Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 306, 2003 г.

О. А. Ладыженская

О ПОСТРОЕНИИ БАЗИСОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

§1. Предварительные результаты

В середине 50-х годов мною были предложены новые способы доказательства глобальной разрешимости краевых (стационарных и нестационарных) задач для уравнений Навье–Стокса и их линеаризаций. Наиболее просто это делается в рамках введенных мною функциональных пространств соленоидальных полей $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ и $H(\Omega)$. Первое из них является замыканием в норме $L_2(\Omega; R^n) \equiv L_2(\Omega)$ множества

$$\dot{J}^{\infty}(\Omega) = \{u \| u \in \dot{C}^{\infty}(\Omega), \operatorname{div}\, u = 0\}$$

где $\dot{C}^{\infty}(\Omega)$ есть совокупность всех бесконечно-дифференцируемых векторных полей $u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$, имеющих компактные носители, лежащие в Ω. Итак, пространство

$$\overset{\circ}{J}(\Omega) \equiv \{\dot{J}^{\infty}(\Omega)\}_{ClL_2(\Omega)}$$

Относительно него я доказала теорему (Теорема 1, гл. 1 [1]), лежащую в основе методов исследования задач гидродинамики, начавшихся с середины 50-х годов. А именно:

Теорема 1. *Ортогональное к $\dot{J}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ подпространство $G(\Omega)$ состоит из градиентов однозначных функций, точнее*

$$G(\Omega) = \{u \| u = \nabla p, \quad p \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \nabla p \in L_2(\Omega)\}.$$

Для ограниченных областей Ω: $G(\Omega) = \{u \| u = \nabla p,\ p \in W_2^1(\Omega)\}$.
Итак:

$$L_2(\Omega) = \overset{\circ}{J}(\Omega) \oplus G(\Omega). \tag{1}$$

Автор благодарит Фонды РФФИ (грант 01-03-00638) и “Ведущие научные школы” (грант 2261-2003-1).

Для $\Omega = R^n$ и для Ω с гладкими компактными границами $\partial\Omega$ разложение (1) совпадает с разложением Гельмгольца–Заремба.

Второе из введенных мною пространств является замыканием $\dot{J}^\infty(\Omega)$ в норме интеграла Дирихле. Его я обозначила через $H(\Omega)$. Скалярное произведение в нем дается равенством

$$(u,v)_{H(\Omega)} = \int\limits_\Omega u_x \cdot v_x dx. \qquad (2_1)$$

Для ограниченных Ω имеет место вложение: $H(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, R^n)$. Если при этом $\partial\Omega$ гладкая, то

$$H(\Omega) = \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) = \{u \| u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \operatorname{div} u = 0\} \qquad (2_2)$$

В данной статье мы будем считать Ω – ограниченной областью $\mathbb{R}^n$. Случаи неограниченных Ω рассматриваются примерно так же, но выводы для них несколько отличаются от аналогичных предложений для ограниченных областей.

Для фактического решения краевых задач (стационарных и нестационарных) часто используется метод Галеркина, причем делается это в рамках пространства $H(\Omega)$. Например, для простейшей краевой задачи

$$-\Delta v + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (3)$$

(равно как и для системы Навье–Стокса) я строила галеркинские приближения v^m по следующей схеме: бралась какая-либо фундаментальная система функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ в пространстве $H(\Omega)$ и $v^m(x)$, в виде $\sum\limits_{k=1}^m c_k^m \varphi_k(u)$, из равенств

$$(v_x^m, \varphi_{kx}) = (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, m. \qquad (4)$$

Эти равенства являются системой линейных алгебраических уравнений для коэффициентов c_k^m, $k = 1, \dots, m$. Их однозначная разрешимость и важные оценки для v^m следуют из соотношения

$$(v_x^m, v_x^m) = (f, v^m), \qquad (5)$$

являющегося следствием (4). Из него получается оценка

$$\|v_x^m\|_{2,\Omega} \leqslant \|f\|_{(-1),\Omega}. \qquad (6)$$

Она позволяет сделать предельный переход по $m \to \infty$ и доказать, что слабым пределом v^m в $H(\Omega)$ является обобщенное решение $v \in H(\Omega)$ задачи (3). После этого давление $p \in L_2(\Omega)$ находится из системы (3), точнее, ее интегрального аналога.

