Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 305, 2003 г.

О. А. Муляр

АВТОМОРФИЗМЫ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ СЕРИИ R

Над полями положительной характеристики $p < 7$ существуют серии простых алгебр Ли, которые не являются ни классическими алгебрами Ли, ни алгебрами Ли картановского типа ([1–6]). При $p = 3$ одной из таких серий является серия R, состоящая из алгебр $R(\mathbf{m}), \mathbf{m} = (m_1, m_2)$ ([3–6]).

Алгебры Ли серии R появились в работе Кузнецова [5] при классификации градуированных алгебр Ли с неполупростой компонентой L_0. Для $p > 2$ это единственные простые 1-градуированные алгебры Ли с неразрешимой подалгеброй L_0, имеющей неабелев радикал. Геометрическая реализация алгебр серии R была получена Брауном ([3]) и Скрябиным ([6]). Алгебра $R = R(\mathbf{m})$ имеет $\mathbb{Z}_2$-градуировку:

$$R = R_{\overline{0}} \oplus R_{\overline{1}},$$

где $R_{\overline{0}} = W(2:\mathbf{m}) = W$ – общая алгебра Ли картановского типа от двух переменных, $R_{\overline{1}} = B^2(\Omega(\mathbf{m}))$ – подмодуль точных форм степени 2.

Алгебра R также обладает $\mathbb{Z}$-градуировкой глубины 1

$$R(\mathbf{m}) = \bigoplus_{i=-1}^{s} R_i.$$

Пусть $\operatorname{gr} W$, $\operatorname{gr}\Omega^2$ – естественные градуировки в W_i, $\Omega^2(2:\mathbf{m}) = \Omega^2$. Положим

$$\operatorname{gr}_i R(\mathbf{m}) = \operatorname{gr}_i W \oplus \operatorname{gr}_{i+3}\Omega^2 \cap B^2(\Omega).$$

Пусть ∂_1, ∂_2 – базис W, $\omega = dx_1 \wedge dx_2$. Тогда

$$R_{-1} = \langle \partial_1, \partial_2, \omega \rangle,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант No. 02-01-00725.

$$R_0 = \langle x_i\partial_j, x_1\omega, x_2\omega, 1 \le i, j \le 2\rangle,$$
$$\dots$$
$$R_k = \langle x_1^{(s_1)}x_2^{(t_1)}\partial_j, x_1^{(s_2)}x_2^{(t_2)}\omega,$$
$$s_i + t_i = k+1, \quad 1 \le i, \quad j \le 2, \quad (s_2, t_2) \ne (p^{m_1}-1, p^{m_2}-1)\rangle.$$

Определим фильтрацию, индуцированную $\mathbb{Z}$-градуировкой:

$$R(\mathbf{m}) = R_{(-1)} \supset R_{(0)} \supset R_{(1)} \supset \dots,$$

где $R_{(i)} = \bigoplus\limits_{j\ge i} R_j$.

Умножение в R определяется следующим образом: $R_{\overline{0}} \times R_{\overline{0}} \to R_{\overline{0}}$ – обычное умножение в W, умножение $R_{\overline{0}}$ на $R_{\overline{1}}$ является стандартным действием W на $R_{\overline{1}} \subset \Omega^2$, а $R_{\overline{1}} \times R_{\overline{1}} \to R_{\overline{0}}$ определяется по следующему правилу:

$$[f\omega, g\omega] = (f\partial_2 g - g\partial_2 f)\partial_1 - (f\partial_1 g - g\partial_1 f)\partial_2,$$

где f, $g \in \mathcal{O}(2:\mathbf{m})$, $\mathcal{O}(2:\mathbf{m})$ – алгебра разделенных степеней от двух переменных. Размерность алгебры $R(\mathbf{m})$ равна $3^{m+1}-1$, где $m = m_1 + m_2$.

В данной работе исследуются автоморфизмы алгебр серии R. Основной результат сформулирован в теореме 6. Теорема 4 дает описание дифференцирований алгебр серии R.

Автор выражает благодарность М. И. Кузнецову за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

1. Предварительные результаты

1.1. Геометрические автоморфизмы алгебры R.

Назовем автоморфизм φ геометрическим, если $\varphi(R_{\overline{0}}) = R_{\overline{0}}$. Обозначим через $\mathrm{Aut}_{\overline{0}}R$ подгруппу геометрических автоморфизмов.

Предложение 1. *Пусть* $\mathrm{res} : \mathrm{Aut}_{\overline{0}}R \to \mathrm{Aut}\, W(2:\mathbf{m})$ *– гомоморфизм ограничения* ($R_{\overline{0}} = W(2:\mathbf{m})$), μ_2 *– групповая схема квадратных корней из* 1. *Тогда следующая последовательность точна:*

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\overline{0}}R \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{Aut}\, W(2:\mathbf{m}) \longrightarrow 1.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\overline{0}}R$. Покажем, что $\varphi(R_{\overline{1}}) = R_{\overline{1}}$. Действительно, так как $\varphi(R_{\overline{0}}) = R_{\overline{0}}$, то $\varphi(R_{\overline{1}})$ – неприводимый

$R_{\bar{0}}$-модуль. Так как $R(\mathbf{m})$ единственным образом раскладывается в прямую сумму неизоморфных неприводимых $R_{\bar{0}}$-подмодулей, $R = R_{\bar{0}} \oplus R_{\bar{1}}$, то $\varphi(R_{\bar{1}}) = R_{\bar{1}}$.

Найдем ядро ограничения res. Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\bar{0}} R$ такой, что $\varphi|_{R_{\bar{0}}} = \mathrm{id}$. Тогда $\varphi|_{R_{\bar{1}}}$ – автоморфизм $R_{\bar{0}}$-модуля $R_{\bar{1}}$. Из леммы Шура следует, что $\varphi|_{R_{\bar{1}}} = a \cdot \mathrm{id}$, $a \in K^*$. Так как $[R_{\bar{1}}, R_{\bar{1}}] = R_{\bar{0}}$, то $a^2 = 1$ и $a \in \mu_2$.

Покажем, что res сюръективно. Как известно ([7]), автоморфизмы алгебры $W(2:\mathbf{m})$ индуцированы автоморфизмами алгебры разделенных степеней $\mathcal{O}(2:\mathbf{m})$, то есть заменами переменных.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{O}(2:\mathbf{m})$, J_φ– якобиан φ. Для $D \in W(2:\mathbf{m})$, $\varphi(D) = \varphi D \varphi^{-1}$. Автоморфизм φ естественно действует на Ω^2 и B^2, то есть на $R_{\bar{1}}$. Однако, это действие не является автоморфизмом алгебры R. Для того, чтобы φ продолжалось до автоморфизма алгебры R, надо рассматривать $R_{\bar{1}}$ как подмодуль W-модуля объемных плотностей

$$\Omega^2_{-1/2} = \{f\omega^{-1/2}, f \in \mathcal{O}(2:\mathbf{m})\}.$$

Заметим, что при $p = 3$ W-модули $\Omega^2_{-1/2}$ и Ω^2 изоморфны. Действие φ на $\Omega^2_{-1/2}$ можно определить двумя способами:

$$\varphi(f\omega^{-1/2}) = \pm\varphi(f) J_\varphi(0)^{-3/2} J_\varphi \omega^{-1/2}. \tag{1}$$

Непосредственная проверка показывает, что при таком продолжении φ на $R_{\bar{1}}$ мы получаем автоморфизм Φ алгебры R. Очевидно, $\Phi|_{R_{\bar{0}}} = \varphi$. $\square$

Отметим, что группа геометрических автоморфизмов $\mathrm{Aut}_{\bar{0}} R$ является двулистным накрытием $\mathrm{Aut}\,W(2:\mathbf{m})$ (см. (1)).

1.2. Усеченные коиндуцированные модули и автоморфизмы.

Пусть $\mathfrak{g} = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle$, $U(\mathfrak{g})$ – универсальная обертывающая алгебра. По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта $U(\mathfrak{g})$ можно отождествить с $K[\partial_1, \partial_2]$.

Рассмотрим идеал J, порожденный $\partial_i^{(p^{m_i})}$, $J = (\partial_1^{(p^{m_1})}, \partial_2^{(p^{m_2})})$. Пусть $\mathfrak{U} = U(\mathfrak{g})/J$, V – векторное пространство. На пространстве $c(V) = \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{U}, V)$ имеется структура $\mathfrak{U}$-модуля: $(af)(b) = f(ba)$ для $f \in c(V)$, $a, b \in \mathfrak{U}$. Модуль $c(V)$ называется коиндуцированным $\mathfrak{U}$-модулем. (Это определение согласовано с [8]). Модуль $c(V)$ имеет естественную структуру $\mathcal{O}$-модуля, где $\mathcal{O} = \mathrm{Hom}(\mathfrak{U}, K)$ –

алгебра, дуальная коалгебре $\mathfrak{U}$. Если V – тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль, можно считать, что $V \subset c(V)$, отождествляя $v \in V$ с функцией на $\mathfrak{U}$, $v(\partial^\alpha) = \delta_{\alpha,0}$. Тогда базис V является базисом свободного $\mathcal{O}$-модуля $c(V)$. Алгебра $\mathcal{O}$ является алгеброй разделенных степеней $\mathcal{O}(2:\mathbf{m})$.

Рассмотрим фильтрацию $\mathfrak{g}$-модуля $c(V)$: $c(V) = c(V)_{(-1)} \supset c(V)_{(0)} \supset c(V)_{(1)} \supset \dots$, где $c(V)_{(i)} = \mathfrak{m}_{(i+1)}c(V)$, $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал в $\mathcal{O}$, и градуировку $c(V) = c(V)_{-1} \oplus c(V)_0 \oplus c(V)_1 \oplus \dots$, $c(V)_i = \mathfrak{m}_{i+1}V$, где $\mathcal{O} = K \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \dots$ – стандартная градуировка алгебры $\mathcal{O}(2:\mathbf{m})$.

Отметим, что $c(V)_{(i)} = \{l \in c(V)_{(i-1)} | \mathfrak{g} \cdot l \subset c(V)_{(i-1)}\}$, $i \geq 1$, $c(V)_{(0)} = \{f \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{U}, V) | f(1) = 0\}$.

Пусть теперь $V - \mathfrak{U}$-модуль, $V' - \mathfrak{U}$-подмодуль V, не содержащий ненулевых $\mathfrak{U}$-инвариантных подпространств.

Теорема 1. *Существует гомоморфизм* $j : V \to \operatorname{Hom}_K(\mathfrak{U}, V/V')$ *такой, что*

(1) j *– гомоморфизм* $\mathfrak{U}$*-модулей,*

(2) j *– инъективный гомоморфизм.*

Доказательство. Определим j следующим образом: $j(v)(b) = \overline{b \cdot v}$, где $b \in \mathfrak{U}, v \in V$. Очевидно, j – гомоморфизм $\mathfrak{U}$-модулей. Так как $\operatorname{Ker} j - \mathfrak{U}$-инвариантное подпространство и $\operatorname{Ker} j \subset V'$, то $\operatorname{Ker} j = 0$. □

Так как абелева алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует нильпотентными операторами на V, то $H = \operatorname{Ann}_V \mathfrak{g} \neq 0$. Если $V = H \oplus V'$, то $c(V/V') = c(H)$. Очевидно, если в теореме 1 $\operatorname{codim} V' = 1$, то $V = H \oplus V'$. Таким образом, мы имеем рассмотренную выше ситуацию с тривиальным $\mathfrak{g}$-модулем H.

