммутируют. Рассмотрим конечную цепочку централизаторов

$$Q_1 = \zeta_R(\overline{a_{1,-1}}), \quad Q_2 = \zeta_{Q_1}(\overline{a_{1,-2}}),$$
$$\dots \quad Q_n = \zeta_{Q_{n-1}}(\overline{a_{1,-n}}) = R_1.$$

Тогда R_1 — такое бесконечное подтело нашего тела R, что все $\overline{a_{1,-l}}$ принадлежат центру R_1 (отметим, что R_1 необязательно инвариантно относительно инволюции). Если R_1^* состоит только из элементов первого рода, то $(\theta-\bar\theta^{-1})S_{1k}(a)=0$ при всех $\theta\in R_1^*$ и k. Равенство $\theta=\bar\theta^{-1}$ для всех обратимых θ выполняться не может — тогда R_1 было бы инвариантным относительно инволюции телом с таким свойством, а это противоречит [6, §6.1A]. Следовательно $S_{1k}(a)=0$ при всех $k\neq 1$. Но тогда

$$S_{11}(a) = \sum_k S_{1k}(a)a_{k1} = \sum_{l>0} a_{1l}\left(\sum_k a'_{lk}a_{k1}\right) = 1$$

и поэтому для произвольного $m>1$

$$a_{1,-m} = \sum_k S_{1k}(a)a_{k,-m} = \sum_{l>0} a_{1l}\left(\sum_k a'_{lk}a_{k-m}\right) = 0,$$

что противоречит отсутствию в матрице a нулевых элементов.

Итак, некоторый $\theta \in R_1^*$ является элементом второго рода; тогда θ^{-1} — тоже элемент второго рода. Таким образом

$$0 = \sum_{l>0} a_{1l}\theta^{-1}a'_{l1} + \sum_{l>0} a_{1,-l}\bar{\theta}a'_{-l,1} = \theta^{-1}S_{11}(a) + \bar{\theta}\,(1 - S_{11}(a))$$
$$\text{и} \quad \theta\bar{\theta}(S_{11}(a) - 1) = S_{11}(a).$$

Ясно, что наряду с последним имеется и равенство $\bar{\theta}\theta S_{11}(a) = S_{11}(a) - 1$, из чего следует унитарность θ^2. Поэтому если в R_1^* нам удастся найти элемент второго рода, квадрат которого не является унитарным, то получится искомое противоречие.

Разберем по отдельности две ситуации.

a) Пусть при любых положительных p и q элементы $a_{1,-p}$ и $\overline{a_{1,-q}}$ коммутируют; тогда тело R_1 инвариантно относительно инволюции. Рассмотрим еще один централизатор $R_2 = \zeta_{R_1}(\theta^2)$ и выберем θ_1 из R_2^0 так, чтобы этот элемент был отличен от 0 и ± 1. Поскольку θ — элемент второго рода, имеем

$$c_{1k}(\theta) = (\theta - \overline{\theta}^{-1})S_{1k}(a) \neq 0$$

для некоторого индекса $k \neq \pm 1$, из чего следует $c_{1k}(\theta_1) \neq 0$, а это значит, что θ_1 — также элемент второго рода. Его квадрат, очевидно, может быть унитарным только при $\operatorname{char} R \neq 2$ и $\theta_1^2 = -1$. Дальше полагаем $R_3 = \zeta_{R_2}(\theta_1)$ и берем какой-нибудь θ_2 из R_3^0, отличный от $0, \pm 1$ и $\pm\theta_1$, — тогда θ_2 является элементом второго рода, а θ_2^2 не является унитарным. Искомое противоречие мы получили.

b) Пусть теперь для некоторых положительных p и q элементы $a_{1,-p}$ и $\overline{a_{1,-q}} = \alpha$ не коммутируют. Принадлежащие телу R_1 элементы α и $\alpha + 1$ являются элементами второго рода, поскольку оба они не могут быть унитарными. Унитарность их квадратов означает равенства

$$\alpha^2\bar{\alpha}^2 = 1 \qquad \text{и} \qquad \left(\alpha^2 + 2\alpha + 1\right)\left(\bar{\alpha}^2 + 2\bar{\alpha} + 1\right) = 1.$$

Но тогда $\bar{\alpha}^2$ содержится в R_1, $\operatorname{char} R = 2$ (поскольку $\bar{\alpha} \notin R_1$) и $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 = \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha} + 1$, что противоречит $\bar{\alpha} \notin R_1$.

