Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 305, 2003 г.

В. В. Нестеров

О НЕПРИВОДИМЫХ ПОДГРУППАХ В ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЕ

Одной из ключевых задач в изучении порождений в группах Шевалле явилась задача описания подгрупп, порожденных парой длинных корневых унипотентных подгрупп. Подобную роль должно сыграть описание подгрупп, порожденных парой коротких корневых унипотентных подгрупп, полученное в работе [2].

Цель данной статьи – продемонстрировать один из результатов, следующих из последнего описания. А именно, мы приведем новое доказательство теоремы Ли Шанжи (см. [5]) о неприводимых подгруппах ортогональной группы, порожденных короткими корневыми подгруппами. Попутно с этой целью также описываются подгруппы, порожденные некоторыми классами троек коротких корневых подгрупп (см. [1, 4]).

Метод и техника доказательства совершенно не зависят от геометрии данной группы и могут быть использованы при описании неприводимых подгрупп, порожденных короткими корневыми подгруппами, общим методом как для классических групп (уже известное, см. [6]), так и для исключительных (до сих пор неизвестное). Рассуждения для других групп отличаются только большим количеством возможных расположений пар коротких корневых подгрупп и, следовательно, более длинными и иногда несколько более сложными вычислениями.

В данной работе мы ограничимся случаем алгебраически замкнутого поля.

Теорема. *В произвольной группе Шевалле G типа B_l над алгебраически замкнутым полем K, $\operatorname{char} K \neq 2$, не существует неприводимых подгрупп, порожденных короткими корневыми подгруппами и не содержащих длинных корневых подгрупп.*

Перед доказательством теоремы введём обозначения и напо-

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования России, гранты ПД02-1.1-168 и Е02-1.0-61.

мним некоторые необходимые нам понятия. Пусть Φ – приведенная неприводимая система корней. Зафиксируем порядок на Φ. Тогда через δ мы будем обозначать максимальный корень (он всегда длинный), через ρ – максимальный короткий корень. Далее, для каждого корня $\alpha \in \Phi$ и каждого элемента t из поля K обозначим через $x_\alpha(t)$ соответствующий элементарный корневой унипотент. Тогда $X_\alpha = \{x_\alpha(t) \mid x \in K\}$ – элементарная корневая унипотентная подгруппа, соответствующая α, и H_α — элементарная полупростая корневая подгруппа, порождённая полупростыми корневыми элементами $h_\alpha(t)$, $t \in K^*$. Через $W = W(\Phi)$ обозначим соответствующую группу Вейля. Наконец, $G = G(\Phi, K)$ – группа Шевалле типа Φ над полем K.

Системы корней типа B_ℓ и C_ℓ могут быть реализованы как множество векторов в векторном пространстве V размерности ℓ:

$$\mathrm{B}_\ell = \{\pm e_i,\ 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ \pm e_i \pm e_j,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant \ell\},$$
$$\mathrm{C}_\ell = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant \ell,\ \pm 2e_i,\ 1 \leqslant i \leqslant \ell\},$$

где e_i — базисные векторы.

Тогда $\rho = e_1$, $\delta = e_1 + e_2$ для $\Phi = \mathrm{B}_\ell$, $\rho = e_1 + e_2$, $\delta = 2e_1$ для $\Phi = \mathrm{C}_\ell$.

Во избежание громоздких обозначений иногда корни мы будем записывать, используя только индексы: $\pm i, \pm i \pm j$.

В проводимых в дальнейшем вычислениях мы используем то, что системы корней типа B_2 и C_2 дуальны и соответствующие группы Шевалле изоморфны. Это позволяет вести вычисления в симплектической группе $\mathrm{Sp}_4(K)$, что значительно проще.

Для данных вычислений мы воспользуемся матричным представлением элементов из $G(\mathrm{C}_2, K)$.

$$x_\delta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x_\rho(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{2\rho-\delta}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x_{\delta-\rho}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Также нам потребуется общий вид длинной корневой подгруппы в $\mathrm{Sp}_4(K)$. Для этого рассмотрим симплектическую группу

$\mathrm{Sp}_{2l}(K)$ как группу матриц A, удовлетворяющих соотношению

$$A^T J A = J, \quad \text{где} \quad J = \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \\ -1 & & & & & \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу $A \in \mathrm{Sp}_{2l}(K)$ в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll} & b_{l1} & \dots & b_{ll} \\ c_{11} & \dots & c_{1l} & d_{11} & \dots & d_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{l1} & \dots & c_{ll} & d_{l1} & \dots & d_{ll} \end{pmatrix}$$