Именно такая схема решений краевых задач для системы Стокса и Навье–Стокса получила широкое распространение среди математиков, занимающихся теоретическими исследованиями. Она хороша для получения доказательства теорем существования и дальнейшего качественного анализа решений. Однако, ее численная реализация требует знания какой-либо фундаментальной системы $\{\varphi_k\}_{k=1}$ в $H(\Omega)$. В данной работе мы предлагаем один из способов ее построения. Для этого привлечем решения следующей задачи.

Задача 1. Найти в Ω решение w задачи

$$\operatorname{div} w = \psi, \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7_1}$$

подчиняющееся неравенству

$$\|w_x\|_{2,\Omega} \leqslant \beta(\Omega)\|\psi\|_{2,\Omega}. \tag{7_2}$$

с какой-либо постоянной $\beta(\Omega)$, независящей от ψ.

Известная функция ψ при этом удовлетворяет необходимому условию

$$\int_\Omega \psi dx = 0. \tag{7_3}$$

Важность этой задачи я поняла с самого начала моих исследований задачи гидродинамики. В моей монографии [1] имеется ее “двойник”.

Задача 2. Найти в Ω решение задачи

$$\operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = \alpha, \tag{8_1}$$

где α – заданное поле, удовлетворяющее необходимому условию

$$\int_{\partial\Omega} \alpha \cdot n \, ds = 0, \tag{8_2}$$

где n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Решение именно этой задачи потребовалось мне при доказательстве Теоремы 1. В [1] указан один из способов решения задачи 2, и при этом отмечено, что построенное u удовлетворяет оценке

$$\|u_x\|_{2,\Omega} \leqslant \beta_1(\Omega)\|\alpha\|_{(\frac{1}{2}),\partial\Omega} \tag{8_3}$$

где $\|\cdot\|_{(\frac{1}{2}),\partial\Omega}$ есть норма в пространстве $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$. Для доказательства Теоремы 1 оценка (8_3) не требуется, и потому ее доказательство не приведено в [1].

Легко видеть, что, решив задачу 1, мы решим и задачу 2, и наоборот. Для этого надо привлечь лишь одно из известных частных решений уравнения $\operatorname{div} v = \psi$ и известные теоремы вложения.

Задача 1 была вскоре востребована при изучении многих вопросов, например, при исследовании проблем разрешимости задач гидродинамики в областях, имеющих разные выходы на бесконечность. В связи с этим последним мы с В. А. Солонниковым рассмотрели в работе [2] задачу 1 и задачу 2, а также задачу 3 о мажорировании $\|p-\bar{p}\|_{2,\Omega}$ величинами $\sum\limits_{i=1}^{n}\|f_i\|_{2,\Omega}$ и $\|f\|_{\frac{2n}{n+2},\Omega}$, если известно, что

$$\nabla p = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f \tag{9_1}$$

Мы показали, что для широкого класса областей Ω (“областей класса k”) верно неравенство

$$\|p-\bar{p}\|_{2,\Omega}^2 \leqslant \beta_2(\Omega)\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{2,\Omega} + \beta_3(\Omega)\|f\|_{\frac{2n}{n+2},\Omega} \tag{9_2}$$

где $\bar{p} = \displaystyle\fint_{\Omega} p\,dx$.

Нас особенно интересовала зависимость констант $\beta_k(\Omega)$ от Ω. Мы выявили разные связи между задачами 1, 2 и 3 и показали, что для задачи 3 случай любой области Ω “типа k” сводится к решению одной из этих задач в какой-либо “простой” области Ω, например, в шаре. К изучению задач 1–3 я привлекла многих из своих учеников, в их числе Л. В. Капитанского и К. Пилецкаса [3]. Позже эти задачи стали предметом изучения в пространствах $L_q(\Omega)$. В работе М. Е. Боговского [4] для областей, звездных относительно какого-либо шара, дано явное представление для решения задачи 2. Ниже мы покажем, что факт удовлетворения уравнению не требует никаких подсчетов (как это делается в работе [4], а также в монографии P. Galdi [5]). Он следует из равенств (12_2). Напротив, доказательство оценки (7_2) требует привлечения предельно точных неравенств: неравенств Харди–Литтельвуда и Кальдерона–Зигмунда. Мы уделим (7_2) особое внимание с целью выяснить как именно зависит константа в (7_2) от Ω. Это важно для многих целей, в их числе и для построения базисов в пространствах соленоидальных функций.