Пусть $\mathfrak{g} = \langle \partial_i, i = 1,2 \rangle \subset W = W(2:\mathbf{m}), V$ – W-модуль, V' – $\widehat{W}_{(0)}$-модуль, где $\widehat{W}_{(0)} = W_{(0)} + \langle (\partial/\partial x_i)^{p^{m_i}}, i = 1,2 \rangle$. (см. [8]). Можно отождествить усеченный коиндуцированный W-модуль $\overline{\operatorname{coind}}(V/V') = \operatorname{Hom}_{U(\widehat{W}_{(0)})}(U(W), V/V')$ с $c(V/V')$, так как $\{\partial^\alpha\}$ – базис свободного левого $U(\widehat{W}_{(0)})$-модуля $U(W)$. В дальнейшем в подобной ситуации мы будем отождествлять $\overline{\operatorname{coind}}(V/V')$ с $c(V/V')$.

Теорема 2. *Пусть* $W = W(n:\mathbf{m})$ *– общая алгебра Ли картановского типа,* $l_1, l_2, \dots, l_n \in W$ *такие, что*

1) $l_i^{p^{m_i}} = 0$, $1 \le i \le n$;

2) $\langle l_1, l_2, \dots, l_n \rangle$ – *абелева подалгебра;*

3) $\langle l_1, l_2, \dots, l_n \rangle \oplus W_{(0)} = W$.

Тогда существует единственный автоморфизм $\Phi \in \operatorname{Aut} W$ *такой, что* $\Phi(\partial_i) = l_i$.

Набросок доказательства. Напомним (см. [8]), что алгебру $\mathcal{O}(n : \mathbf{m})$ можно восстановить инвариантным способом по алгебре Ли $W(n : \mathbf{m})$.

Пусть $\mathcal{O} = \operatorname{Hom}_B(U(W), K)$, B – подалгебра в $U(W)$, порожденная нормализатором $W_{(0)}$ в $\operatorname{Prim}(U(W))$ (алгебре Ли примитивных элементов биалгебры $U(W)$). Согласно [8], $B = U(\widehat{W}_{(0)})$, где $\widehat{W}_{(0)} = W_{(0)} + \langle (\partial/\partial x_i)^{p^{m_i}},\ i = 1, \dots, n \rangle$. Умножение в $\mathcal{O}$ определяется формулой

$$(f \cdot g)(u) = \sum_{(u)} f(u^{(1)}) g(u^{(2)}),$$

где $\Delta(u) = \sum_{(u)} u^{(1)} \otimes u^{(2)}$ – коумножение в $U(W)$. Алгебра $U(W)$ является свободным левым B-модулем с базисом $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$, $0 \le \alpha_i < p^{m_i}$. Следовательно,

$$\mathcal{O} = \operatorname{Hom}_K(K[\partial_1, \dots, \partial_n]/(\partial_1^{p^{m_1}}, \dots, \partial_n^{p^{m_n}}), K).$$

Для двойственного базиса $x^{(\alpha)} = x_1^{(\alpha_1)} \cdots x_n^{(\alpha_n)}$, $0 \le \alpha_i < p^{m_i}$, имеем $x^{(\alpha)} \cdot x^{(\beta)} = \binom{\alpha+\beta}{\alpha} x^{(\alpha+\beta)}$ и $\partial_i(x^{(\alpha)}) = x^{(\alpha - \varepsilon_i)}$. С другой стороны, $\{l^\alpha = l_1^{\alpha_1} \cdots l_n^{\alpha_n},\ 0 \le \alpha_i < p^{m_i},\ i = 1, \dots n\}$ – также базис свободного B-модуля $U(W)$ и, следовательно,

$$\mathcal{O} = \operatorname{Hom}_K(K[l_1, \dots, l_n]/(l_1^{p^{m_1}}, \dots, l_n^{p^{m_n}}), K).$$

Для двойственного базиса $y^{(\alpha)} = y_1^{(\alpha_1)} \cdots y_n^{(\alpha_n)}$ выполняются те же соотношения, что и для $x^{(\alpha)}$ и $l_i(y^{(\alpha)}) = y^{(\alpha - \varepsilon_i)}$. Очевидно, линейное отображение $\phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$, $\phi(x^{(\alpha)}) = y^{(\alpha)}$ – автоморфизм алгебры $\mathcal{O}$. При этом $\phi \partial_i \phi^{-1} = l_i$.

Мы имеем два базиса свободного $\mathcal{O}$-модуля $W(n : \mathbf{m})$ $\{\partial_i, i = 1, \dots, n\}$ и $\{l_i, i = 1, \dots, n\}$. Так как $D^\phi = \phi D \phi^{-1} = \sum_i f_i(y) l_i \in W(n : \mathbf{m})$ для $D = \sum_i f_i(x) \partial_i$, то отображение $\Phi : D \mapsto D^\phi$ является автоморфизмом алгебры $W(n : \mathbf{m})$, при этом $\Phi(\partial_i) = l_i$. Очевидно, Φ определен однозначно. $\square$

Рассмотрим алгебру Ли $\widetilde{R} = \widetilde{R}_{\overline{0}} \oplus \widetilde{R}_{\overline{1}}$, где $\widetilde{R}_{\overline{0}} = R_{\overline{0}} = W(2:\mathbf{m})$, $\widetilde{R}_{\overline{1}} = \Omega^2$. Умножение в $\widetilde{R}$ определяется так же, как в R. Нетрудно видеть, что $R = [\widetilde{R}, \widetilde{R}]$.

Применим теорию усеченных коиндуцированных модулей к доказательству следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть α – абелева подалгебра в $\widetilde{R}$ такая, что*

$$\alpha \cap \widetilde{R}_{(0)} = 0, \alpha + \widetilde{R}_{(0)} = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle + \widetilde{R}_{(0)},$$

$$\alpha = \langle l_1, l_2 \rangle, l_1^{p^{m_1}} = l_2^{p^{m_2}} = 0, l_i \equiv \partial_i (\operatorname{mod} \widetilde{R}_{(0)}).$$

Тогда существует автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut} \widetilde{R}$ такой, что $\varphi(\partial_1) = l_1$, $\varphi(\partial_2) = l_2$.

Доказательство. Нетрудно показать, что $\widetilde{R}_{(0)}$ не содержит ненулевых α-инвариантных подпространств. В самом деле, если $H \subset \widetilde{R}_{(0)}$ – ненулевое α-инвариантное подпространство, то $\operatorname{gr} H \subset \widetilde{R}_{(0)}$ – подпространство, инвариантное относительно $\langle \partial_1,\ \partial_2 \rangle$. Однако, $\widetilde{R}_{(0)}$ не содержит ненулевых подпространств, инвариантных относительно $\langle \partial_1,\ \partial_2 \rangle$. Следовательно, $\operatorname{gr} H = 0$ и $H = 0$.

Пусть U – универсальная обертывающая алгебра α. Рассмотрим $\mathfrak{U} = U/J$, где J – идеал, порожденный $\partial_i^{(p^{m_i})}, i = 1, 2$. По теореме 1 существует инъективный гомоморфизм $j : \widetilde{R} \to \operatorname{Hom}_K(\mathfrak{U}, \widetilde{R}/\widetilde{R}_{(0)})$. Из равенства размерностей следует, что j – изоморфизм.

Пусть V_0, V_1 такие, что $\widetilde{R}_{(0)} \subset V_i \subset \widetilde{R}$, $i = 1, 2$, $\widetilde{R}/\widetilde{R}_{(0)} = V_0/\widetilde{R}_{(0)} \oplus V_1/\widetilde{R}_{(0)}$. Обозначим $V_i' = j^{-1}(\operatorname{Hom}_K(\mathfrak{U}, V_i/\widetilde{R}_{(0)}))$, $i = 0, 1$. Ясно, что V_i' – наибольшее α-инвариантное подпространство в V_i,

$$\dim V_i' = 3^m \dim V_i/\widetilde{R}_{(0)},$$

где $m = m_1 + m_2$. Сравнивая размерности $\widetilde{R}$ и $V_1' \oplus V_2'$, получаем разложение

$$\widetilde{R} = V_1' \oplus V_2'. \tag{2}$$

Обозначим через $A_{\overline{0}}$, $A_{\overline{1}}$ – наибольшие α-инвариантные подпространства в $\alpha + \widetilde{R}_{(0)}$, $\langle \omega \rangle + \widetilde{R}_{(0)}$ соответственно.

Покажем, что $[A_{\overline{0}}, A_{\overline{0}}] \subset A_{\overline{0}}$. Имеем $[A_{\overline{0}}, A_{\overline{0}}] \subset [\alpha, A_{\overline{0}}] + [\widetilde{R}_{(0)}, A_{\overline{0}}] \subset A_{\overline{0}} + \widetilde{R}_{(0)} \subset \alpha + \widetilde{R}_{(0)}$. Так как $[A_{\overline{0}}, A_{\overline{0}}]$ – α-инвариантное подпространство, то оно содержится в $A_{\overline{0}}$.

Пусть $A_{\overline{0},(0)} = \widetilde{R}_{(0)} \cap A_{\overline{0}}$, $A_{\overline{1},(0)} = \widetilde{R}_{(0)} \cap A_{\overline{1}}$. Так как $[\alpha, A_{\overline{0},(0)}] \subset A_{\overline{0}}$ ($A_{\overline{0}}$ – α-инвариантно) и $\alpha \equiv \langle \partial_1, \partial_2 \rangle (\operatorname{mod} \widetilde{R}_{(0)})$, то $A_{\overline{0},(0)} \subset \langle x_i \partial_j, 1 \leq i, j \leq 2 \rangle + \widetilde{R}_{(1)}$. Аналогично, так как $A_{\overline{1}} = \langle \widetilde{\omega} \rangle + A_{\overline{1},(0)}$ (здесь $\widetilde{\omega} \equiv \omega (\operatorname{mod} \widetilde{R}_{(0)})$) и $A_{\overline{1}}$ – α-инвариантно, то $[\alpha, A_{\overline{1},(0)}] \subset A_{\overline{1}} \subset \langle \omega \rangle + \widetilde{R}_{(0)}$. Так как $\alpha \equiv \langle \partial_1, \partial_2 \rangle (\operatorname{mod} \widetilde{R}_{(0)})$, то $A_{\overline{1},(0)} \subset \langle x_1 \omega, x_2 \omega \rangle + \widetilde{R}_{(1)}$.