2) Предположим теперь, что для каких-то положительных индексов p и q элементы

$$\alpha = a_{1,-p} \quad \text{и} \quad \beta = a_{1,-q}$$

не коммутируют. При $\mu = \bar\beta\bar\alpha^{-1}$ возьмем какой-нибудь элемент θ, не коммутирующий с μ, и положим

$$\eta = \mu\theta\mu^{-1} \quad \text{и} \quad \varkappa = (\mu+1)\theta(\mu+1)^{-1}$$

(отметим, что η и $\varkappa$ не равны θ и не коммутируют с μ). Для таких элементов нам потребуется матрица

$$g(\theta) = ad(\varkappa)d_p(\varkappa^{-1}\theta)d_q(\varkappa^{-1}\eta)a^{-1}.$$

Несложный подсчет показывает, что $g_{1,-1}(\theta) = 0$, а это означает, что либо $g_{1k}(\theta) = 0$ для всех $k \neq 1$, либо $g_{11}(\theta) = 0$. Рассматривая матрицу

$$h(\theta) = c(\varkappa^{-1})g(\theta) = ad_p(\varkappa^{-1}\theta)d_q(\varkappa^{-1}\eta)a^{-1},$$

непосредственными вычислениями устанавливаем, что

$$h_{1,-1}(\theta) = \left(\alpha(\bar\mu+1)^{-1}\bar\theta - \beta(\bar\mu+1)^{-1}\bar\theta\bar\mu^{-1}\right)(\bar\mu\bar\theta^{-1} - \bar\theta^{-1}\bar\mu).$$

Поскольку $h_{1,-1}(\theta)$, очевидно, отличен от 0, мы имеем $g_{11}(\theta) = 0$ и $c_{11}(\varkappa^{-1}) = 0$, что означает равенство

$$1 = \sum_{l>0}(a_{1,-l} - \varkappa a_{1,-l}\bar\varkappa)\,a'_{-l,1}. \tag{4}$$

Заменяя θ на $\theta+1$ и $\varkappa$ на $\varkappa+1$, получаем также

$$\sum_{l>0}(\varkappa a_{1,-l} + a_{1,-l}\bar\varkappa + a_{1,-l})\,a'_{-l,1} = 0. \tag{5}$$

Дальнейшие рассуждения зависят от характеристики нашего тела. При $\operatorname{char} R \neq 2$ в (4) можно $\varkappa$ заменить на $\varkappa - 1$ и получить

$$\sum_{l>0}(\varkappa a_{1,-l} + a_{1,-l}\bar\varkappa - a_{1,-l})\,a'_{-l,1} = 0,$$

откуда следуют равенства

$$\sum_{l>0} a_{1,-l}a'_{-l,1} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{l>0} a_{1,-l}\bar\varkappa a'_{-l,1} = 0. \tag{6}$$

При $\operatorname{char} R = 2$ эти же соотношения (6) можно получить из несколько иных соображений: достаточно воспользоваться тем, что $\varkappa_1 = \varkappa\mu$ и $\varkappa_2 = \varkappa(\mu+1)$ не коммутируют с μ. Для окончания доказательства леммы остается заметить, что (4) и (6) противоречат друг другу.

Доказанная лемма позволяет далее считать, что для всех не содержащих нулевых элементов матриц из H все частичные суммы длинного типа отличны от 0. Следующее наше утверждение показывает, что при наложенных на наше форменное кольцо ограничениях достаточно в H найти какую-нибудь нетривиальную трансвекцию *длинного типа*.

Лемма 6. *Пусть выполнено условие* $\mathbf{T}_{n-1}$. *Если подгруппа* H *содержит не имеющую нулевых элементов матрицу* a, *для которой при некотором индексе* r *частичная сумма* $S_{r,-r}(a)$ *принадлежит* Λ^m, *и содержит матрицу* b, *имеющую нулевые элементы, но не являющуюся мономиальной, то* H *содержит нетривиальную трансвекцию короткого типа.*

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущей леммы, мы можем полагать $r = 1$ и $a_{1l} = 1$ при всех положительных l. Проводя при необходимости скэйлинг форменного кольца (R, Λ) с помощью $S_{1,-1}(a)$ (эту частичную сумму естественно считать ненулевой — иначе можно просто сослаться на лемму 5, дополнительно мы можем предполагать, что $S_{1,-1}(a) = 1$, причем 1 является следом относительно нашей инволюции (подробности такого подхода приведены в начале раздела 8 работы [4]).

Если матрица b не является мономиальной, то для некоторой тройки индексов i, j и k ($j \neq k$) элементы b_{ij} и b_{ik} обратимы. Выберем индекс s так, чтобы b'_{si} был ненулевым; тогда оба произведения $b'_{si}b_{ij}$ и $b'_{si}b_{ik}$ обратимы, откуда следует существование в H нетривиальной трансвекции короткого типа, если j и k отличны от $\pm s$. Поэтому будем считать, что $j = s$ и $k = -s$. Тогда из леммы 2 следует, что $\Gamma_i \neq 0$, то есть в группе H содержится нетривиальная трансвекция длинного типа.