В [4] и [5] сказано, что константа в (7_2) зависит от Ω, но как именно – не указано. В этих публикациях есть список работ разных авторов, посвященных обсуждаемым задачам. Из последних работ, относящихся к данной проблематике, укажем на работу [6]. Мы начнем со случая ограниченных областей Ω, звездных относительно какого-либо шара. Поместим начало координат в центр этого шара и будем считать, что его радиус равен 1, а наибольшее расстояние точек границы $\partial\Omega$ до начала координат обозначим через d.

Для таких областей имеется явное представление для одного из решений задачи 1 (см. [4], [5]). Сначала мы покажем, что эта формула следует из известного представления произвольной функции p через ее градиент ∇p (она дана В. И. Смирновым в [7]; в книге С. Л. Соболева имеется представление p через ее производные какого-либо порядка $l \geqslant 1$). Оно имеет вид

$$p(x) = \tilde{p} - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} A_k(x,y)\partial_{y_k} p(y)dy \equiv \tilde{p} - \int\limits_{\Omega} A(x,y)\nabla p(y)dy \qquad (10_1)$$

где

$$\tilde{p} = \int\limits_{\Omega} \omega(y)p(y)dy, \qquad (10_2)$$

$$A(x,y) = \frac{y-x}{|y-x|^n} \int\limits_{|y-x|}^{\infty} \omega(x + t\frac{x-y}{|x-y|})t^{n-1}dt \qquad (10_3)$$

а ω – какая-либо гладкая (или кусочно-гладкая) функция с $\operatorname{supp}\omega \subset \bar{B}_1(0) = \{x||(x) \leqslant 1\}$ и

$$\int\limits_{\Omega} \omega(x)dx = 1. \qquad (10_4)$$

Кроме этого будем считать $\omega(x) \geqslant 0$. Заметим, что

$$A(x,y)|_{y\in\partial\Omega} = 0. \tag{10_5}$$

Простое доказательство формулы 10_1 дано в [7].

Рассмотрим теперь поле

$$w(x) = \int\limits_\Omega A(y,x)\psi(y)dy \equiv \mathcal{A}(\psi)(x) \tag{11_1}$$

для произвольной гладкой ψ, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_\Omega \psi(x)dx = 0. \tag{11_2}$$

Благодаря (10_5) $w|_{\partial\Omega} = 0$, и она является гладкой функцией. Покажем, что она удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{div}\ w = \psi \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{12_1}$$

Для этого возьмем произвольную гладкую функцию $p(x)$, $x \in \Omega$, и воспользуемся следующей цепочкой равенств

$$(\mathrm{div}\ w, p) = -(w, \nabla p) = -\int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega A(y,x)\psi(y)dy\right) \nabla p(x)dx =$$

$$= -\int\limits_\Omega \psi(y) \left(\int\limits_\Omega A(y,x)\nabla p(x)dx\right) dy = \int \psi(y)p(y)dy. \tag{12_2}$$

При этом мы учли (11_2). В силу произвола p из (12_2) следует (12_1). Займемся теперь получением оценки (7_2), причем сделаем это (как и в [4] и [5]) при любом $q \in (1,\infty)$. Для этого удобно пользоваться тремя следующими представлениями для (11_1):

$$w_i(x) \equiv \int\limits_\Omega \psi(y)A_i^*(x,y)dy \tag{11_3}$$

где

$$A_i^*(x,y) = (x_i - y_i)\int\limits_1^\infty \omega(y + r(x-y))r^{n-1}dy, \tag{11_4}$$

а также

$$A_i^*(x,y) = \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} \int^{\infty} |x-y| \omega(y + t\frac{x-y}{|x-y|}) t^{n-1} dt \qquad (11_5)$$

и

$$A_i^*(x,y) = \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} \int\limits_0^{\infty} \omega(x + \rho\frac{x-y}{|x-y|}) \cdot (\rho + |x-y|)^{n-1} d\rho.$$

Дифференцируя (11_3) по x_j, получим

$$\partial_{x_j} w_i(x) = \int\limits_{\Omega} \psi(y) \partial_{x_j} A_i^*(x,y) dy + \psi(x) \int\limits_{\Omega} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^2} \omega(y) dy \qquad (12)$$

где первый интеграл понимается как сингулярный интеграл, т.е. как

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x-y| \geqslant 0} \psi(y) A_i^*(x,y) dy \qquad (13)$$

Здесь и далее будем считать, что интегралы по области Ω, заменены на интегралы по всему $\mathbb{R}^n$, а функция ψ продолжена нулем с Ω на $\mathbb{R}^n$.