Покажем, что $[A_{\overline{0}}, A_{\overline{1}}] \subset A_{\overline{1}}$. В самом деле, $[A_{\overline{0}}, A_{\overline{1}}] = [\alpha, A_{\overline{1}}] + [A_{\overline{0},(0)} + A_{\overline{1}}] \subset A_{\overline{1}} + [\langle x_i \partial_j, 1 \leq i, j \leq 2 \rangle + \widetilde{R}_{(1)}, \langle \omega \rangle + \widetilde{R}_{(0)}] \subset \langle \omega \rangle + \widetilde{R}_{(0)}$. Теперь, так как $[A_{\overline{0}}, A_{\overline{1}}]$ – α-инвариантное подпространство, то $[A_{\overline{0}}, A_{\overline{1}}] \subset A_{\overline{1}}$.

Далее, $[A_{\overline{1}}, A_{\overline{1}}] = [\langle \widetilde{\omega} \rangle + A_{\overline{1},(0)}, \langle \widetilde{\omega} \rangle + A_{\overline{1},(0)}] \subset [\langle \widetilde{\omega} \rangle, A_{\overline{1},(0)}] + [A_{\overline{1},(0)}, A_{\overline{1},(0)}] \subset [\langle \omega \rangle + \widetilde{R}_{(0)}, \langle x_1 \omega, x_2 \omega \rangle + \widetilde{R}_{(1)}] + \widetilde{R}_{(0)} \subset \langle \partial_1, \partial_2 \rangle + \widetilde{R}_{(0)} = \alpha + \widetilde{R}_{(0)}$. Теперь, так как $[A_{\overline{1}}, A_{\overline{1}}]$ – α-инвариантно, $[A_{\overline{1}}, A_{\overline{1}}] \subset A_{\overline{0}}$.

Обозначим $\overline{A_{\overline{0}}} = A_{\overline{0}} / A_{\overline{0}} \cap \widetilde{R}_{(0)}, \overline{A_{\overline{1}}} = A_{\overline{1}} / A_{\overline{1}} \cap \widetilde{R}_{(0)}$. Тогда $\overline{A_{\overline{0}}} \cong \alpha$, $\overline{A_{\overline{1}}} \cong \langle \widetilde{\omega} \rangle$, $\widetilde{\omega} \equiv \omega (\operatorname{mod} \widetilde{R}_{(0)})$ и $\widetilde{R} / \widetilde{R}_{(0)} = \overline{A_{\overline{0}}} + \overline{A_{\overline{1}}}$, поэтому из (2) получаем: $\widetilde{R} = A_{\overline{0}} + A_{\overline{1}}$.

Заметим, что $A_{\overline{0}}, A_{\overline{1}}$ имеют стандартную фильтрацию коиндуцированного модуля, $A_{\overline{0},(i)} = \mathfrak{m}^{(i+1)} \alpha$, где $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал алгебры $\mathcal{O}$. Аналогично, $A_{\overline{1},(i)} = \mathfrak{m}^{(i+1)} \widetilde{\omega}$, где $[\alpha, \widetilde{\omega}] = 0$.

Так как $\widetilde{R}_{(i)} = \{ l \in \widetilde{R}_{(i-1)} | [\alpha, l] \subset \widetilde{R}_{(i-1)} \}, i > 0$, то $A_{\overline{0},(i)} = \widetilde{R}_{(i)} \cap A_{\overline{0}}$ и $A_{\overline{1},(i)} = \widetilde{R}_{(i)} \cap A_{\overline{1}}$. Следовательно, алгебра $A_{\overline{0}}$ – фильтрованная алгебра Ли и $A_{\overline{1}}$ – фильтрованный $A_{\overline{0}}$-модуль. Кроме того, $[A_{\overline{1},(i)}, A_{\overline{1},(j)}] \subset A_{\overline{0},(i+j)}$.

Действие α на коиндуцированных модулях $A_{\overline{0}}, A_{\overline{1}}$ совпадает с умножением в $\widetilde{R}$, поэтому $[l_i, fl] = l_i(f) \cdot l$ для $f \in \mathcal{O}, l_i \in \alpha$ и $[l_i, f\widetilde{\omega}] = l_i(f) \widetilde{\omega}$. В частности, $(A_{\overline{0}}, A_{\overline{0},(0)})$ – транзитивная алгебра Ли и вложение $j : (A_{\overline{0}}, A_{\overline{0},(0)}) \longrightarrow (c(\alpha), \mathfrak{m}c(\alpha))$ является минимальным вложением $A_{\overline{0}}$ в $W(2 : \mathbf{m})$ (см. [8]). Из равенства размерностей получаем, что $A_{\overline{0}} \cong W(2 : \mathbf{m})$.

Согласно теореме 2 соответствующий изоморфизм φ можно выбрать так, чтобы $\varphi(l_i) = \partial_i$, $\varphi(y^{(\gamma)} l_i) = x^{(\gamma)} \partial_i$. Здесь и в дальнейшем через $y^{(\gamma)}$ обозначается базис $\mathcal{O} = \operatorname{Hom}(U(\alpha), K)$, дуальный базису $l^{\gamma} = l_1^{\gamma_1} l_2^{\gamma_2}$, $0 \leq \gamma_i < p^{m_i}$.

Теперь, $[y_s l_t, \widetilde{\omega}] \in A_{\overline{1}}$. Имеем $[l_i, [y_s l_t, \widetilde{\omega}]] = [[l_i, y_s l_t], \widetilde{\omega}] + [y_s l_t, [l_i, \widetilde{\omega}]] = l_i(y_s)[l_t, \widetilde{\omega}] + [y_s l_t, 0] = 0$. Следовательно, $[y_s l_t, \widetilde{\omega}] = a\widetilde{\omega}, a \in K$. С другой стороны, $y_s l_t \equiv x_s \partial_t (\operatorname{mod} \widetilde{R}_{(1)}), \widetilde{\omega} \equiv$

$\omega (\operatorname{mod} \widetilde{R}_{(0)})$. Поэтому $a\widetilde{\omega} = [y_s l_t, \widetilde{\omega}] = l_t(y_s)\widetilde{\omega}$. Отсюда $A_{\overline{0},(0)}$-модуль $A_{\overline{0},(0)} \cong W(2:\mathbf{m})_{(0)}$, $A_{\overline{1}}/A_{\overline{1},(0)}$ изоморфен $W(2:\mathbf{m})_{(0)}$-модулю $\Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2$. Здесь $W(2:\mathbf{m})_{(0)}$ – стандартная максимальная подалгебра в $W(2:\mathbf{m})$. Следовательно, $A_{\overline{1}} \cong \Omega^2$ как $W(2:\mathbf{m})$-модуль. Так как $\langle \widetilde{\omega} \rangle = \operatorname{Ann}_{A_{\overline{1}}} \alpha$, $\langle \omega \rangle = \operatorname{Ann}_{\Omega^2} \varphi(\alpha)$, то изоморфизм $\varphi : A_{\overline{1}} \longrightarrow \Omega^2$ можно выбрать так, чтобы $\varphi(y^{(\gamma)}\widetilde{\omega}) = x^{(\gamma)}\widetilde{\omega}$.

Найдем произведение $[y_i\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}]$. Так как $[l_i, [y_1\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}] = [[l_i, y_1\widetilde{\omega}], \widetilde{\omega}] = [l_i(y_1)\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}] = l_i(y_1)[\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}] = 0$, то $[y_1\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}] \in \operatorname{Ann}_{A_{\overline{0}}} \alpha = \alpha$. С другой стороны, $[y_1\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}] = [x_1\omega + r_1, \omega + r_0'] = \partial_2 + r_0'' = l_2 + r_0$, где $r_0, r_0', r_0'' \in \widetilde{R}_{(0)}, r_1 \in \widetilde{R}_{(1)}$. Значит, $[y_1\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}] = l_2$. Аналогичные аргументы, использующие фильтрацию в $A_{\overline{1}}$, показывают, что $[y_1\widetilde{\omega}, y_2\widetilde{\omega}] = y_1 l_1 + y_2 l_2$. Теперь индукцией по $i+j$ можно доказать, что для $f\widetilde{\omega} \in A_{\overline{1},i} = \mathfrak{m}^{i+1}\widetilde{\omega}$ и $g\widetilde{\omega} \in A_{\overline{1},j} = \mathfrak{m}^{j+1}\widetilde{\omega}$ выполняется:

$$[f\widetilde{\omega}, g\widetilde{\omega}] = (f l_2(g) - g l_2(f)) l_1 - (f l_1(g) - g l_1(f)) l_2.$$

Таким образом, имеем

$$\varphi([f\widetilde{\omega}, g\widetilde{\omega}]) = [\varphi(f\widetilde{\omega}), \varphi(g\widetilde{\omega})],$$

то есть отображение $\varphi : \widetilde{R} \longrightarrow \widetilde{R}, \varphi(y^{(\gamma)} l_i) = x^{(\gamma)}\partial_i, \varphi(y^{(\gamma)}\widetilde{\omega}) = x^{(\gamma)}\omega$ является автоморфизмом алгебры $\widetilde{R}$. $\square$

Отметим, что из предложения 2 следует, что существует точно два автоморфизма, удовлетворяющих условию теоремы 3.

2. Дифференцирования алгебры R

Пусть $\mathcal{D} = \operatorname{Der} R$. Так как $R = R_{\overline{0}} \oplus R_{\overline{1}}$, то существует автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut} R$, такой, что $\varphi|_{R_{\overline{0}}} = \mathrm{id}$, $\varphi|_{R_{\overline{1}}} = -\mathrm{id}$, $\varphi^2 = \mathrm{id}$. Естественное действие φ на $\operatorname{Der} R$, $D^{\varphi} = \varphi D \varphi^{-1}$, приводит к разложению $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\overline{0}} \oplus \mathcal{D}_{\overline{1}}$. Очевидно, $\mathcal{D}_{\overline{i}}(R_{\overline{j}}) \subset R_{\overline{i}+\overline{j}}$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Лемма 1. *Пусть $D \in \mathcal{D}$. Если $D(R_{\overline{0}}) = 0$, то $D = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $D(R_{\overline{0}}) = 0$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $D \in \mathcal{D}_{\overline{0}}$. Тогда $D(R_{\overline{1}}) \subset R_{\overline{1}}$. Для $r_0 \in R_{\overline{0}}$, $r_1 \in R_{\overline{1}}$ выполняется: $D([r_0, r_1]) = [r_0, D(r_1)]$. Так как $D|_{R_{\overline{1}}}$ – эндоморфизм $R_{\overline{0}}$-модуля $R_{\overline{1}}$ и $R_{\overline{1}}$ – неприводимый $R_{\overline{0}}$-модуль, то $D|_{R_{\overline{1}}} = \alpha \cdot \mathrm{id}$, $\alpha \in K^*$. Так как $R = R_{\overline{0}} \oplus R_{\overline{1}}$, $R_{\overline{0}} = [R_{\overline{1}}, R_{\overline{1}}]$, то $D|_{R_{\overline{1}}} = 2\alpha \cdot \mathrm{id}$. Отсюда $\alpha = 0$, то есть $D = 0$.