Введем $2l$-мерные векторы u_i, v_i, x_j, y_j $(i, j = 1, \dots, l)$ над K, положив

$$\begin{aligned} u_i &= (a_{1i}, \dots, a_{li}, c_{1i}, \dots, c_{li}), \\ v_i &= (b_{1i}, \dots, b_{li}, d_{1i}, \dots, d_{li}), \\ x_j &= (c_{lj}, \dots, c_{1j}, -a_{lj}, \dots, -a_{1j}), \\ y_j &= (d_{lj}, \dots, d_{1j}, -b_{lj}, \dots, -b_{1j}). \end{aligned}$$

Тогда $A \in \mathrm{Sp}_{2l}(K)$ в том и только в том случае, когда скалярные произведения векторов u_i, v_i, x_j, y_j подчинены следующим условиям (ср. [3]):

$$\begin{array}{llll} 1) & u_i x_j = 0, & 2) & u_i y_j = 0, \quad i + j \neq l + 1, \\ 3) & v_i y_j = 0, & 4) & u_i y_j = 1, \quad i + j = l + 1. \end{array}$$

Поскольку все длинные корневые подгруппы (также как и короткие) между собой сопряжены, то, сопрягая длинную корневую подгруппу X_δ произвольной матрицей из $\mathrm{Sp}_{2l}(K)$, получаем вид произвольной длинной корневой подгруппы.

Лемма 1. *Длинная корневая унипотентная подгруппа* X *в* $\mathrm{Sp}_{2l}(K)$

состоит из элементов $x(t)$ следующего вида

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1-ta_{11}c_{l1} & -ta_{11}c_{l-1\,1} & \dots & -ta_{11}c_{11} & ta_{11}a_{l1} & \dots & ta_{11}^2 \\ -ta_{21}c_{l1} & 1-ta_{21}c_{l-1\,1} & \dots & -ta_{21}c_{11} & ta_{21}a_{l1} & \dots & ta_{21}a_{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -ta_{l1}c_{l1} & -ta_{l1}c_{l-1\,1} & \dots & 1-ta_{l1}c_{11} & ta_{l1}^2 & \dots & ta_{l1}a_{11} \\ -tc_{11}c_{l1} & -tc_{11}c_{l-1\,1} & \dots & -tc_{11}^2 & 1+tc_{11}a_{l1} & \dots & tc_{11}a_{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -tc_{l1}^2 & -tc_{l1}c_{l-1\,1} & \dots & -tc_{l1}c_{11} & tc_{l1}a_{l1} & \dots & 1+tc_{l1}a_{11} \end{pmatrix},$$

где t пробегает K.

В случае алгебраически замкнутого поля существенно укорачивает рассуждения в доказательстве теоремы следующее наблюдение.

Лемма 2. *Пусть $G = G(\Phi, K)$ – группа Шевалле типа B_l, C_l или F_4, K — поле характеристики, отличной от 2. Тогда подгруппа*

$$X_c = \langle x_\rho(t)x_\delta(ct), x_{\delta-2\rho}(s)x_{-\delta}(s)\rangle,$$

где t, $s \in K$, содержит длинные корневые подгруппы всякий раз, когда $c^2 - 4 \in K^{*2}$.

Доказательство. Можно считать, что $G = \mathrm{Sp}_4(K)$. По теореме 1 [7], случай (C20), существует изоморфизм $\phi_c : X_c \to \mathrm{SL}_2(K) \times \mathrm{SL}_2(K)$, который задается сопряжением $g \in X_c \mapsto z^{-1}gz$, где

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ t_1 & 0 & t_2 & 0 \\ 0 & -t_1 & 0 & -t_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $t_{1,2}$ – корни уравнения $t^2 - ct + 1 = 0$.

Выберем подгруппу D_c в $\mathrm{SL}_2(K) \times \mathrm{SL}_2(K)$, порожденную матрицами

$$d(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t_1t & 0 & 0 \\ -t_2t & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

когда $t \in K$.

Тогда, используя лемму 1, легко видеть, что $\phi_c^{-1}(D_c)$ – длинная корневая подгруппа в $\mathrm{Sp}_{2l}(K)$. Лемма доказана.