Как и в [5], представим ядро $\partial_{x_j} A_i^*(x,y)$ в виде суммы следующих слагаемых:

$$\partial_{x_j} A_i^*(x,y) = K_{ij}(x, x-y) + G_{ij}(x,y), \qquad (14_1)$$

где

$$K_{ij}(x, x-y) = \frac{k_{ij}(x, x-y)}{|x-y|^n} \qquad (14_2)$$

с

$$k_{ij}(x, x-y) = \delta_i^j \int\limits_0^{\infty} \omega(x + r\frac{x-y}{|x-y|}) r^{n-1} dr$$
$$+ \frac{x_i - y_i}{|x-y|} \int\limits_0^{\infty} \partial_{x_j} \omega(x + r\frac{x-y}{|x-y|}) r^n dr, \qquad (14_3)$$

а

$$G_{ij}(x,y) = \frac{g_{ij}(x,y)}{|x-y|^{n-1}} \qquad (14_4)$$

с

$$g_{ij}(x,y) \equiv \delta_i^j \int\limits_0^\infty \omega(x + r\frac{x-y}{|x-y|}).[|x-y|+r)^{n-1}$$

$$-r^{n-1}]dr + \frac{x_i - y_i}{|x-y|} \int\limits_0^\infty \omega_{x_i}(x + r\frac{x-y}{|x-y|})[(|x-y(+2)^n$$

$$-z^n)dr\}|x-y|^{-1} \qquad (14_5)$$

Под выражением $\partial_{x_j}\omega(x+r\frac{x-y}{|x-y|})$ мы понимаем при этом величину

$$\partial_{z_j}\omega(z) \quad \text{при} \quad z = x + r\frac{x-y}{|x-y|}.$$

Таким образом $\partial_{x_j} w_i(x)$ представлено в виде суммы трех интегралов

$$\partial_{x_j} w_i(x) = J_{ij}(x) + I_{ij}(x) + F(x)\Phi_{ij}(x), \qquad (15_1)$$

где

$$\Phi_{ij}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^2}\omega(y)dy, \qquad (15_2)$$

$$J_{ij}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\frac{k_{ij}(x, x-y)}{|x-y|^n}dy, \qquad (15_3)$$

$$I_{ij}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\frac{g_{ij}(x,y)}{|x-y|^{n-1}}dy. \qquad (15_4)$$

При этом напомним, что $\omega(y) = 0$ вне $B_1(0)$, а $\psi(y) = 0$ вне Ω.

Для оценки интегралов J_{ij} можно применить теорему Кальдерона–Зигмунда [8] (см. также [4], [5]) об оценке норм $L_q(\mathbb{R}^n)$ сингулярных интегралов. Одним из главных ее конструктивных условий является требование

$$\int\limits_{|z|=1} k_{ij}(x,z)ds_z = 0, \qquad (16_1)$$

а также $k_{ij}(x, \alpha z) = k_{ij}(x,z)$ для $\forall \alpha > 0$. Оба они выполнены для k_{ij} из (15_3). Это проверяется просто, но нетривиально. Еще одно условие касается ограниченности $k_{ij}(x,z)$ на сфере $S_1 = \{z||z| = 1\}$. В качестве него можно взять условие

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\max_{|z|=1}|k_{ij}(x,z)| \leqslant \tilde{k}_{ij} < \infty \tag{16_2}$$

Это последнее выполнено, например, при условиях

$$\max_{x\in B_1(0)}|\omega(x)| \leqslant \mu_0 < \infty; \quad \max_{x\in B_1(0)}|\nabla\omega(x)| \leqslant \mu_1 < \infty. \tag{16_3}$$

В предположениях (16_3) в качестве $\tilde{k}_{ij}$ можно взять следующие величины

$$\tilde{k}_{ij} = \delta_i^j\frac{\mu_0}{n}[(d+1)^n - (d-1)^n] + \frac{\mu_1}{n+1}[(d+1)^{n+1} - (d-1)^{n+1}] \tag{16_4}$$

Согласно Теореме Кальдерона–Зигмунда

$$\|J_{ij}\|_{q,\mathbb{R}^n} \leqslant M_1(q,n)\tilde{k}_{ij}\|\psi\|_{q,\mathbb{R}^n} \tag{17}$$

где $M_1 = M_1(q,n)$.