2. Пусть $D \in \mathcal{D}_{\overline{1}}$, $D(R_{\overline{1}}) \subset R_{\overline{0}}$. Для $r_0 \in R_{\overline{0}}$, $r_1 \in R_{\overline{1}}$ имеет место $D([r_0, r_1]) = [r_0, D(r_1)]$, то есть $D|_{R_{\overline{1}}} : R_{\overline{1}} \to R_{\overline{0}}$ – $R_{\overline{0}}$-гомоморфизм. Так как $R_{\overline{0}}$ и $R_{\overline{1}}$ – неизоморфные неприводимые $R_{\overline{0}}$-модули, то $D|_{R_{\overline{1}}} = 0$. Таким образом, $D = 0$. □

Из леммы 1 следует, что ограничение $\mathrm{res} : D \mapsto D|_{R_{\overline{0}}}$ инъективно, при этом $\mathrm{res}(\mathcal{D}_{\overline{0}}) \subset \mathrm{Der}\, R_{\overline{0}}$. Согласно [7], $\mathrm{Der}\, R_{\overline{0}} = \overline{W}(2 : \mathbf{m})$, где $\overline{W}(2 : \mathbf{m})$ – p-замыкание $R_{\overline{0}}$ в $\mathrm{Der}\, R$, причем $\overline{W}(2 : \mathbf{m})$ естественно действует дифференцированиями алгебры R.

Таким образом, $\mathcal{D}_{\overline{0}} \cong \overline{W}(2 : \mathbf{m})$.

Лемма 2. *$H^1(W(2 : \mathbf{m}), \Omega^2) = 0$.*

Доказательство. Так как $\Omega^2 = \overline{\mathrm{coind}}_W \langle\omega\rangle$ – усеченный коиндуцированный W-модуль, где $W = W(2 : \mathbf{m})$, то согласно ([8], теорема 3.1) $H^1(W, \Omega^2) = H^0(\Omega) \otimes H^1(W_{(0)}, \langle\omega\rangle) + H^1(\Omega) \otimes H^0(W_{(0)}, \langle\omega\rangle)$, где $W_{(0)}$ – стандартная максимальная подалгебра, $\omega = dx_1 \wedge dx_2$, $H^i(\Omega)$ – когомологии де Рама над $\mathcal{O}(2 : \mathbf{m})$.

Ясно, что $H^0(W_{(0)}, \langle\omega\rangle) = 0$. Покажем, что $H^1(W_{(0)}, \langle\omega\rangle) = 0$. Пусть $\psi \in Z^1(W_{(0)}, \langle\omega\rangle)$. Тогда $\psi([l_0, l_1]) = l_0 \circ \psi(l_1) - l_1 \circ \psi(l_0)$, где $l_0 \in W_{(0)}$, $l_1 \in W_{(1)}$. Так как мы рассматриваем $\langle\omega\rangle$ как фактор $\Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2$, то $l_1 \circ \psi(l_0) = 0$, следовательно, $\psi|_{W_{(1)}} \in \mathrm{Hom}_{W_{(0)}}(W_{(1)}, \langle\omega\rangle)$.

Рассмотрим $\psi|_{W_{(1)}}$. Так как $\psi([a, b]) = 0$ для $a, b \in W_{(1)}$, то ψ индуцирует морфизм $W_{(0)}$-модулей (обозначим его также через ψ)

$$\psi : W_{(1)}/[W_{(1)}, W_{(1)}] \to \langle\omega\rangle.$$

Согласно [9],

$$\begin{aligned} W_{(1)}/[W_{(1)}, W_{(1)}] \cong W_1 \\ + \langle x_i^{(p^{k_i})}, \quad 1 \le k_i < m_i, \quad i = 1, \ldots, n\rangle \otimes W_{-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим $mtp(V, U)$ кратность модуля V в U, то есть количество факторов в композиционном ряде модуля U, изоморфных V. Из (3) имеем $mtp(\langle\omega\rangle, W_{(1)}/[W_{(1)}, W_{(1)}]) = 0$. Следовательно, получаем $\mathrm{Hom}_{W_0}(W_{(1)}/[W_{(1)}, W_{(1)}], \langle\omega\rangle) = 0$.

Рассмотрим индуцированное отображение $\overline{\psi} : W_0 \to \langle\omega\rangle$, $\overline{\psi}(l) = \lambda_l \omega$, где $\lambda_l \in K$. Заметим, что $\psi([W_0, W_{(0)}]) = 0$. Пусть $z = x_1\partial_1 + x_2\partial_2$, тогда $[z, b] = 0$ для любого $b \in W_0$. Имеем $0 = \psi([z, b]) = z\lambda_b\omega - b\lambda_z\omega$. Напомним, что $D \circ \omega = (\mathrm{div}\, D)\omega = \mathrm{tr}\,(D)\omega$.

Значит, $z\circ\omega = 2\omega, 2\lambda_b\omega - \lambda_z\,\mathrm{tr}\,(b)\omega = 0$, то есть $2\lambda_b - \lambda_z\,\mathrm{tr}\,(b) = 0$. Следовательно, $\lambda_b = -\lambda_z\,\mathrm{tr}\,(b)$. Отсюда $\dim Z^1(W_{(0)}, \langle\omega\rangle) \leq 1$.

Напомним, что $B^1(W_{(0)}, \langle\omega\rangle) = \{\mathrm{ad}\, b, b \in \langle\omega\rangle\}$. Следовательно, $\dim B^1(W_{(0)}, \langle\omega\rangle) = 1$. Поэтому $B^1(W_{(0)}, \langle\omega\rangle) = Z^1(W_{(0)}, \langle\omega\rangle)$, то есть $H^1(W_{(0)}, \langle\omega\rangle) = 0$. Следовательно, $H^1(W(2:\mathbf{m}), \Omega^2) = 0$. $\square$

Из точной последовательности когомологий, соответствующей точной последовательности коэффициентов

$$0 \to B^2 \to \Omega^2 \to \Omega^2/B^2 \to 0,$$

где $B^2 = B^2(\Omega)$, получаем $H^1(W, B^2) \cong H^0(W, \Omega^2/B^2)$. Заметим, что $\dim H^1(W, B^2) = 1$, так как $\Omega^2/B^2 \cong \langle x_1^{(p^{m_1}-1)} x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega\rangle$.

Так как $B^1 = \{\mathrm{ad}\, b : W \to B^2, \mathrm{ad}\, b(l) = [b, l]\}$ и $x_1^{(p^{m_1}-1)} x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega \notin B^2$, то $\mathcal{D}_{\overline{1}} = \Omega^2$. Таким образом, доказана

Теорема 4. $\mathrm{Der}\, R \cong \overline{R_{\overline{0}}} + \Omega^2$, *где* $\overline{R_{\overline{0}}}$ – *p-замыкание* $R_{\overline{0}}$ *в* $\mathrm{Der}\, R$. $\square$

3. Автоморфизмы алгебры R

Теорема 5. $R_{(0)}$ – *единственная максимальная подалгебра коразмерности* 3.

Доказательство. Пусть M – максимальная подалгебра коразмерности 3, $M \neq R_{(0)}$. Рассмотрим индуцированную фильтрацию в $M : M = M_{(-1)} \supset M_{(0)} \supset M_{(1)} \ldots \supset M_{(i)} \supset \ldots$, где $M_{(i)} = M \cap R_{(i)}$. Ассоциированная градуированная алгебра $\mathrm{gr}\, M$ является однородной подалгеброй в R. Если $\mathrm{gr}\, M = R_{(0)}$, то $M = R_{(0)}$. Поэтому будем рассматривать $\mathrm{gr}\, M$ вместо M и, таким образом, считать, что M – однородная подалгебра.

Возможны три случая.

1. $M + R_{(0)} = R_{(0)} + \langle a\rangle$, $a = \alpha_1\partial_1 + \alpha_2\partial_2 + \beta\omega \in M$.

а) Пусть $\alpha_1 \neq 0$, тогда можно считать, что $a = \partial_1 + \alpha_2\partial_2 + \beta\omega$. Тогда ∂_2, $\omega \notin M$. Так как $[x_1\partial_2, a] = -\partial_2$, то $x_1\partial_2 \notin M$. Так как $[x_1\omega, a] = -\omega + \beta\partial_2$, то $x_1\omega \notin M$. Получаем, что $\mathrm{codim}\, M \geq 4$.

Аналогично рассматривается случай $\alpha_2 \neq 0$.

б) Пусть $\beta \neq 0$. Тогда $a = \alpha_1\partial_1 + \alpha_2\partial_2 + \omega$ $\partial_1, \partial_2 \notin M$. Если $\alpha_1 = 0$, то $[x_1\omega, a] = -\alpha_1\omega + \partial_2$, значит, $x_1\omega \notin M$. Так как $[x_1^{(2)}\partial_1, a] = x_1\omega$, то $x_1^{(2)}\partial_1 \notin M$. Получаем $\mathrm{codim}\, M \geq 4$. Если $\alpha_1 \neq 0$, то $[x_1\partial_2, a] = -\alpha_1\partial_2, [x_1^{(2)}\partial_2, a] = -\alpha_1 x_1\partial_2$, следовательно, $x_1^{(2)}\partial_2, x_1\partial_2 \notin M$. Отсюда $\mathrm{codim}\, M \geq 4$.

2. $M + R_{(0)} = R_{(0)} + \langle a, b\rangle$, $a = \alpha_{11}\partial_1 + \alpha_{12}\partial_2 + \beta_1\omega$, $b = \alpha_{21}\partial_1 + \alpha_{22}\partial_2 + \beta_2\omega$.

а) Пусть $\left|\begin{smallmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{smallmatrix}\right| \neq 0$. Тогда можно считать $a = \partial_1 + \beta_1\omega \in M$, $b = \partial_2 + \beta_2\omega \in M$. Следовательно, $\omega \notin M$.

Предположим, $\beta_1 = 0$, тогда $[x_1\omega, a] = -\omega$, значит, $x_1\omega \notin M$. $[x_1^{(2)}\omega, a] = -x_1\omega$, значит, $x_1^{(2)}\omega \notin M$. Если $\beta_2 = 0$, то $[x_2\omega, b] = -\omega$, следовательно, $x_2\omega \notin M$. Получаем $\operatorname{codim} M \geq 4$. Если $\beta_2 \neq 0$, то $[x_1\partial_1, b] = \beta_2\omega$. Отсюда $x_1\partial_1 \notin M$. Значит, $\operatorname{codim} M \geq 4$.

Предположим, $\beta_1 \neq 0$. Тогда $[x_2\partial_2, a] = \beta_1\omega$. Значит, $x_2\partial_2 \notin M$. Из того, что $[x_1x_2\partial_2, a] = x_2\partial_2 + \beta_1x_1\omega$, имеем: $x_1x_2\partial_2 \notin M$. Если $\beta_2 = 0$, то $x_2\omega \notin M$, так как $[x_2\omega, b] = -\omega$. Получаем $\operatorname{codim} M \geq 4$. Если $\beta_2 \neq 0$, то $[x_1\partial_1, b] = \beta_2\omega$. Отсюда $x_1\partial_1 \notin M$. Опять получаем $\operatorname{codim} M \geq 4$.

