Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 308, 2004 г.

В. М. Бабич

О ПЦ–АНЗАЦЕ

**Работа посвящается П. В. Крауклису
в связи с его семидесятилетием**

Введение

В настоящей работе рассматриваются некоторые асимптотические разложения, содержащие функции параболического цилиндра. Эти разложения мы будем называть ПЦ-анзацами. Под ПЦ-анзацем в дальнейшем подразумевается разложение вида:

$$e^{\mathrm{i}\,kl(x)}[AD_p(\sqrt{k}e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}m(x))+k^{-\frac{1}{2}}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}BD_p'(\sqrt{k}e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}m(x))], \tag{1.1}$$

где A и B ряды:

$$A=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{A_s(x)}{(\mathrm{i}\,k)^s};\quad B=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{B_s(x)}{(\mathrm{i}\,k)^s} \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем формальные степенные ряды "не обязаны" сходится. Равенство (1.2) имеют тот смысл, что A и B обозначения соответствующих степенных рядов. В формуле (1.1) D_p – функции параболического цилиндра, $l(x), m(x)$, $A_s(x)$, $B_s(x)$ подлежат определению, $x\in\mathbb{R}^r$, $r=2,3$. Мы будем предполагать l, m, A_s, B_s гладкими. Предполагается, что волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца:

$$(\Delta+k^2)u=0. \tag{1.3}$$

ПЦ-анзац впервые был предложен в работе [1] при $p=-\frac{3}{2}$ для описания поля волны, рассеянной конусом, в окрестности поверхности, отделяющей область, освещённую падающей волной от соответствующей области тени. Наша работа посвящена дальнейшему изучению ПЦ-анзацев.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ No. 02-01-260.

Анзац (1.1)–(1.2) можно применять и в векторном случае. Если вместо (1.3) волновой процесс описывается уравнениями теории упругости, то A_s, B_s векторы, в электромагнитном случае – пары векторов.

ПЦ-анзац – аналог анзацев Олвера (случай обыкновенных линейных уравнений) [2] и Ю. А. Кравцова [3], где рассматривается волновое поле в окрестности каустики и вместо функций параболического цилиндра в анзаце фигурируют функции Эйри. О связи ПЦ-анзацев с некоторыми точными решениями уравнения Гельмгольца см. [4].

2. О свойствах функций параболического цилиндра (см. [5]) и применении ПЦ-анзацев.

Функции параболического цилиндра $D_p(z)$ – это целые функции z, удовлетворяющие дифференциальному уравнению:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+p+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right)D_p(z)=0 \tag{2.1}$$

и имеющие при $z\to+\infty$ асимптотику:

$$D_p(z)=e^{-\frac{z^2}{4}}z^p\left(1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right). \tag{2.2}$$

Важную роль для приложений в теории дифракции играет асимптотика $D_p(z)$ на прямой $\operatorname{Im}(ze^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}})=0$:

$$D_p(z)=e^{-\frac{z^2}{4}}z^p\left(1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right),\quad (|z|\to+\infty,\ \arg z=-\frac{\pi}{4}) \tag{2.3}$$

$$D_p(z)=e^{-\frac{z^2}{4}}z^p\left(1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)+\frac{(-\sqrt{2\pi})e^{p\pi\,\mathrm{i}}}{\Gamma(-p)}e^{\frac{z^2}{4}}\left(1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right),$$
$$(|z|\to+\infty,\arg z=\frac{3\pi}{4}) \tag{2.4}$$

В формулах (2.3)–(2.4) $O(\frac{1}{z^2})$ – функции, асимптотику которых представляет ряд по степеням $\frac{1}{z^2}$, начинающийся с const/z^2. Заметим, что асимптотические формулы (2.3)–(2.4) можно дифференцировать. Считая, что $m(x)\leqslant-\mathrm{const}<0\quad k\to+\infty$, исходя из анзаца (1.1)–(1.2) и асимптотической формулы (2.4), нетрудно придти к выводу, что анзац (1.1)–(1.2) эквивалентен двум лучевым разложениям, причём начальные данные для соответствующих уравнений переноса можно выбирать произвольно.

Рассмотрим коротко ситуации, когда волновое поле описывается ПЦ-анзацом. Пусть мы имеем картину волновых фронтов, изображённую на рис 1.

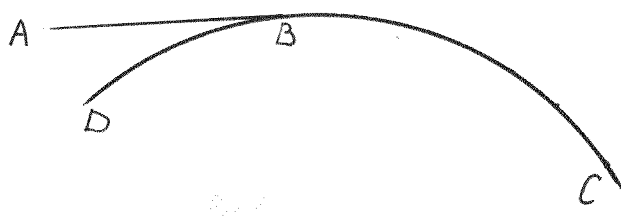

Рис. 1. Картина волновых фронтов.

Здесь фронт AB прекращается за точкой B и касается фронта DBC в точке B. В окрестности точки B соответствующее поле лучей нерегулярно и геометро-оптическим разложением (далее г-о волной) асимптотически не представляется. Обратимся к асимптотике $D_p(ze^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})$ (см. формулы (2.3)–(2.4). При переходе z от $+\infty$ к $-\infty$ осуществляется переход от асимптотики, связанной с одной экспонентой, к асимптотике, связанной с двумя экспонентами. Обратимся к ПЦ-анзацу. Естественно, что при этом одна г-о волна переходит в две г-о волны. Соответствующие волновые фронты схематически изображены на рис. 1.