Для оценки $\|I_{ij}\|_{q,\Omega}$ используем неравенство Харди–Литтельвуда (см., например, [9]):

$$\left|\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n}\frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda}dx dy\right| \leqslant M_2(q,\lambda,n)\|f\|_{p,R^n}\|g\|_{q,R^n} \tag{18_1}$$

справедливое для любых $f \in L_p(R^n)$, $g \in L_q(R^n)$, где p, q и λ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} p,q \in (1,\infty), \quad \lambda \in [0,n), \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{\lambda}{n} = 2. \end{cases} \tag{18_2}$$

Мы его используем для функций f и g с носителями в $\overline{\Omega}$. Из (18_k), $k = 1,2$, следует, что для

$$u(x) = \int\frac{|g(y)|}{|x-y|}dy \tag{19_1}$$

справедлива оценка

$$\|u\|_{p'} \leqslant M_2[q,\lambda,n)\|g\|_q \tag{19_2}$$

с

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{\lambda}{n} - 1. \tag{19_3}$$

Для $\lambda = n - \frac{n}{2q}$ число $\frac{1}{p'} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2q} = \frac{1}{2q}$ и потому из (19_2) следует

$$\|u\|_{2q} \leqslant M_2(q, n - \frac{n}{2q}, n)\|g\|_{q,\Omega} \tag{20}$$

Примем теперь во внимание, что для ограниченных Ω верны неравенства

$$\|u\|_{q,\Omega} \leqslant \|u\|_{r,\Omega}|\Omega|^{r-q} \tag{21}$$

при $r > q$ и потому из (20) и (21) следует

$$\|u\|_{q,\Omega} \leqslant M_2(q, n - \frac{n}{2q}, n)|\Omega|^{1/2}\|g\|_{q'\Omega} \tag{22}$$

Используем это неравенство для оценки $\|I_{ij}\|_{q,\Omega}$. А именно,

$$\|I_{ij}\|_{q,\Omega} \leqslant \|\int\limits_{\Omega} |\psi(y)|\frac{|g_{ij}|}{\|x-y\|^{n-1}}dy\|_{q'\Omega} \tag{23_1}$$

Для $q \geqslant \frac{n}{2}$ число $\lambda = n - \frac{n}{2q} \geqslant n-1$ и $\frac{1}{|x-y|^{n-1}} = \frac{|x-y|^{\lambda-n+1}}{|x-y|^{\lambda}} \leqslant \frac{(2d)^{\lambda-n+1}}{|x-y|^{\lambda}}$. В этом случае из (23_1) следует

$$\|I_{ij}\|_{q,\Omega} \leqslant \tilde{g}_{ij}(2d)^{1-\frac{n}{2q}}\|\int\limits_{\Omega} \frac{\psi(y)}{|x-y|^{n-\frac{n}{2q}}}dy \tag{23_2}$$

$$\leqslant \tilde{g}_{ij}(2d)^{1-\frac{n}{2q}}M_2(q, n-\frac{n}{2q}, n)(\Omega)^{1/2}\|\psi\|_{q,\Omega} \tag{24}$$

Здесь $q \geqslant \frac{n}{2}$, а $\tilde{g}_{ij} = \mathrm{const}$, для которых верны неравенства

$$\max_{x,y\in\overline{\Omega}}|\tilde{g}_{ij}(x,y)| \leqslant \tilde{g}_{ij}. \tag{24}$$

Для $q < n$ величина $\|I_{ij}\|_{q,\Omega}$ можно оценить с помощью (19_2) с $\lambda = n-1$. А именно,

$$\|I_{ij}\|_{p',\Omega} \leqslant \tilde{g}_{ij}\|\int\limits_{\Omega} \frac{\psi(y)}{|x-y|^{n-1}}dy\|_{p',\Omega} \leqslant \tilde{g}_{ij}M_2(q, n-1, n))\|\psi\|_{q,\Omega}$$