Для элемента $u \in U$, $u = \prod x_\tau(a_\tau)$, $\tau \in \Phi^+$, через $\Gamma(u)$ обозначим замыкание множества $\Gamma_0(u)$, где

$$\Gamma_0(u) = \{\, \tau \in \Phi^+ \mid a_\tau \neq 0 \}.$$

В этих терминах опишем нормализатор $N_G(X_\rho)$ в группе $G = G(\mathrm{B}_l, K)$. Пусть $z = uhwv$ – разложение Брюа элемента $z \in G$, где $u \in U$, $h \in H$, $w \in W$, $v \in U_w^-$. При решении вопроса о сопряженности в работе [7], был фактически получен следующий результат.

Лемма 3. *Если* $z \in N_G(X_\rho)$, *то*

$$\begin{aligned}
\Gamma(v) &= \{\, e_1 \pm e_r,\ 1 < k < r \},\\
\Gamma(u) &= \{\, e_1 \pm e_s,\ 1 < s,\ e_k \pm e_r,\ 1 < k < r \},\\
w &\in \langle w_k,\ 1 < k,\ w_{i \pm j},\ 1 < i < j \rangle.
\end{aligned}$$

Теперь можно приступить к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы. Пусть L — неприводимая подгруппа G, порожденная короткими корневыми подгруппами и не содержащая длинных. Из теоремы 1 [2] и леммы 2 следует, что могут представиться только две возможности для пары коротких корневых подгрупп X_1, X_2, содержащихся в L. Это – случаи (С6) и (С15) теоремы 1 [2]:

$$\langle X_1, X_2 \rangle = X_1 \times X_2, \quad (X_1, X_2) \sim (X_\rho, X_{2+3,2-3}), \tag{1}$$

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \mathrm{SL}_2(K), \quad (X_1, X_2) \sim (X_\rho, X_{-\rho}), \tag{2}$$

Ясно, что все пары коротких корневых подгрупп из множества $\Lambda(L)$ (множество всех коротких корневых подгрупп в L) не могут коммутировать друг с другом. Действительно, иначе, L будет подгруппой унипотентной группы U и не будет неприводимой. Следовательно, переходя, если надо, к сопряженной подгруппе, можно считать, что $\langle X_\rho, X_{-\rho} \rangle$ содержится в L.

Рассмотрим теперь тройки $(X_\rho, X_{-\rho}, Y)$, где Y пробегает $\Lambda(L)$. Положим $D = \langle X_\rho, X_{-\rho}, Y \rangle$. Разобъем изучение таких троек на два случая.

1°. Предположим, что (X_ρ, Y) и $(X_{-\rho}, Y)$ образуют пары типа (1). Тогда $D = \mathrm{SL}_2(K) \times Y$. Если любая $Y \in \Lambda(L) \setminus \{X_\rho, X_{-\rho}\}$ удовлетворяет этому предположению, то $L = \mathrm{SL}_2(K) \times L_1$ и не является неприводимой.

2°. В этот раз предположим, что одна из пар, скажем (X_ρ, Y), типа (2). Обозначая $X^z = z^{-1}Xz$, в этом случае имеем

$$(X_\rho, X_{-\rho}, Y) \sim (X_\rho, X_{-\rho}, X^z_{-\rho}), \qquad z \in N_G(X_\rho).$$

Более того, используя лемму 3, получаем, что $X^z = X^u$, где $z = uhwv$ – разложение Брюа элемента z.

Представим u в виде $u = \prod x_\tau(a_\tau)$, причем корни τ лежат в множестве $S = \{\, e_2,\ e_1 - e_s,\ e_1 + e_k,\ s, k > 1\,\}$. Выберем наименьший корень $\tau \in S$ такой, что $a_\tau \neq 0$. Пусть, например, $\tau = e_1 \pm e_i$. Тогда сопряжениями элементами вида $x_{i-j}(*)$ или $x_{-i+j}(*)$ и элементами группы Вейля можно добиться, что

$$\begin{aligned}(X_\rho, X_{-\rho}, Y) \sim (X_\rho,\, &x_{1-2}(a)X_{-\rho}x_{1-2}(-a),\\ &x_1(c)x_{1-2}(b)X_{-\rho}x_{1-2}(-b)x_1(-c)).\end{aligned}$$

В случае, если один из элементов a или b равен нулю, несложно убедиться, что $D = \mathrm{SL}_2(K)E(e_2, e_1{+}e_2)$, полупрямое произведение соответствующих групп. Таким образом, D содержит длинные корневые подгруппы.

