Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 305, 2003 г.

Б. Б. Лурье, М. Б. Гладких

О НЕРАЗРЕШИМОСТИ В РАДИКАЛАХ НЕКОТОРОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Данная статья несколько дополняет работу [1]. Сделанное наблюдение не успело попасть в указанную статью, но представляется небезинтересным, несмотря на его элементарность.

Как известно, произвольное уравнение пятой степени посредством замены неизвестной (и при присоединении некоторых радикалов) приводится к форме Бринг–Жерарда[1]

$$x^5 + ax + b = 0. \tag{1}$$

Резольвента Кэли для уравнения пятой степени представляет собой уравнение шестой степени, коэффициенты которого суть целые рациональные функции от коэффициентов исходного уравнения. Неприводимое уравнение пятой степени разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда его резольвента имеет корень в основном поле. В общем случае коэффициенты Кэли имеют весьма громоздкий вид (они приведены в [3]). Однако для формы (1) резольвента выписывается весьма просто [4, 5]

$$R(y) = (y - a)^4(y^2 - 6ay + 25a^2) - 3125b^4y. \tag{2}$$

Совершенно удивительно, но предыдущие исследователи не обнаружили чрезвычайно простого факта. Если коэффициенты a, b уравнения (1) являются нечетными числами, то все значения многочлена $R(y)$ при целых y нечетные, поэтому уравнение (2) не имеет целых (а значит, и рациональных) корней.

Второй соавтор заметил также, что уравнение (2) не имеет целых корней и в случае, когда a нечетно, а $b \equiv 2 (\mathrm{mod} 4)$.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, грант 03-01-00633а и Программы 2003 г. фундаментальных исследований Президиума РАН “Исследования в фундаментальных областях современной математики” .

[1]Ф. Клейн предпочитает называть ее формой Бринга.

Действительно, при четных y значение $R(y)$ – нечетное. Если же y нечетно, то $(y-a)^4(y^2-6ay+25a^2)$ делится на 2^5, но $3125b^4y \equiv 16(\mathrm{mod}32)$.

Итак, имеет место теорема.

Теорема. *Пусть уравнение* x^5+ax+b *над* $\mathbb{Z}$ *неприводимо, причем* $a \equiv 1(\mathrm{mod}2)$, $b \not\equiv 0(\mathrm{mod}4)$. *Тогда это уравнение неразрешимо в радикалах.*

Литература

1. Б. Б. Лурье, *Критерий неразрешимости в радикалах уравнения простой степени.* — Докл. РАН **388** (2003), 447–448.
2. Б. Б. Лурье, *Критерий неразрешимости в радикалах неразрешимого уравнения простой степени.* Тезисы докладов Международной алгебраической конференции памяти З. И. Боревича. СПб (2002), сс. 46–47.
3. Д. А. Граве, *Элементы высшей алгебры.* Киев (1914).
4. Н. Г. Чеботарев, *Основы теории Галуа.* ОНТИ, М.-Л. (1936).
5. М. М. Постников, *Теория Галуа.* Физматгиз, М. (1963).

Lur'e B. B., Gladkikh M. B. Unsolvability in radicals for a class of equations of degree five.

An easy sufficient condition for unsolvability in radicals of an irreducible equation of the fifth degree of the Bring–Jerard form defined over $\mathbb{Z}$ is found.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 ноября 2003