где $p' = \frac{qn}{n-q} > q$. Отсюда и (21) сделаем вывод: для $q \in (1, n)$

$$\|I_{ij}\|_{q,\Omega} \leqslant \|I_{ij}\|_{p',\Omega}(\Omega)^{\frac{1}{n}} \leqslant \tilde{g}_{ij}M_2(q, n-1, n)|\Omega|^{\frac{1}{n}}\|\psi\|_{q,\Omega} \tag{25}$$

Запишем (23_2) и (25) так:

$$\|I_{ij}\|_{q,\Omega} \leqslant \tilde{g}_{ij} M_3(n,q,d)\|\psi\|_{q,\Omega}. \tag{26}$$

где

$$M_3(n,q,d) = \begin{cases} 2^{1-\frac{n}{2q}} d^{1-\frac{n}{2q}+\frac{n}{2}} \varkappa_n^{\frac{1}{2}} g \geqslant \frac{n}{2} \\ M_2(q,n-1,n) d \varkappa_n^{\frac{1}{n}}, \quad \text{для} \quad q < n. \end{cases}$$

Здесь $\varkappa_n = \operatorname{mes} B_1$ – мера шара B_1 в R^n радиуса 1.

Из (15_1), (17) и (26) следует

$$\|\partial_{x_j} w_i\|_{q,\Omega} \leqslant [M_1(q,n)\tilde{k}_{ij} + M_3(n,q,d)\tilde{g}_{ij} + 1]\|\psi\|_{q,\Omega} \tag{27}$$

В качестве $\tilde{k}_{ij}$ можно взять величину, выписанную в (16_4). Подсчитаем, что можно взять в качестве $\tilde{g}_{ij}$. Для этого используем представление (14_5) и примем во внимание условия (16_3), а также, то, что $\omega(x) = 0$ для $|x| \geqslant 1$. Благодаря этому при $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned} |g_{ij}(x,y)| \leqslant |x-y|^{-1}\{\delta_i^j \mu_0 \int_a^{a+2} [(\rho+2)^{n-1} - r^{n-1}]dr \\ +\mu_1 \int_a^{a+2} [(\rho+r)^n - r^n]dr\} = \delta_i^j \mu_0 \int_a^{a+2} [(\rho+2)^{n-2} \\ +(\rho+2)^{n-3}r + \cdots + r^{n-2}]dr + \mu_1 \int_a^{a+2} [(\rho+2)^{n-1} \\ +(\rho+r)^{n-2}r + \cdots + r^{n-1}]dr \end{aligned} \tag{28_1}$$

Для $n = 2$

$$|g_{tj}(x)| \leqslant \delta_i^j \mu_0 \int_a^{a+2} dr + \mu_1 \int_a^{a+2} (\rho+2r)dr \leqslant \delta_i^j 2\mu_0 + 8\mu_1 d. \tag{28_2}$$

При этом мы использовали $|x-y| \equiv \rho \leqslant 2d$ и $a \leqslant d-1$. Для $n=3$ из (28_1) следует

$$|g_{ij}| \leqslant \delta_i^j \mu_0 8d + \mu_1(26d^2 + 2). \tag{28_3}$$

Сформулируем изложенное в форме теоремы:

Теорема 2. *Для ограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, звездных относительно шара $B_1(0) \subset \Omega$, задача*

$$\operatorname{div} w = \psi, \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int\limits_{\Omega} \psi dx = 0 \tag{29}$$

имеет решение w, определяемое формулой (11_3). Гладкость его растет с гладкостью ψ. При $\psi \in L_q(\Omega)$, $q \in (1, \infty)$, решение $w \in W_q^1(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|\nabla w\|_{q,\Omega} \leqslant \beta(n, q, d)\|\psi\|_{q,\Omega} \tag{30}$$

где мажоранта β зависит от n, q и $d = \operatorname{dist}\{\partial\Omega; 0\}$. •

Из (27) и неравенств (16_4) и (28_k), $k = 1, 2, 3$, видно, что можно взять за $\beta(n, q, d)$ в оценке (30).

Отметим важное свойство мажоранты $\beta(n, q, d)$: от области Ω она зависит только за счет вхождения d; при дилатации Ω это число не меняется. Действительно, оно равно отношению "внешнего радиуса Ω", т.е. $\sup_{x\in\Omega}|x|$, к "внутреннему радиусу Ω", т.е. к радиусу наибольшего шара $\beta_\rho(0)$, помещающегося в Ω. Центры этих "внешнего" и "внутреннего" шара мы поместили в точку $x = 0$.

