Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 305, 2003 г.

В. А. Петров

КОМБИНАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ СТАРШЕЙ ОРБИТЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ

Мы будем свободно пользоваться терминами и обозначениями, введенными в статье [1]. Пусть $(R, \mathfrak{L})$ – нечетное форменное кольцо, (V, q) – нечетное $\mathfrak{L}$-квадратичное пространство, (e_1, e_{-1}) – гиперболическая пара. В настоящей работе дано комбинаторное описание орбиты вектора e_1 под действием элементарной унитарной группы $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$ (по аналогии с теорией групп Шевалле, эту орбиту можно назвать *орбитой вектора старшего веса* или просто *старшей орбитой*). В случае полной линейной группы такое описание было получено в [2]. Там же отмечается, что оно может быть полезно, например, при оценке длины разложения матрицы в произведение элементарных образующих (см. также [3]).

Обозначим через X множество всех *изотропных* векторов, то есть векторов v таких, что $|v|_q = 0$. Рассмотрим двудольный граф Γ с множеством вершин $X \times \{1, -1\}$, разделенным на доли $X \times \{1\}$ и $X \times \{-1\}$. Вершины $(v, 1)$ и $(u, -1)$ соединены в Γ ребром в том и только том случае, когда $(v, u)_q = 1$.

Теорема. *Для того, чтобы вектор v лежал в орбите вектора e_1 (соответственно, e_{-1}) под действием $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$, небходимо и достаточно, чтобы вершина $(v, 1)$ (соответственно, $(v, -1)$) лежала в компоненте связности вершины $(e_1, 1)$ графа Γ.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть g – элемент $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$; мы должны показать, что $(ge_1, 1)$ и $(ge_{-1}, -1)$ лежат в компоненте связности $(e_1, 1)$. Будем доказывать это индукцией по длине разложения g в произведение образующих вида $T_{e_{\pm 1}v}(a)$. Если длина равна 0, то g – тождественное отображение, и утверждение очевидно. Пусть

Работа выполнена при поддержке INTAS 00-566 и проекта Минвуза Е02-0.1-61.

теперь $g = hT_{e_1 v}(a)$, длина h меньше длины g. Тогда $ge_1 = he_1$, а по индукционному предположению $(he_1, 1)$ лежит в компоненте связности $(e_1, 1)$. Далее, $1 = (ge_1, ge_{-1})_q = (he_1, ge_{-1})_q$, так что вершина $(ge_{-1}, -1)$ соединена в Γ с $(he_1, 1)$, а значит, тоже лежит в компоненте связности $(e_1, 1)$. Случай, когда $g = hT_{e_{-1}v}(a)$, разбирается аналогично.

Замечание. На самом деле это рассуждение показывает, что длина разложения g в произведение образующих оценивается снизу расстоянием от $(ge_1, 1)$ до $(e_1, 1)$ в Γ.

Достаточность. Пусть (v, i) – вершина Γ $(i = \pm 1)$, соединенная с $(e_1, 1)$; мы должны показать, что v лежит в орбите e_i. Будем доказывать это индукцией по расстоянию от $(e_1, 1)$ до (v, i) в Γ. Если оно равно 0, утверждение очевидно. Пусть, скажем, $i = 1$, и $(v, 1)$ соединена с $(u, -1)$, причем расстояние от $(u, -1)$ до $(e_1, 1)$ меньше расстояния от $(v, 1)$. По индукционному предположению, $u = ge_{-1}$ для некоторого $a \in \mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$. Тогда $1 = (v, u)_q = (v, ge_{-1})_q = (g^{-1}v, e_{-1})_q$. Отсюда следует, что $g^{-1}v$ представляется в виде $e_1 + e_{-1}a + w$, где w ортогонален e_1 и e_{-1}, причем из изотропности v следует, что $|w|_q = (0, \bar{a}) \dot{+} \mathfrak{L}$. Но тогда $hg^{-1}v = e_1$, где $h = T_{e_{-1}, w\bar{1}^{-1}}(\bar{1}\bar{a}\bar{1}^{-1})$ лежит в $\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$; следовательно, v лежит в орбите e_1. Случай $i = -1$ разбирается аналогично (нужно воспользоваться трансвекцией вида $T_{e_1 w}(a)$ для некоторых w и a).

Замечание. Это рассуждение показывает, что если расстояние от вершины $(v, 1)$ до $(e_1, 1)$ равно n, то $v = ae_1$ для некоторого элемента $a \in \mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$ длины (в образующих $T_{e_{\pm 1} w}(a)$) не больше n.

Литература

1. В. А. Петров, *Нечетные унитарные группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003).
2. E. K. Hinson, *Paths of unimodular vectors.* — J. Algebra **142** (1991), 58–75.
3. E. K. Hinson, *Word length in elementary matrices.* — J. Algebra **142** (1991), 76–80.

Petrov V. A. A combinatorial description of the highest orbit of elementary unitary groups.

The paper gives a purely combinatorial description of the orbit of e_1 under the action of the elementary unitary group.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 9 декабря 2003 г.