б) Пусть теперь $\left|\begin{smallmatrix}\alpha_{11} & \beta_1\\ \alpha_{21} & \beta_2\end{smallmatrix}\right| \neq 0$. Тогда можно считать $a = \partial_1 + \alpha_{12}\partial_2 \in M$, $b = \omega + \alpha_{22}\partial_2 \in M$. Следовательно, $\partial_2 \notin M$. Так как $[x_1\omega, b] = \partial_2$, то $x_1\omega \notin M$. Так как $[x_1^{(2)}\omega, a] = x_1\omega$, то $x_1^{(2)}\omega \notin M$. Так как $[x_1\partial_2, a] = -\partial_2$, то $x_1\partial_2 \notin M$. Следовательно, $\operatorname{codim} M \geq 4$.

Случай $\left|\begin{smallmatrix}\alpha_{12} & \beta_1\\ \alpha_{22} & \beta_2\end{smallmatrix}\right| \neq 0$ рассматривается аналогично.

3. $M + R_{(0)} = R$. Тогда $R_{-1} = M_{-1}$. Пусть R_s – последний член градуировки алгебры $R, s = p^{m_1} + p^{m_2} - 3$.

а) Если $R_s \subset M$, то $R_s = M_s$. Тогда для $m = \max(m_1, m_2)$

$$R = \sum_{t=0}^{p^m - 1} (\operatorname{ad} R_{-1})^t R_s \subset M,$$

то есть $M = R$, противоречие.

б) Если $R_s \not\subset M$, то, учитывая, что $\dim R_s = 2$, имеем: либо $\dim M_s = 1$, либо $M_s = 0$.

Пусть $\dim M_s = 1$. Тогда $M_0 \subset \mathrm{st}_{R_0} M_s$, где $\mathrm{st}_{R_0} M_s$ – стабилизатор M_s в R_0. Поэтому $M_0 \neq R_0$. Так как $\operatorname{codim} M = 3$, то опять получаем два случая: $\operatorname{codim} M_0 = 2$ и $\operatorname{codim} M_0 = 1$ в R_0. Если $\operatorname{codim} M_0 = 2$, то $R_1 = M_1$. Имеем: $M_0 = [M_{-1}, M_1] = [R_{-1}, R_1] = R_0$. Получаем противоречие. Если $\operatorname{codim} M_0 = 1$, то существует k, такое, что $R_k \neq M_k$, а $R_{k+1} = M_{k+1}$. Тогда $M_k = [M_{-1}, M_{k+1}] = [R_{-1}, R_{k+1}] = R_k$. Противоречие.

Пусть теперь $M_s = 0$. Рассмотрим такое k, что $R_k \neq M_k$. Если $0 \leq k \leq s - 2$, где $s = p^{m_1} + p^{m_2} - 3$, то $R_{k+1} = M_{k+1}$

и $M_k = [M_{-1}, M_{k+1}] = [R_{-1}, R_{k+1}] = R_k$. Получаем противоречие. Если $k = p^{m_1} + p^{m_2} - 4$, то $\operatorname{codim} M_{s-1} = 1$ в R_{s-1}. Так как $M_s = 0$, то $[M_1, M_{s-1}] = 0$. Так как $M_{s-1} \subset R_{s-1}$, а $M_1 = R_1$, то $M_{s-1} \subset \operatorname{Ann}_{R_{s-1}} R_1$. Учитывая, что $\operatorname{codim} M_{s-1} = 1$ в R_{s-1}, получаем: $\operatorname{codim} \operatorname{Ann}_{R_{s-1}} R_1 = 1$. Рассмотрим

$$R_{s-1} = \langle x_1^{(p^{m_1}-2)} x_2^{(p^{m_2}-1)} \partial_i, x_1^{(p^{m_1}-2)} x_2^{(p^{m_2}-1)} \omega,$$
$$x_1^{(p^{m_1}-1)} x_2^{(p^{m_2}-2)} \partial_i, x_1^{(p^{m_1}-1)} x_2^{(p^{m_2}-2)} \omega, i = 1, 2\rangle$$

и

$$R_1 = \langle x_1^{(2)} \partial_i, x_1^{(2)} \omega, x_2^{(2)} \partial_i, x_2^{(2)} \omega, x_1 x_2 \partial_i, x_1 x_2 \omega, i = 1, 2\rangle.$$

Так как

$$[x_1^{(p^{m_1}-2)} x_2^{(p^{m_1}-1)} \partial_2, x_1 x_2 \partial_2] =$$
$$=(p^{m_1} - 1)(1 - (p^{m_2} - 1)) x_1^{(p^{m_1}-1)} x_2^{(p^{m_2}-1)} \partial_2,$$
$$[x_1^{(p^{m_1}-1)} x_2^{(p^{m_2}-2)} \partial_1, x_1 x_2 \partial_1] =$$
$$=(p^{m_2} - 1)(1 - (p^{m_2} - 1)) x_1^{(p^{m_1}-1)} x_2^{(p^{m_2}-1)} \partial_1,$$

то $x_1^{(p^{m_1}-2)} x_2^{(p^{m_1}-1)} \partial_2$, $x_1^{(p^{m_1}-1)} x_2^{(p^{m_2}-2)} \partial_1 \notin \operatorname{Ann}_{R_{s-1}} R_1$. Отсюда следует, что $\operatorname{codim} \operatorname{Ann}_{R_{s-1}} R_1 \geq 2$. Противоречие.

Таким образом, единственной максимальной подалгеброй коразмерности 3 является $R_{(0)}$. □

Следствие 1. *Подалгебра $R_{(0)}$ инвариантна относительно автоморфизмов алгебры R.* □

Определим фильтрацию в $\operatorname{Aut} R : \operatorname{Aut} R = \operatorname{Aut}_{(0)} R \supset \operatorname{Aut}_{(1)} R \supset \ldots$, где $\operatorname{Aut}_{(i)} R = \{\varphi \in \operatorname{Aut} R | (\varphi - \mathrm{id}) : R_{(j)} \to R_{(i+j)}\}$.

Лемма 3. *Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut} R$, $U_1 = \langle \omega \rangle$, $U_2 = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle$, $V_1 = \langle x_1 \omega, x_2 \omega \rangle$, $V_2 = \langle x_i \partial_j, 1 \leq i, j \leq 2 \rangle$. Тогда:*

(1) $\varphi(V_1) \subset V_1 + R_{(1)}$;

(2) $\varphi(V_2) \subset V_2 + R_{(1)}$;

(3) $\varphi(U_2) \subset U_2 + R_{(0)}$;

(4) $\varphi(U_1) \subset U_1 + R_{(0)}$.

Доказательство. Так как фильтрация алгебры R однозначно восстанавливается по подалгебре $R_{(0)}$, то из инвариантности $R_{(0)}$

следует инвариантность фильтрации относительно автоморфизмов. Поэтому каждому $\varphi \in \operatorname{Aut} R$ соответствует автоморфизм $\overline{\varphi} \in \operatorname{Aut} R$, для которого $\overline{\varphi}(R_i) = R_i$ при всех i.

Подалгебра $R_0 = \langle x_i\partial_j, x_1\omega, x_2\omega, 1 \leq i,j \leq 2\rangle$ имеет радикал $\operatorname{Rad}(R_0) = \langle x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_1\omega, x_2\omega\rangle$. Так как $\overline{\varphi}$ – автоморфизм, то $\overline{\varphi}(\operatorname{Rad}(R_0)) = \operatorname{Rad}(R_0)$. Нетрудно видеть, что $V_1 = \{l \in \operatorname{Rad}(R_0) | l^p = 0\}$. Отсюда $\overline{\varphi}(V_1) = V_1$, то есть $\varphi(V_1) \subset V_1 + R_{(1)}$. Утверждение (1) доказано.

Так как $V_2 = N(V_1)$, где $N(V_1)$ – нормализатор V_1 в R_0, то (2) следует из (1).

Докажем (3). Заметим, что U_2 – единственный неприводимый V_2-подмодуль в R_{-1}. Так как $\overline{\varphi}(U_2)$ – двумерный неприводимый подмодуль относительно $\overline{\varphi}(V_2) = V_2$, то $\overline{\varphi}(U_2) = U_2$.

Утверждение (4) доказывается аналогично. □

Так как фильтрация в R инвариантна относительно автоморфизмов, то $\operatorname{Aut}_{(1)}R$ состоит из всех автоморфизмов, действующих тривиально на ассоциированной градуированной алгебре.

Пусть $\operatorname{Aut}_0 R$ – подгруппа однородных автоморфизмов. Покажем, что $\operatorname{Aut}_0 R \subset \operatorname{Aut}_{\overline{0}} R$. Пространства $R_{\overline{0},i} = R_{\overline{0}} \cap R_i$ можно определить индуктивно: в обозначениях леммы 3 $R_{\overline{0},-1} = U_2$, $R_{\overline{0},0} = V_2$,

$$R_{\overline{0},i} = \{l \in R_i | [U_2, l] \subset R_{\overline{0},i-1}\}, i \geq 0.$$

Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut}_0 R$. По лемме 3, $\varphi(U_2) \subset U_2$. Так как $\varphi(R_i) = R_i$, то $\varphi(R_{\overline{0},i}) = R_{\overline{0},i}$. Таким образом, $\varphi(R_{\overline{0}}) = R_{\overline{0}}$, то есть $\varphi \in \operatorname{Aut}_{\overline{0}} R$. Из точной последовательности

$$1 \longrightarrow \operatorname{Aut}_{(1)}R \longrightarrow \operatorname{Aut} R \xrightarrow{f} \operatorname{Aut}_0 R \longrightarrow 1,$$

где $\psi \overset{f}{\mapsto} \operatorname{gr}\psi$ для $\psi \in \operatorname{Aut} R$, получаем, что для описания $\operatorname{Aut} R$ остается рассмотреть автоморфизмы $\varphi \in \operatorname{Aut}_{(1)}R$. Такой автоморфизм можно записать в виде:

$$\varphi = 1 + D + \varphi_{k+1} + \cdots, D \in \mathcal{D}_k, \cdots, \varphi_{k+1} : R_j \to R_{j+k+h},$$

где $\mathcal{D} = \operatorname{Der} R$.

Предложение 2. $\operatorname{Aut} R \cong \operatorname{Aut} \widetilde{R}$.

Доказательство. Так как $[\widetilde{R}, \widetilde{R}] = R$, то автоморфизмы алгебры $\widetilde{R}$ индуцируют автоморфизмы алгебры R. Пусть g – гомоморфизм ограничения

$$g : \operatorname{Aut} \widetilde{R} \to \operatorname{Aut} R, g(\varphi) = \varphi|_R.$$

Покажем, что g сюръективно. Рассмотрим $\psi \in \operatorname{Aut} R$. Тогда $\subset \mathcal{D})$, то ψ продолжается до автоморфизма $\widetilde{\psi}$ алгебры $\mathcal{D}$. Заметим, что $\widetilde{R} = R + N_{\mathcal{D}}(R_{(0)})$, где $N_{\mathcal{D}}(R_{(0)})$ – нормализатор подалгебры $R_{(0)}$ в $\mathcal{D}$. Из следствия 1 получаем, что $\widetilde{\psi}(\widetilde{R}) = \widetilde{R}$.