Поясним это детальнее.

Пусть $w(x)$ есть решение задачи, гарантированное Теоремой 2. Перейдем от $x \in \Omega$, $w(x)$ и $\psi(x)$ к переменным $\hat{x}$, $\hat{\omega}(\hat{x})$ и $\hat{\psi}(\hat{x})$ по формулам:

$$x = \lambda\hat{x}, \quad w(x) = w(\lambda\hat{x}) \equiv \hat{w}(\hat{x}),$$

$\hat{F}(\hat{x}) = \lambda F(x)$; $\lambda > 0$. Легко подсчитать, что $\hat{w}(\hat{x})$ есть решение задачи

$$\operatorname{div}_{\hat{x}} \hat{w}(x) = \hat{\psi}(\hat{x}), \quad \hat{w}|_{\partial\widehat{\Omega}} = 0, \quad \text{в} \quad \widehat{\Omega}. \tag{31}$$

Более того, для $\hat{w}$ имеет место представление того же вида что и представление (11_k), $k = 3, 4, 5, 6$, для $w(x)$, а именно

$$\hat{w}(\hat{x}) = \int\limits_{\widehat{\Omega}} \hat{F}(\hat{y}) \cdot \frac{\hat{x} - \hat{y}}{|\hat{x} - \hat{y}|^n} \int\limits_0^\infty \widehat{\omega}(\hat{x} + \hat{\rho}\frac{\hat{x} - \hat{y}}{|\hat{x} - \hat{y}|}) \cdot (\widehat{\rho} + |\hat{x} - \hat{y}|)^{n-1} d\rho, \tag{32}$$

где $\widehat{\omega}(\hat{x}) = s - \lambda^n\omega(\lambda\hat{x}) = \lambda^n\omega(x)$. Заметим, что $\int_{\widehat{\Omega}} \widehat{\omega}(\hat{x})d\hat{x} = \int_\Omega \omega(x)dx = 1$. Подытожим это в виде следствия:

Следствие 1. *Задача (31) в любой области $\widehat{\Omega}$, звездной относительно шара $B_R(0) \subset \widehat{\Omega}$, имеет решение $\widehat{\omega}$, даваемое формулой (32) с любой гладкой функцией $\widehat{\omega}$, равной нулю вне $B_R(0)$ и нормированной условием $\int \widehat{\omega}(\hat{x})d\hat{x} = 1$. Для него верна оценка*

$$\|\nabla \hat{w}\|_{q,\widetilde{\Omega}} \leqslant \beta(n,q,d)\|\widehat{\psi}\|_{q,\widehat{\Omega}} \tag{33}$$

с той же величиной $\beta(n,q,d)$, что и в (30), только в ней $d = R^{-1} \sup |x|_{x \in \partial\Omega}$. •

§2. О построении фундаментальных систем в $H(\Omega)$

Сделанное выше мы используем для главной цели этой статьи – построения фундаментальных систем в пространстве $H(\Omega)$. Сказанное ниже справедливо и для банаховых пространств $\overset{\circ}{J}{}^1_q(\Omega)$ с любым $q \in (1,\infty)$. Но мы ограничимся здесь случаем $q = 2$. В соответствии с этим мы используем теорему 2 (или ее следствие) для $q = 2$.

Определим в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ проектор $\mathcal{P}$ на $H(\Omega)$ с помощью равенств:

$$\mathcal{P}(\varphi) = \varphi - Q(\varphi), \tag{34_1}$$

где

$$Q(\varphi) = \mathcal{A}(\operatorname{div} \varphi), \tag{34_2}$$

а оператор A определен в (11_1) (или, что то же, в (32) для области $\widehat{\Omega}$, содержащей шар $B_R(0)$), $R = \lambda^{-1}$).