Далее рассматриваем принадлежащую H матрицу

$$c = aT_{i,-i}(\gamma),$$

положив $\gamma = 1$ при положительном i и $\gamma = a_{1i}^{-1}\overline{a_{1i}^{-1}}$ при отрицательном i (в обоих случаях аргумент трансвекции принадлежит Λ^m). Легко понять, что $S_{1,-1}(c) = 0$, а это значит, что наше утверждение следует из предыдущих лемм.

Установим теперь один простой факт, связанный с “почти центральными” элементами некоммутативного тела.

Лемма 7. *Предположим, что* 1 *является следом относительно инволюции. Если два элемента* α *и* β *нашего тела коммутируют со всеми унитарными элементами из* R, *то в четверке* α, $\bar{\alpha}$, β, $\bar{\beta}$ *все элементы коммутируют.*

Доказательство. Напомним (мы говорили об этом в [4]), что каждый нееденичный унитарный элемент θ тела R представим в виде $\theta = 1 - \bar{\varkappa}^{-1}$ при $\varkappa + \bar{\varkappa} = 1$. Поэтому из условия нашей леммы следует, что и α, и β коммутируют с произвольными элементами аддитивной группы R^-. Заметим, что если $\operatorname{char} R = 2$, то по лемме Дьедонне (см. [5, лемма 1]) α и β оказываются центральными, а наше утверждение — тривиальным. Рассмотрим далее случай $\operatorname{char} R \neq 2$. Тогда α коммутирует с $\alpha - \bar{\alpha}$, а поэтому и с $\bar{\alpha}$; по аналогичной причине β коммутирует с $\bar{\beta}$. Если $\beta \neq \bar{\beta}$, то наше утверждение следует из того, что α коммутирует с $\beta - \bar{\beta}$ и с $\beta^2 - \bar{\beta}^2$. При $\beta = \bar{\beta}$ равенство $\alpha\beta = \beta\alpha$ доказывается несколько иначе: берем унитарный элемент θ, отличный от ± 1, и пользуемся тем, что произведение $(\theta - \bar{\theta})\beta$ принадлежит R^-.

Докажем теперь заключительную лемму о трансвекциях, из которой следует наша теорема.

Лемма 8. *Пусть выполнено условие* $\mathbf{T}_{n-1}$. *Если подгруппа* H *содержит не имеющую нулевых элементов матрицу* a, *для которой при некотором индексе* r *частичная сумма* $S_{r,-r}(a)$ *принадлежит* Λ^m, *то* H *содержит нетривиальную трансвекцию короткого типа.*

Доказательство. Мы, разумеется, считаем, что 1 является следом относительно инволюции, частичная сумма $S_{1,-1}(a)$ равна 1 и $a_{1l} = 1$ при всех положительных l. Воспользуемся тем, что группа $\mathcal{U}(R)$ всех унитарных элементов нашего тела бесконечна, причем для всякого θ из $\mathcal{U}(R)$ в матрице

$$c(\theta) = ad(\theta)a^{-1}$$

ее элемент $c_{1,-1}(\theta)$ равен 0.

Рассмотрим две различные ситуации.

1) Сначала докажем справедливость нашего утверждения при условии, что все элементы первой строки матрицы a коммутируют с любым унитарным элементом. В силу леммы 6 каждую матрицу $c(\theta)$ (при унитарном θ) можно считать мономиальной;

очевидно, что в рассматриваемой ситуации $c_{11}(\theta) = \theta = c_{-1,-1}(\theta)$. Если в равенстве

$$ad(\theta) = c(\theta)a$$

мы приравняем элементы, стоящие на соответствующих местах последних строк этих двух матриц, то получим $a_{-1,j}\theta = \theta a_{-1,j}$ при любом j. Все элементы первой и последней строк матрицы a коммутируют со всеми унитарными элементами нашего тела, поэтому в силу леммы 7 все они принадлежат некоторому подполю тела R, инвариантному относительно инволюции. В этом случае наше утверждение является следствием леммы 4 и теоремы 3 из [4].

2) Пусть теперь $a_{1,-p}\theta \neq \theta a_{1,-p}$ для некоторого положительного индекса p и какого-то унитарного элемента θ. Покажем, что в этом случае существует положительный индекс q, для которого не все элементы группы R^- входят в централизатор произведения $a_{1,-p}^{-1}a_{1,-q}$. Это очевидно при $\operatorname{char} R = 2$: если бы все инвариантные относительно инволюции элементы содержались в $\zeta_R(a_{1,-p}^{-1}a_{1,-l})$ для всех $l > 0$, то по уже упоминавшейся лемме Дьедонне мы имели бы $a_{1,-l} = \gamma_l a_{1,-p}$, где γ_l принадлежат центру тела, из чего следовала бы центральность самого $a_{1,-p}$, а это не так. При $\operatorname{char} R \neq 2$ предположим, что группа R^- содержится в централизаторе $\zeta_R(a_{1,-p}^{-1}a_{1,-l})$ для каждого $l > 0$. Понятно, что в этом случае $a_{1,-p}^{-1}a_{1,-l}$ коммутирует со всеми унитарными элементами нашего тела, в частности, с θ, то есть $a_{1,-p}\theta a_{1,-p}^{-1} = a_{1,-l}\theta a_{1,-l}^{-1}$. Но тогда оказывается, что