Пусть теперь $\psi \in \operatorname{Aut} \widetilde{R}$, $\psi|_R = \mathrm{id}$. Покажем, что $\psi = \mathrm{id}$. Обозначим $x_1^{(p^{m_1}-1)} x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega$ через A, а $\psi(A)$ – через B. Так как $[\partial_i, A] \in R$, то $[\partial_i, B] = \psi([\partial_i, A]) = [\partial_i, A]$ и $[\partial_i, A - B] = 0$. Значит, $A - B \in R_{-1}$.

Пусть $l_0 \in R_0$. Так как $[\widetilde{R}, \widetilde{R}] = R$, то $[l_0, A] \in R$. Имеем $[l_0, B] = [\psi(l_0), \psi(A)] = \psi[l_0, A] = [l_0, A]$. Отсюда $[l_0, A - B] = 0$. Следовательно, $A = B$ и $\psi = \mathrm{id}$. $\square$

Пусть $G = \operatorname{Aut} R$, $\operatorname{Lie} G$ – алгебра Ли G, и пусть $\operatorname{Lie} G = L_{\overline{0}} \oplus L_{\overline{1}}$ – индуцированная $\mathbb{Z}_2$–градуировка.

Теорема 6. *$L_{\overline{0}} \cong \operatorname{Lie} \operatorname{Aut} W(2 : \mathbf{m})$, $L_{\overline{1}} \cong \mathfrak{m}^{(2)}\Omega^2_{-1/2}$, где $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал $\mathcal{O}(2 : \mathbf{m})$.*

Доказательство этой теоремы основывается на ряде лемм.

Лемма 4. *Пусть $\overline{R_k} = \sum_{i=1}^{k-1} [R_i, R_{k-i}]$, $k > 1$. Тогда*

1. *Если $k \neq p^t - 1$, то $\overline{R_k} = R_k$.*
2. *Если $k = p^t - 1$, то $R_k / \overline{R_k} \cong \langle x_j^{(p^t)} \partial_i, x_j^{(p^t)}\omega, 1 \le i, j \le 2\rangle$.*

Доказательство. Очевидно, $\langle x_j^{(p^t)} \partial_i, x_j^{(p^t)}\omega, 1 \le i, j \le 2\rangle \subseteq R_k / \overline{R_k}$. Докажем обратное включение.

Пусть $F = x_1^{(\alpha_1)} x_2^{(\alpha_2)}\omega \in R_k$, $\alpha_1 + \alpha_2 - 1 = k$. (Случай $D = x_1^{(\alpha_1)} x_2^{(\alpha_2)}\partial_i \in R_k$, $i = 1, 2$ рассмотрен в [9, глава III, §3, предложение 1].) Тогда $F = [x_2^{(\alpha_2)}\partial_1, x_1^{(\alpha_1+1)}\omega] \in \overline{R_k}$, кроме трех случаев: а) $\alpha_2 \le 1$, б) $\alpha_1 = p^{s+1} - 1$, в) $\alpha_1 = 0$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

а) Имеем $[x_1^{(\alpha)} x_2^{(\alpha_2)}\partial_1, x_1^{(k+2-\alpha_2-\alpha)}\omega] = \gamma_1\omega$, где $\gamma_1 = \binom{k+1-\alpha_2}{\alpha} + \binom{k+1-\alpha_2}{\alpha-1}$, $\alpha = 2 - \alpha_2, \dots, k - \alpha_2$. Коэффициент $\gamma_1 = 0$ для любого α лишь при $k + 1 - \alpha_2 = p^t$. Значения $\alpha_2 = 0$ и $k = p^t - 1$, соответствуют утверждению (2) леммы. Если $\alpha_2 = 1$, то $F \in \overline{R_k}$, поскольку $F = [x_1^{(k)}\partial_2, x_2^{(2)}\omega] \in \overline{R_k}$.

б) Если $\alpha_2 \not\equiv 2(\operatorname{mod} 3)$, то

$$[x_1 x_2^{(\alpha_2)}\partial_2, x_1^{(p^{s+1}-2)}x_2\omega] = \\ = \left(\binom{p^{s+1}-1}{1} + \binom{p^{s+1}-1}{1}\binom{\alpha_2}{1}\right) x_1^{(p^{s+1}-1)}x_2^{(\alpha_2)}\omega = \\ = (p^{s+1}-1)(\alpha_2+1)x_1^{(p^{s+1}-1)}x_2^{(\alpha_2)}\omega \neq 0.$$

Если $\alpha_2 \equiv 2(\operatorname{mod} 3)$, то

$$[x_1 x_2^{(\alpha_2-1)}\partial_2, x_1^{(p^{s+1}-2)}x_2^{(2)}\omega] = \\ = \left(\binom{p^{s+1}-1}{1}\binom{\alpha_2}{1} + \binom{p^{s+1}-1}{1}\binom{\alpha_2}{2}\right) x_1^{(p^{s+1}-1)}x_2^{(\alpha_2)}\omega = \\ = (p^{s+1}-1)(\alpha_2+\alpha_2(1-\alpha_2))x_1^{(p^{s+1}-1)}x_2^{(\alpha_2)}\omega \neq 0.$$

Таким образом, $F = x_1^{(p^{s+1}-1)}x_2^{(\alpha_2)}\omega \in \overline{R_k}$.

в) Так как

$$\binom{\alpha_2}{\alpha} F = [x_2^{(\alpha)}\partial_1, x_2^{(\alpha_2-\alpha)}x_1\omega] \in \overline{R_k}, \quad 2 \le \alpha \le k+1,$$

а коэффициент $\binom{\alpha_2}{\alpha} = 0$ для любого α лишь при $F = x_2^{(k+1)}\omega$, $k+1 = p^t$, то мы приходим к утверждению (2) леммы. □

Лемма 5. *Пусть* $(\operatorname{ad} l_s)^p|_{R_{-1}} = 0$, *где* $l_s \in R_s, s \ge 0$. *Тогда* $(\operatorname{ad} l_s)^p = 0$.

Доказательство. Предположим, $(\operatorname{ad} l_s)^p(R_i) = 0$. Докажем, что $(\operatorname{ad} l_s)^p(R_{i+1}) = 0$.

Заметим, что $R_i \subset \operatorname{Hom}(R_{-1}, R_{i-1})$. Если $l_i \in R_i$, то $l_i(l_{-1}) = [l_i, l_{-1}] \in R_{i-1}$. (Так как R транзитивна, то если $l_i(l_{-1}) = 0$ для любого $l_{-1} \in R_{-1}$, то $l_i = 0$.) Имеем:

$$(\operatorname{ad} l_s)^p(l_{i+1}) \in R_{i+1+ps},$$

$$[(\operatorname{ad} l_s)^p(l_{i+1}), l_{-1}] = (\operatorname{ad} l_s)^p([l_{i+1}, l_{-1}]) - [l_{i+1}, (\operatorname{ad} l_s)^p(l_{-1})].$$

Первое слагаемое равно нулю по предположению, а второе – по условию. Итак, $(\operatorname{ad} l_s)^p(R_{i+1}) = 0$, то есть $(\operatorname{ad} l_s)^p = 0$. □

Лемма 6. *$(x_i^{(\alpha)}\omega)^3 = 0$ для $\alpha \geq 1$, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $(\operatorname{ad} x_1^{(\alpha)}\omega)^3(R_{-1}) = 0$. Имеем

$$\operatorname{ad} x_1^{(\alpha)}\omega(\partial_1) = [x_1^{(\alpha)}\omega, \partial_1] = -x_1^{(\alpha-1)}\omega,$$

$$[x_1^{(\alpha)}\omega, [x_1^{(\alpha)}\omega, \partial_1]] = \left(-\binom{c2\alpha-2}{\alpha} + \binom{2\alpha-2}{\alpha-1}\right) x_1^{(2\alpha-2)}\partial_2,$$

$$(\operatorname{ad} x_1^{(\alpha)}\omega)^3(\partial_1) = [x_1^{(\alpha)}\omega, [x_1^{(\alpha)}\omega, [x_1^{(\alpha)}\omega, \partial_1]]] = 0.$$

Аналогично проверяется, что $(\operatorname{ad} x_1^{(\alpha)}\omega)^3(\partial_2)=0$ и $(\operatorname{ad} x_1^{(\alpha)}\omega)^3(\omega) = 0$. Итак, $(x_1^{(\alpha)}\omega)^p = 0$. Аналогично, $(x_2^{(\alpha)}\omega)^p = 0$. □

Лемма 7. *$x_i^{(2)}\omega \in \operatorname{Lie} G$ для $i = 1, 2$.*

Доказательство. По лемме 6, $(\operatorname{ad} x_1^{(2)}\omega)^3 = 0$. Пусть $\varphi_s = \exp(s \operatorname{ad}(x_1^{(2)}\omega))$, $s \in K$. Тогда $\varphi_s(\partial_1) = \partial_1 - sx_1\omega + s^2x_1^{(2)}\partial_2$, $\varphi_s(\partial_2) = \partial_2$.

Заметим, что $[\varphi_s(\partial_1), \varphi_s(\partial_2)] = 0$, $(\varphi_s(\partial_2))^{p^{m_2}} = (\partial_2)^{p^{m_2}} = 0$. Покажем, что $(\varphi_s(\partial_1))^{p^{m_1}} = 0$.

По лемме 6, $(x_1^{(p^t-1)}\omega)^3 = 0$. Нетрудно убедиться, что $(x_1^{(2)}\partial_2)^3 = 0$. Теперь, пользуясь формулой Джекобсона [11], получаем:

$$(\varphi_s(\partial_1))^3 = (\partial_1 - sx_1\omega + s^2x_1^{(2)}\partial_2)^3 =$$

$$= (\partial_1 + s^2x_1^{(2)}\partial_2)^3 + [[\partial_1 + s^2x_1^{(2)}\partial_2, sx_1\omega], sx_1\omega] +$$

$$+[[\partial_1 + s^2x_1^{(2)}\partial_2, sx_1\omega], \partial_1 + s^2x_1^{(2)}\partial_2] = \partial_1^3 + s^2\partial_2 - s^2\partial_2 = \partial_1^3.$$

Итак, $(\varphi_s(\partial_1))^p = \partial_1^p, (\varphi_s(\partial_1))^{p^2} = \partial_1^{p^2}, \ldots, (\varphi_s(\partial_1))^{p^{m_1}} = \partial_1^{p^{m_1}} = 0$. По теореме 3, существует автоморфизм $\Phi \in \operatorname{Aut}\widetilde{R}$, который совпадает с $\exp s \operatorname{ad}(x_1^{(2)}\omega)$ на подпространстве $\langle \partial_1, \partial_2 \rangle$. Отсюда следует, что $\Phi \in \operatorname{Aut}_{(1)}\widetilde{R}$ имеет вид $1 + s \operatorname{ad}(x_1^{(2)}\omega) + \ldots, s \in K$. Следовательно, $x_1^{(2)}\omega \in \operatorname{Lie} G$.