Как доказано в §1

$$\|Q(\varphi)\|_{2,\Omega} \leqslant \beta(n,2,d)\| \operatorname{div} \varphi\|_{2,\Omega} \leqslant \beta(n,2,d)n\|\nabla\varphi\|_{2,\Omega}, \tag{34_3}$$

и потому норма оператора $\mathcal{P}$ имеет оценку

$$\|\mathcal{P}\| \leqslant 1 + \beta(n,2,d)n \equiv \beta_1. \tag{35}$$

Видно, что $\mathcal{P}$ есть проектор в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ на $H(\Omega)$. Благодаря этим фактам верна

Теорема 3. *Если $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ есть фундаментальная система в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, то система $\{\psi_k(x) = \mathcal{P}(\varphi_k)(x)\}_{k=1}^\infty$ является фундаментальной в пространстве $H(\Omega)$. Область Ω при этом должна удовлетворять условию теоремы 2.*

Мы не включаем в термин "Фундаментальные системы" свойство линейной независимости элементов этой системы, а требуем от нее лишь следующее: для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ найдется такая сумма $\varphi^{(\varepsilon)} = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k\varphi_k$, $N_\varepsilon < \infty$, что $\|\nabla(\varphi - \varphi^{(\varepsilon)})\|_{2,\Omega} \leqslant \varepsilon$.

В силу ограниченности проектора $\mathcal{P}$ ясно, что $\{\psi_k\}$ образуют фундаментальную систему в $H(\Omega)$. Для ее использования целесообразно провести ее ортогонализацию в $L_2(\Omega)$ или в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

Теорема 2 позволяет построить фундаментальные системы в $H(\Omega)$. Для этого надо взять фундаментальную систему $\{\varphi_n\}$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, каждый элемент φ_k которой имеет компактный носитель $\overline{\Omega}_k \subset \Omega$. Кроме этого, числа d_k, равные (как и в Теореме 2) отношению "внешнего" радиуса Ω_k к ее "внутреннему радиусу", должны не превосходить какое-либо число $d < \infty$. Для каждой из $\varphi_k(x)$ (равной нулю для $x \in \Omega \setminus \Omega_k$) построим в Ω_k проектор $\mathcal{P}_k$, такой же, как в Теореме 3, и положим $\psi_k(x) = \mathcal{P}_k(\varphi_k)(x)$ для $x \in \Omega_k$. Вне Ω_k положим $\psi_k = 0$. Так построенные функции ψ_k, $k > 1$, принадлежат $H(\Omega)$ и, как нетрудно видеть, образуют фундаментальную систему в $H(\Omega)$. Итак, мы убедились в справедливости следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть Ω – произвольная область в R^n и $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ фундаментальная система в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ с $\operatorname{supp}\varphi_k \equiv \Omega_k$, имеющими $d_k \leqslant d < \infty$. Тогда система $\{\psi_k(x)\}_{k=1}$, в которой $\psi_k(x) = \mathcal{P}_k(\varphi_k)(x)$, $x \in \Omega_k$, $\psi_k(x) = 0$ для $k \in \overline{\Omega} \setminus \Omega_k$, а $\mathcal{P}_k$ – проектор для области Ω_k, определенный выше в (34_s), $s = 1, 2$, является фундаментальной в $H(\Omega)$.*

Подчеркнем, что нормы проекторов $\mathcal{P}_k$ благодаря Теореме 2 имеют общую мажоранту.

Литература

1. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М., Физмат.-гиз., 1961 (второе издание М. Наука, 1970).
2. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, *О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **59** (1976), 81–116.
3. Л. В. Капитанский, К. И. Пилескас, *О некоторых задачах векторного анализа.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **138** (1984), 65–85.

4. М. Е. Боговский, *Решение некоторых задач векторного анализа с операторами* Div *и* Grad. — Труды семин. С. Л. Соболева **80**, No. 1 АН СССР, Сибирское Отделение математики, Новосибирск (1980) 5–40.
5. G. P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations*, VI, Springer-Verlag (1994).
6. Б. Дакоронья, *Существование и регулярность решений* $d\omega = f$ *с граничными условиями Дирихле* в кн. Нелинейные задачи матем. физики и смежные вопросы. I Международная матем. серия **1**, март 2002 г. Kluwer Plenum Publ. 63–76.
7. В. Н. Смирнов, *Курс высшей математики* **5**, М., ГИФМЛ (1959).
8. A. P. Calderon and A. Zygmund, *On singular Integrals with variable kernels.* — Applicable Analysis, **7** (1978), 221–238.
9. Э. Либ, М. Лосс, *Анализ.* Н., Научн. книга (1998).

Ladyzhenskaya O. A. On a constraction of basises in spaces of solenoidal vector-valued fields.

It is given a construction of fundamental systems in the space $H(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ with the help of an arbitrery fundamental system in $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 декабря 2003 г.