Картина волновых того типа, что на рис. 1, возникает при падении г-о волны на клин или конус и в окрестности точки выхода головной волны (AB фронт головной волны). Несложно определить, каков должен быть индекс p в ПЦ-разложениях (1.1), в указанных ситуациях.

Известно – см. например, [6], что при падении г-о волны на клин в случае идеальных краевых условий и когда г-о разложение падающей волны начиналось с членов порядка $O(1)$, то г-о разложение волны, рассеянной вершиной клина, начинается с членов порядка $k^{-\frac{1}{2}}$. Обращаясь к разложениям (2.3)–(2.4) и (1.1), получим, что порядок по k г-о волны с фронтом AB (рис. 1) отличается от соответствующего порядка г-о волны с фронтом DBC множителем $\sim O(k^{-\frac{1}{2}})$.С другой стороны (см. асимптотические формулы (2.3)–(2.4) для ПЦ-функций) этот множитель должен иметь порядок $O(z^{2p+1})$, $z \sim k^{-\frac{1}{2}}$. Мы получим: $O(k^{\frac{1}{2}(2p+1)}) \sim O(k^{-\frac{1}{2}})$, т.е. $p + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, откуда $p = -1$.

В случае конуса падающая г-о волна $\sim O(1)$ отражается, порождая отражённую г-о волну. Кроме того возникает рассеянная вершиной г-о волна порядка $O(k^{-1})$. На границе области, освещённой отражённой волной, картина волновых фронтов близка к картине, которую иллюстрирует рис. 1. Мы приходим к равенству $\frac{1}{2}(2p+1) = -1$, откуда $p = -\frac{3}{2}$.

В случае окрестности точки выхода головной волны г-о волна, сответствующая фронту DBC,отличается по порядку от головной волны (фронт AB) множителем порядка $O(k^{-1})$. Это приводит к равенству $\frac{1}{2}(2p+1) = 1$, откуда $p = \frac{1}{2}$. Мы коснёмся в наших дальнейших рассмотрениях лишь случаев $p = -1$ (рассеяние г-о волны клином), и $p = -\frac{3}{2}$ (рассеяние плоской волны конусом).

3. О связи ПЦ-анзаца $p = -1$ и анзаца В. А. Боровикова.

В случае г-о волны, рассеянной клином, возникает полутеневое волновое поле в окрестности линии, разделяющей область, освещённую падающей или отраженной волной и соответствующую зоне тени. Это волновое поле асимптотически описывается анзацем В. А. Боровикова [6]:

$$u = u_0 F(\sqrt{k(s_{sc} - s_0)}) + C e^{\mathrm{i}\, k s_{sc}} \tag{3.1}$$

Здесь u_0 – г-о разложение падающей (или отражённой) волны:

$$u_0 = e^{\mathrm{i}\, k s_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E_j(x,y)}{(\mathrm{i}\, k)^j}, \tag{3.2}$$

s_0 её эйконал, s_{sc} – эйконал волны с круговым фронтом, рассеянной вершиной клина,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\,\mathrm{i}}} \int_{-\infty}^{x} e^{\mathrm{i}\,\alpha^2} d\alpha, \quad \sqrt{\mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}, \tag{3.3}$$

$$C = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_j(x,y)}{(-\mathrm{i}\, k)^{j+\frac{1}{2}}}, \quad (-\mathrm{i})^{j+\frac{1}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}(j+\frac{1}{2})\mathrm{i}}, \tag{3.4}$$

C_j, D_j гладкие функции.

Соответствующий ПЦ-анзац имеет вид см. (1.1):

$$e^{\mathrm{i}\, kl(x)}[AD_{-1}(\sqrt{k}e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}m(x)) + k^{-\frac{1}{2}}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}BD'_{-1}(\sqrt{k}e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}m(x))]. \tag{3.5}$$

Покажем эквивалентность анзацев (3.1) и (3.5) вблизи сингулярного направления. Воспользуемся известной формулой (см. [5]):

$$D_{-1}(z) = e^{\frac{z^2}{4}}\sqrt{2}\int\limits_{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt, \tag{3.6}$$

откуда

$$D'_{-1}(z) = e^{\frac{z^2}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}z\int\limits_{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt - e^{-\frac{z^2}{2}}. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.6–3.7) в (3.5), получим:

$$u = e^{\mathrm{i}\,k(l-\frac{m^2}{4})}\sqrt{2}\left(A + \frac{1}{2}mB\right)\int\limits_{\frac{m\sqrt{k}\exp(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt - Be^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{\mathrm{i}\,k(l+\frac{m^2}{4})} \tag{3.8}$$