Аналогично, $x_2^{(2)}\omega \in \operatorname{Lie} G$. □

Лемма 8. *$x_i^{(p^t)}\omega \in \mathrm{Lie}\, G$ для $0 < t < m_i$, $i = 1, 2$.*

Доказательство. По лемме 6, $x_1^{(p^t)}\omega$ – нильпотент. Рассмотрим $\varphi = \exp(\mathrm{ad}\,(x_1^{(p^t)}\omega))$. Имеем

$$\varphi(\partial_2) = \partial_2, \quad \varphi(\partial_1) = \partial_1 - x_1^{(p^t-1)}\omega + [x_1^{(p^t)}\omega, x_1^{(p^t-1)}\omega];$$

$$[x_1^{(p^t)}\omega, x_1^{(p^t-1)}\omega] = \left(\binom{2p^t-2}{p^t-1} - \binom{2p^t-2}{p^t}\right) x_1^{(2p^t-2)}\partial_2.$$

Так как $p = 3$, то $2p^t - 2 = p^t + 2p^{t-1} + \cdots + 2p + 1$, $p^t - 1 = 2p^{t-1} + 2p^{t-2} + \cdots + 2p + 2$. Значит,

$$\binom{2p^t-2}{p^t-1} = \binom{1}{0}\binom{2}{2}\binom{2}{2}\cdots\binom{2}{2}\binom{1}{2} = 0.$$

Аналогично получаем, что $\binom{2p^t-2}{p^t} = 1$. Значит, $\varphi(\partial_1) = \partial_1 - x_1^{(p^t-1)}\omega - x_1^{(2p^t-2)}\partial_2$.

Заметим, что $[\varphi(\partial_1), \varphi(\partial_2)] = 0$, $(\varphi(\partial_2))^{p^{m_2}} = (\partial_2)^{p^{m_2}} = 0$. Покажем, что $(\varphi(\partial_1))^{p^{m_1}} = 0$. По лемме 6, $(x_1^{(p^t-1)}\omega)^3 = 0$. Нетрудно убедиться, что $(x_1^{(2p^t-2)}\partial_2)^3 = 0$. Теперь, снова применяя формулу Джекобсона, получаем:

$$\varphi(\partial_1)^p = (\partial_1 - x_1^{(2p^t-2)}\partial_2 - x_1^{(p^t-1)}\omega)^p =$$
$$= (\partial_1 - x_1^{(2p^t-2)}\partial_2)^p + [[\partial_1 - x_1^{(2p^t-2)}\partial_2, x_1^{(p^t-1)}\omega], x_1^{(p^t-1)}\omega] +$$
$$+ [[\partial_1 - x_1^{(2p^t-2)}, x_1^{(p^t-1)}\omega], \partial_1 - x_1^{(2p^t-2)}\partial_2] = \partial_1^p + x_1^{(2p^t-4)}\partial_2 -$$
$$- \left(\binom{2p^t-p-1}{p^t-2} - \binom{2p^t-p-1}{p^t-1}\right) x_1^{(2p^t-p-1)}\partial_2 - x_1^{(p^t-p)}\omega.$$

Используя p-адическое разложение, получаем:

$$\varphi(\partial_1)^p = \partial_1^p + x_1^{(2p^t-p-1)}\partial_2 - x_1^{(p^t-p)}\omega, \quad \text{если} \quad t \neq 1.$$

Если $t = 1$, то

$$\varphi(\partial_1)^p = \partial_1^p + x_1^{(2)}\partial_2 - x_1^{(2)}\partial_2 \binom{2}{1} - \binom{2}{2} - \omega = \partial_1^p - \omega.$$

Следовательно, $\varphi(\partial_1)^{p^2} = \partial_1^{p^2}$. Отсюда получаем, что при $t = 1$ $\varphi(\partial_1)^{p^{m_1}} = \partial_1^{p^{m_1}} = 0$.

Предположим теперь, что при $k > t$ выполняется $\varphi(\partial_1)^{p^k} = \partial_1^{p^k} + x_1^{(2p^t-p^k-1)}\partial_2 - x_1^{(p^t-p^k)}\omega$. Покажем, что $\varphi(\partial_1)^{p^{k+1}} = \partial_1^{p^{k+1}} + x_1^{(2p^t-p^{k+1}-1)}\partial_2 - x_1^{(p^t-p^{k+1})}\omega$ при $k+1 > t$ и $\varphi(\partial_1)^{p^{k+1}} = \partial_1^{p^{k+1}} - \omega$ при $k+1 = t$.

По лемме 6, $(x_1^{(p^t-p^k)}\omega)^3 = 0$. Легко показать, что

$$(x_1^{(2p^t-p^k-1)}\partial_2)^3 = 0.$$

Имеем

$$\varphi(\partial_1)^{p^{k+1}} = (\partial_1^{p^k} + x_1^{(2p^t-p^k-1)}\partial_2 - x_1^{(p^t-p^k)}\omega)^p =$$

$$= (\partial_1^{p^k} + x_1^{(2p^t-p^k-1)}\partial_2)^p + [[\partial_1^{p^k} + x_1^{(2p^t-p^k-1)}\partial_2, x_1^{(p^t-p^k)}\omega], x_1^{(p^t-p^k)}\omega] +$$

$$+[[\partial_1^{p^k} + x_1^{(2p^t-p^k-1)}\partial_2, x_1^{(p^t-p^k)}\omega], \partial_1^{p^k} + x_1^{(2p^t-p^k-1)}\partial_2] =$$

$$= \partial_1^{p^{k+1}} + x_1^{(2p^t-p^k-1-2p^k)}\partial_2 + \left(\binom{2p^t-p^{k+1}-1}{p^t-p^k} - \right.$$

$$\left. - \binom{2p^t-p^{k+1}-1}{p^t-p^k-1}\right) x_1^{(2p^t-p^{k+1}-1)}\partial_2 - x_1^{(p^t-p^{k+1})}\omega.$$

Используя p-адическое разложение, получаем:

$\varphi(\partial_1)^{p^{k+1}} = \partial_1^{p^{k+1}} + x_1^{(2p^t-p^{k+1}-1)}\partial_2 - x_1^{(p^t-p^k)}\omega$, если $k+1 \neq t$. Если $k+1 = t$, то $\varphi(\partial_1)^{p^t} = \partial_1^{p^t} - \omega$. Таким образом, возводя $\varphi(\partial_1)$ в p^t степень, получаем:

$(\varphi(\partial_1))^{p^t} = \partial_1^{p^t} - \omega, t \leq m_1 - 1$, $(\varphi(\partial_1))^{p^{t+1}} = \partial_1^{p^{t+1}}$. Значит, $(\varphi(\partial_1))^{p^{m_1}} = \partial_1^{p^{m_1}} = 0$.

Аналогично доказывается, что те же соотношения выполняются и для $\varphi_s = \exp(s \operatorname{ad}(x_1^{(p^t)}\omega))$, $s \in K$.

Условия теоремы 3 выполнены. Значит, существует автоморфизм $\Phi \in \operatorname{Aut}\widetilde{R}$, который совпадает с $\varphi_s = \exp(s \operatorname{ad}(x_1^{(p^t)}\omega))$ на подпространстве $\langle \partial_1, \partial_2 \rangle$. Значит, $\Phi \in \operatorname{Aut}_{(1)}\widetilde{R}$ имеет вид $1 + s\operatorname{ad}(x_1^{(p^t)}\omega) + \cdots$, $s \in K$. Следовательно, $x_1^{(p^t)}\omega \in \operatorname{Lie} G$.

Аналогично, $x_2^{(p^t)}\omega \in \operatorname{Lie} G$, $t > 0$. $\square$

Лемма 9. $x_1^{(p^{m_1}-1)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega \in \mathrm{Lie}\, G$.

Доказательство. Обозначим $x^{(\delta)} = x_1^{(p^{m_1}-1)}x_2^{(p^{m_2}-1)}$. Проверим, что $(x^{(\delta)}\omega)^p = 0$.

По лемме 5 достаточно показать, что $(x^{(\delta)}\omega)^p|_{R_{-1}} = 0$. Действительно, $[x^{(\delta)}\omega, \omega] = -x_1^{(p^{m_1}-1)}x_2^{(p^{m_2}-2)}\partial_1 + x_1^{(p^{m_1}-2)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\partial_2$, $[x^{(\delta)}\omega, [x^{(\delta)}\omega, \omega]] = 0$. Аналогично проверяется, что

$$(\mathrm{ad}\, x^{(\delta)}\omega)^p(\partial_1) = 0 \quad \text{и} \quad (\mathrm{ad}\, x^{(\delta)}\omega)^p(\partial_2) = 0.$$

Пусть $\varphi_s = \exp(s\, \mathrm{ad}\,(x^{(\delta)}\omega))$. Тогда $\varphi_s(\partial_1) = \partial_1 - sx_1^{(p^{m_1}-2)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega$, $\varphi_s(\partial_2) = \partial_2 - sx_1^{(p^{m_1}-1)}x_2^{(p^{m_2}-2)}\omega$. Отсюда следует, что

$$[\varphi_s(\partial_1), \varphi_s(\partial_2)] = -sx_1^{(p^{m_1}-2)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega + sx_1^{(p^{m_1}-2)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega = 0.$$

Покажем, что $\varphi_s(\partial_1)^{p^{m_1}} = 0$. Сначала проверим, что

$$(x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega)^p = 0, \quad 0 \le \alpha < p^{m_1}.$$

Для этого достаточно показать, что

$$(x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega)^p|_{R_{-1}} = 0.$$

В самом деле,

$$[x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega, \partial_1] = -x_1^{(\alpha-1)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega,$$

$$[x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega, [x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega, \partial_1]] = -(x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)} \cdot x_1^{(\alpha-1)}x_2^{(p^{m_2}-2)} -$$
$$- x_1^{(\alpha-1)}x_2^{(p^{m_2}-1)} \cdot x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-2)})\partial_1 + (x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)} \cdot x_1^{(\alpha-2)}x_2^{(p^{m_2}-1)} -$$
$$- x_1^{(\alpha-1)}x_2^{(p^{m_2}-1)} \cdot x_1^{(\alpha-1)}x_2^{(p^{m_2}-1)})\partial_2 = 0.$$

Теперь рассмотрим $(\mathrm{ad}\, x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega)^p(\partial_2)$. Имеем

$$[x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega, \partial_2] = -x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-2)}\omega,$$

$$[x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega, [x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega, \partial_2]] = -(x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)} \cdot x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-3)} -$$
$$- x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-2)} \cdot x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-2)})\partial_1 + (x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)} \cdot x_1^{(\alpha-1)}x_2^{(p^{m_2}-2)} -$$
$$- x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-2)} \cdot x_1^{(\alpha-1)}x_2^{(p^{m_2}-1)})\partial_2 = 0,$$