Предположим, что a и b отличны от нуля. Для выяснения структуры подгруппы D в этом случае рассмотрим изоморфную ей подгруппу $\overline{D}$ в $\mathrm{Sp}_4(K)$. Действие элементами группы Вейля позволяет считать, что $\overline{D}$ порождается следующими матрицами.

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ Y(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 \\ as & 0 & 1 & 0 \\ 0 & as & -s & 1 \end{pmatrix},$$

$$Z(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & rb & 0 \\ r & 1 & 0 & br \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 1 \end{pmatrix}$$

где $t,\ s,\ r \in K$.

Так как $\langle X(t), Y(s)\rangle$, $\langle X(t), Z(r)\rangle$ и $\langle Y(s), Z(r)\rangle$ порождают

$\mathrm{SL}(2, K)$, то $\overline{D}$ содержит подгруппы вида

$$A(a_1, b_1, c_1, d_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ ac_1 & a(d_1 - a_1) & a_1 & -b_1 \\ 0 & ac_1 & -c_1 & d_1 \end{pmatrix},$$

$$B(a_2, b_2, c_2, d_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & bc_2 & b(d_2 - a_2) \\ c_2 & d_2 & 0 & -bc_2 \\ 0 & 0 & a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & -c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

$$C(a_3, b_3, c_3, d_3) = \begin{pmatrix} a_3 & 0 & b_3 & 0 \\ a^{-1}c_3 + b^{-1}b_3 & a_3 & a^{-1}(d_3 - a_3) & b_3 \\ c_3 & 0 & d_3 & 0 \\ b^{-1}(d_3 - a_3) & c_3 & -a^{-1}c_3 - b^{-1}b_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

где $a_i d_i - b_i c_i = 1$, $i = 1, 2$. Теперь для завершения доказательства остается показать, что $\overline{D} = \mathrm{Sp}_4(K)$ и, следовательно, $D = \mathrm{Spin}_5(K)$ (или, $\overline{D} = \mathrm{PSp}_4(K)$ и $D = \Omega_5(K)$).

Посчитаем произведения

$$u(t) = A(1, -1, 0, 1) \cdot B(t, t^{-1}, 0, t^{-1}) = h_{1-2}(t) x_1(b(1 - t^{-2}))$$

и

$$\begin{aligned} v(t) &= A(1, 0, -1, 1) \cdot S(t, 0, at, t^{-1}) \\ &= h_{1+2}(t) x_2(a^{-1}(t^{-1} - t)) x_{-1}(b^{-1}(t^{-1} - t)). \end{aligned}$$

Видно, что подгруппа, порожденная коммутаторами $[u(t), v(s)]$, t, $s \in K$, совпадает с $\langle X_\rho, X_{-\rho} \rangle$. Следовательно, $X_{-\rho}$ содержится в $\overline{D}$. Перемножая элементы $X_{-\rho}$ и элементы $u(t)$, $v(s)$, получим, что $X_{\rho-\delta}$ также содержится в $\overline{D}$. Таким образом, $\overline{D} = \mathrm{Sp}_4(K)$. Доказательство теоремы завершено.

Литература

1. Н. А. Вавилов, *Полупростые корневые элементы и тройки корневых унипотентных подгрупп в группах Шевалле.* — Вопросы Алгебры, Минск, **4** (1989), 162–173.
2. В. В. Нестеров, *Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле.* — Докл. РАН, **357** (1997), 302–305.
3. Д. А. Супруненко, *Группы матриц.* М., Наука, 1972.
4. L. Di Martino, N. A. Vavilov, *(2,3)-generation of* $\mathrm{SL}(n, q)$, II. — Comm. Algebra **24** (1996), 485–515.

5. Li Shang Zhi, *Maximal subgroups in* $P\Omega(n, F, Q)$ *with root subgroups.* — Sci. Sinica Ser. A, **28**, No. 8 (1985), 826–838.
6. Li Shang Zhi, *Maximal subgroups containing short root subgroups in* $\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{F})$. — Acta Math. Sinica, New ser., **3**, No. 1 (1987), 82–91.
7. V. V. Nesterov, *Pairs of short root subgroups in a Chevalley group.* — Preprint Univ. Bielefeld, No. 50 (1995).

Nesterov V. V. On the irreducible subgroups in an orthogonal group.

Based on the author's results the irreducible subgroups of an orthogonal group over an algebraically closed field that are generated by short root unipotent subgroups are described.

Балтийский государственный
технический университет
E-mail: vnester@mail.webplus.net

Поступило 20 ноября 2003 г.