$$c_{1,-1}(\theta) = 0 = \sum_{l>0}(a_{1,-l}\theta - \theta a_{1,-l})a'_{-l,-1} =$$
$$= \sum_{l>0}(a_{1,-p}\theta a_{1,-p}^{-1} - \theta)a_{1,-l}a'_{-l,-1} = \theta - a_{1,-p}\theta a_{1,-p}^{-1},$$

а это противоречит условиям на p и θ.

Зафиксируем далее индексы p и q, для которых R^- не содержится в $\zeta_R(a_{1,-p}^{-1}a_{1,-q})$, и введем обозначения

$$a_{1,-p} = \alpha, \quad a_{1,-q} = \beta, \quad \bar{\beta}\bar{\alpha}^{-1} = \mu \quad \text{и} \quad R_1 = \zeta_R(\mu).$$

Ясно, что тогда R^- не содержится и в R_1. В этом случае найдутся унитарные элементы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, не принадлежащие R_1, для которых произведение $\varkappa_1\varkappa_2$ также не принадлежит R_1 (мы опускаем доказательство существования такой пары, поскольку оно практически буквально повторяет рассуждения в доказательстве леммы 20 из [4]).

Теперь мы используем тот же прием, что и в доказательстве леммы 5. Для произвольного унитарного $\varkappa$, не принадлежащего R_1, положим

$$\theta = (\mu+1)^{-1}\varkappa(\mu+1) \quad \text{и} \quad \eta = (\mu^{-1}+1)^{-1}\varkappa(\mu^{-1}+1)$$

и рассмотрим матрицу

$$g(\varkappa) = ad(\varkappa)d_p(\varkappa^{-1}\theta)d_q(\varkappa^{-1}\eta)a^{-1}.$$

Непосредственным вычислением несложно убедиться в том, что $g_{1,-1}(\varkappa) = 0$. Лемма 6 позволяет считать матрицу $g(\varkappa)$ мономиальной. Поэтому мономиальной является также матрица

$$h(\varkappa) = c(\varkappa^{-1})g(\varkappa),$$

для которой $h_{1,-1}(\varkappa) \neq 0$. Выберем далее какой-нибудь индекс s, отличный от $\pm p$ и $\pm q$ (это возможно из-за условия $n > 2$). Рассматривая элемент матрицы

$$h(\varkappa)a = ad_p(\varkappa^{-1}\theta)d_q(\varkappa^{-1}\eta), \tag{7}$$

стоящий на месте $(1, s)$, получаем

$$h_{1,-1}(\varkappa)a_{-1,s} = a_{1s},$$

а это значит, что $h_{1,-1}(\varkappa)$ не зависит от выбора унитарного $\varkappa$, не принадлежащего R_1. В то же время, на месте $(1, p)$ в матрице (7) стоит

$$h_{1,-1}(\varkappa)a_{-1,p} = a_{1p}\varkappa^{-1}\theta,$$

поэтому и произведение $\varkappa^{-1}\theta$ не зависит от выбора $\varkappa$. Вспомнив, что унитарные элементы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2^{-1}$ не принадлежат R_1, получаем отсюда

$$\varkappa_1^{-1}(\mu+1)^{-1}\varkappa_1(\mu+1) = \varkappa_2(\mu+1)^{-1}\varkappa_2^{-1}(\mu+1).$$

Но тогда $\varkappa_1\varkappa_2$ коммутирует с μ, а это противоречит выбору $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Н. А. Вавилова за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. Е. В. Дыбкова, *О сопряженности сетевых подгрупп в гиперболической унитарной группе над полем.* — Вестн. С.-Петербург. ун-та, Сер.1, **22** (1997), 10–12.
3. Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над полем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 87–96.
4. Е. В. Дыбкова, *О наддиагональных подгруппах гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 154–206.
5. J. Dieudonné, *On the structure of unitary groups.* — Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 367–385.
6. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Springer, Berlin et al. (1989).

Dybkova E. V. Overdiagonal subgroups of the hyperbolic unitary group for the good form ring over a skew field.

In the hyperbolic unitary group over a skew field we study the lattice of subgroups containing all diagonal unitary matrices. If a form parameter is minimal, this lattice has the standard description in terms of net subgroups. In our previous paper this fact was proved for the groups of degree 4.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 октября 2003 г.