если $m_2 \neq 1$. Если $m_2 = 1$, то

$$[x_1^{(\alpha)}x_2^{(2)}\omega, [x_1^{(\alpha)}x_2^{(2)}\omega, [x_1^{(\alpha)}x_2^{(2)}\omega, \partial_2]]] =$$

$$= [x_1^{(\alpha)}x_2^{(2)}\omega, \left(\binom{2\alpha}{\alpha} 2x_1^{(2\alpha)}x_2^{(2)} - \binom{2\alpha}{\alpha} x_1^{(2\alpha)}x_2^{(2)}\right)\partial_1] =$$

$$= [x_1^{(\alpha)}x_2^{(2)}\omega, \binom{2\alpha}{\alpha} x_1^{(2\alpha)}x_2^{(2)}\partial_1] = 0.$$

Аналогично проверяем, что $(\operatorname{ad} x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega)^p(\omega) = 0$. Действительно,

$$[x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega, \omega] = -x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-2)}\partial_1 + x_1^{(\alpha-1)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\partial_2,$$

$$[x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega, [x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega, \omega]] = 0.$$

Таким образом, $(x_1^{(\alpha)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega)^p = 0, 0 \leq \alpha < p^{m_1}$. Отсюда получаем, что

$$\varphi_s(\partial_1)^p = \partial_1^p - sx_1^{p^{m_1}-4}x_2^{p^{m_2}-1}\omega,$$

$$\varphi_s(\partial_1)^{p^2} = (\partial_1^p - sx_1^{p^{m_1}-4}x_2^{p^{m_2}-1}\omega)^p = \partial_1^{p^2} - sx_1^{p^{m_1}-p^2-1}x_2^{p^{m_2}-1}\omega.$$

Предположим, что $\varphi_s(\partial_1)^{p^t} = \partial_1^{p^t} - sx_1^{p^{m_1}-p^t-1}x_2^{p^{m_2}-1}\omega$. Покажем, что $\varphi_s(\partial_1)^{p^{t+1}} = \partial_1^{p^{t+1}} - sx_1^{p^{m_1}-p^{t+1}-1}x_2^{p^{m_2}-1}\omega$.

Действительно,

$$\varphi_s(\partial_1)^{p^{t+1}} = (\partial_1^{p^t} - sx_1^{(p^{m_1}-p^t-1)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega)^p =$$

$$= \partial_1^{p^{t+1}} + s[x_1^{(p^{m_1}-p^t-1-p^t)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega, \partial_1^{p^t}] =$$

$$= \partial_1^{p^{t+1}} - sx_1^{(p^{m_1}-p^{t+1}-1)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega.$$

Следовательно, $\varphi_s(\partial_1)^{p^{m_1}} = \partial_1^{p^{m_1}} = 0$. Аналогично, $\varphi_s(\partial_2)^{p^{m_2}} = 0$. По теореме 3 существует автоморфизм $\Phi \in \operatorname{Aut} \widetilde{R}$, который на подпространстве $\langle \partial_1, \partial_2 \rangle$ совпадает с $\exp(s \operatorname{ad}(x_1^{(p^{m_1}-1)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega))$. Отсюда следует, что $\Phi \in \operatorname{Aut}_{(1)}\widetilde{R}$ имеет вид

$$1 + s \operatorname{ad}(x_1^{(p^{m_1}-1)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega) + \dots, \quad s \in K.$$

Значит, $x_1^{(p^{m_1}-1)}x_2^{(p^{m_2}-1)}\omega \in \operatorname{Lie} G$. $\square$

Доказательство теоремы 6. Покажем, что $(\mathrm{ad}\,\omega)^3 = 0$. Пусть $l = x_1^{(\alpha_1)}x_2^{(\alpha_2)}\omega$, $0 \le \alpha_1 < p^{m_1}$, $0 \le \alpha_2 < p^{m_2}$. Тогда $[\omega, l] = x_1^{(\alpha_1)}x_2^{(\alpha_2-1)}\partial_1 - x_1^{(\alpha_1-1)}x_2^{(\alpha_2)}\partial_2$, $[\omega,[\omega,l] = [\omega, x_1^{(\alpha_1)}x_2^{(\alpha_2-1)}\partial_1 - x_1^{(\alpha_1-1)}x_2^{(\alpha_2)}\partial_2] = -(x_1^{(\alpha_1-1)}x_2^{(\alpha_2-1)} - x_1^{(\alpha_1-1)}x_2^{(\alpha_2-1)})\omega = 0$. Пусть теперь $l = x_1^{(\alpha_1)}x_2^{(\alpha_2)}\partial_1, 0 \le \alpha_1 < p^{m_1}, 0 \le \alpha_2 < p^{m_2}$. Тогда $[\omega, l] = -x_1^{(\alpha_1-1)}x_2^{(\alpha_2)}\omega$, $[\omega,[\omega,l] = -x_1^{(\alpha_1-1)}x_2^{(\alpha_2-1)}\partial_1 + x_1^{(\alpha_1-2)}x_2^{(\alpha_2)}\partial_2$, $[\omega,[\omega,[\omega,l] = (x_1^{(\alpha_1-2)}x_2^{(\alpha_2-1)} - x_1^{(\alpha_1-2)}x_2^{(\alpha_2-1)})\omega = 0$. Аналогично, $[\omega,[\omega,[\omega, x_1^{(\alpha_1)}x_2^{(\alpha_2)}\partial_2]]] = 0$.

Рассмотрим минимальное вложение ([8]) $R \hookrightarrow W(3 : m_1, m_2, 1)$. Для $D \in R_{\overline{0}}$ при вложении $R_{\overline{0}}(= W(2 : \mathbf{m}))$ выполняется:

$$D \mapsto \widetilde{D} = f_1\partial_1 + f_2\partial_2 + f_3\partial_3,$$

$$f_1, f_2 \in \langle x_1^{(\alpha_1)}x_2^{(\alpha_2)}\rangle + \langle x_1^{(\alpha_1)}x_2^{(\alpha_2)}x_3^{(\alpha_3)}, \quad \text{где} \quad \alpha_3 \ne 0\rangle, \tag{4}$$

причем проекция на первое слагаемое ненулевая.

Так как подалгебра $R_{(0)}$ инвариантна относительно группы автоморфизмов, то любой автоморфизм алгебры R индуцируется автоморфизмом алгебры $W(3 : m_1, m_2, 1)$ (см. [8]). Автоморфизмы $W(3 : m_1, m_2, 1)$ известны (см. [7]):

Автоморфизм ψ алгебры $W(n : m_1, m_2, \ldots, m_n)$

$$\psi(D) = \varphi D \varphi^{-1},$$

где $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{O}(n : m_1, m_2, \ldots, m_n), \varphi = 1 + D + \ldots, D \in W_r$ существует тогда и только тогда, когда в разложении по базису $x^{(\alpha)}\partial_k$ D не содержит слагаемых вида

$$x_j^{p^s}\partial_i, s > m_j - m_i \tag{5}$$

Пусть $\psi \in \mathrm{Aut}\,W(3 : m_1, m_2, 1)$, $\psi = 1 + \mathrm{ad}\,D + \ldots$ и $\psi(R) = R$. Тогда из (4) получаем, что существует автоморфизм $\chi \in \mathrm{Aut}\,W(2 : \mathbf{m})$, такой, что $\chi = 1 + \mathrm{ad}\,D + \ldots$. Автоморфизм χ продолжается до геометрического автоморфизма алгебры R. Если D содержит слагаемые вида (5), то такого автоморфизма алгебры R нет, так как нет автоморфизма алгебры $W(3 : m_1, m_2, 1)$. Таким образом, для $D \in R_{\overline{0},(0)}$ выполняется:

$$D \in \mathrm{Lie}\,G \Longleftrightarrow D \in \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}\,W(2 : \mathbf{m}).$$

Рассмотрим теперь $a = x_1\omega \in R_{\overline{1},0}$. Предположим, что $a \in \operatorname{Lie} G$. Так как по лемме 3 подпространство $\langle\partial_1, \partial_2\rangle + \widetilde{R}_{(0)}$ инвариантно относительно G, то оно должно быть инвариантно относительно $\operatorname{Lie} G$. Однако, $[\partial_1, x_1\omega] = \omega \notin \langle\partial_1, \partial_2\rangle + \widetilde{R}_{(0)}$. Полученное противоречие показывает, что $x_1\omega \notin \operatorname{Lie} G$. Аналогично, $x_2\omega \notin \operatorname{Lie} G$.

По лемме 7, $x_1^{(2)}\omega, x_2^{(2)}\omega \in \operatorname{Lie} G$. Из умножения в R получаем, что $\overline{R_k} \subset \operatorname{Lie} G, k > 1$, где $\overline{R_k} = \sum_{i=1}^{k-1}[R_i, R_{k-i}]$. Из леммы 8 следует, что $\mathfrak{m}^{(2)}B^2_{-1/2} \subset \operatorname{Lie} G$. Из леммы 9 получаем, что $\mathfrak{m}^{(2)}\Omega^2_{-1/2} \subset \operatorname{Lie} G$. Таким образом, $L_{\overline{1}} \cong \mathfrak{m}^{(2)}\Omega^2_{-1/2}$. □

Литература

1. M. I. Kuznetsov, *Melikyan Algebras as Lie Algebras of Type G_2*. — Communications in Algebra **19(4)** (1991), 1281–1312.
2. А. И. Кострикин, *Параметрическое семейство простых алгебр Ли*. — Изв. АН СССР. Сер. матем. **34** (1970), 744–756.
3. G. Brown, *On the structure of some Lie algebras of Kuznetsov*. — Michigan Math. J. **39(7)** (1992), 85–90.
4. Ю. Б. Ермолаев, *Семейство простых алгебр Ли над полем характеристики 3*. В кн.: 5 Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы (1982), 52–53.
5. М. И. Кузнецов, *Классификация простых градуированных алгебр Ли с неполупростой компонентой L_0*. — Матем. сб., **180(2)** (1989), 147–158.
6. С. М. Скрябин, *Новые серии простых алгебр Ли*. — Матем. сб. **183(8)** (1992), 3–22.
7. R. L. Wilson, *Classification of generalized Witt algebras over algebraically closed fields*. — Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971), 191–210.
8. М. И. Кузнецов, *Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p*. — Изв. АН СССР. Сер. матем. **53** (1989), 557–589.
9. А. И. Кострикин, И. Р. Шафаревич, *Градуированные алгебры Ли конечной характеристики*. — Изв. АН СССР. Сер. матем. **33** (1969), 251–322.
10. А. С. Джумадильдаев, *Деформации алгебр Ли $W_n(\mathbf{m})$*. — Матем. сб. **180(2)** (1989), 168–185.
11. Н. Джекобсон, *Алгебры Ли*. Мир, М. (1964).

Muliar O. A. Automorphisms and derivations of exceptional simple Lie algebras of family R.

The automorphisms and derivations of simple Lie algebras of family R is described. The Lie algebra of the automorphism group is found.

ННГУ им. Н. И. Лобачевского

Поступило 24 ноября 2003 г.