или

$$\begin{aligned} u &= e^{\mathrm{i}\,k(l-\frac{m^2}{4})}\sqrt{2}\left(A + \frac{1}{2}mB\right)\int\limits_{-\infty}^{\frac{-m\sqrt{k}}{\sqrt{2}}} e^{\mathrm{i}\,\alpha^2}\,d\alpha - Be^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{\mathrm{i}\,k(l+\frac{m^2}{4})} \\ &= e^{\mathrm{i}\,k(l-\frac{m^2}{4})}\sqrt{2}\left(A + \frac{1}{2}mB\right)\sqrt{\pi\,\mathrm{i}}F\left(-\frac{m\sqrt{k}}{2}\right) - Be^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{\mathrm{i}\,k(l+\frac{m^2}{4})}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Вернёмся к анзацу В. А. Боровикова (3.1). Положим $\sqrt{s_{sc} - s_0} = -\frac{m}{\sqrt{2}}$, $l - \frac{m^2}{4} = s_0$ и свяжем A и B соотношением

$$e^{\mathrm{i}\,k(l-\frac{m^2}{4})}\sqrt{2}\left(A + \frac{1}{2}mB\right)\sqrt{\pi\,\mathrm{i}} = u_0, \tag{3.10}$$

тогда выражение (3.9) будет идентично анзацу В. А. Боровикова, если

$$-Be^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{\mathrm{i}\,k(l+\frac{m^2}{4})} = Ce^{\mathrm{i}\,ks_{sc}}. \tag{3.11}$$

Заметим в заключение, что в рассматриваемом случае анзац (3.5) можно было бы выразить через функцию $f(\alpha)$, введённую

В. А. Фоком (см. [7], стр. 148). Это нетрудно сделать, если воспользоваться формулой

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2} i} D_{-1}\left(\sqrt{2} e^{-\frac{\pi\,\mathrm{i}}{4}} \alpha\right), \qquad (3.12)$$

вывести которую несложно. Соответствующие построения мы опускаем.

4. О волновом поле в сингулярном направлении. Случай конуса.

В случае клина ПЦ-анзац или эквивалентный ему анзац В. А. Боровикова сравнительно несложно обосновать – т.е. показать (базируясь на явном решении задачи), что высокочастотная асимптотика волнового поля в полутени действительно описывается соответствующим разложением. В случае конуса ситуация сложнее. В этом пункте мы покажем, что и здесь ПЦ-анзац действительно асимптотически представляет волновое поле в соответствующей области полутени.

Будем исходить из формулы (см.[8], стр. 12) для решения задачи о рассеянии плоской волны конусом $\Xi = N \times \mathbb{R}^+$, где N – область на единичной сфере S^2 с центром в вершине конуса Ξ:

$$G(r, \omega, \omega_0) = e^{\frac{\pi\,\mathrm{i}}{4}} (kr)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_W e^{-\mathrm{i}\, kr \cos s} \Phi(\omega, \omega_0, s)\, ds, \qquad (4.1)$$

где

$$\Phi(\omega, \omega_0, s) = \frac{\mathrm{i}}{\pi} \int\limits_\gamma e^{-\mathrm{i}\,\nu s} g(\omega, \omega_0, \nu) \nu\, d\nu. \qquad (4.2)$$

В обозначениях мы следуем работе [8]. Здесь $g(\omega, \omega_0, \nu)$ – функция Грина области N, т.е. решение задачи

$$\Delta_\omega g + (\nu^2 - \frac{1}{4}) g = \delta(\omega - \omega_0), \;\; \Omega g|_{\partial N} = 0, \qquad (4.3)$$

Δ_ω – оператор Лапласа на сфере, ω – единичный вектор, в направлении которого ведётся наблюдение, падающая волна движется в направлении вектора $-\omega_0$, Ω – оператор взятия внешней нормальной производной к границе ∂N области N (условие Неймана) или $\Omega = 1$ – условие Дирихле, W – контур, изображённый на рис. 2, охватывающий полуполосу $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant \pi, \operatorname{Im} s \leqslant 0$,

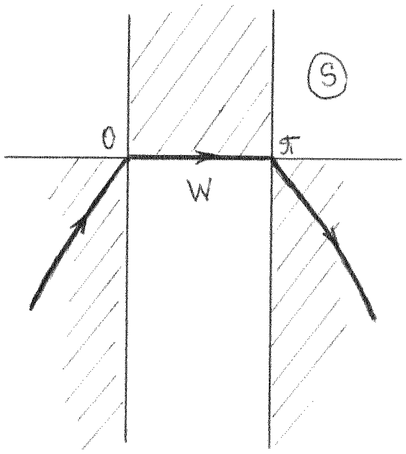

Рис. 2. Контур W.

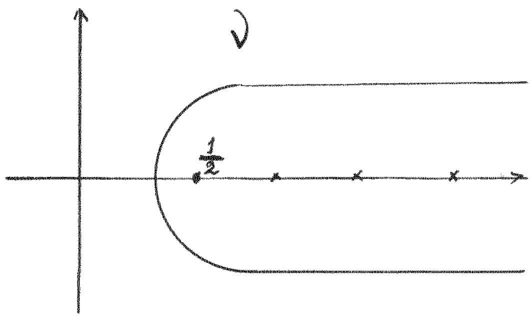

Рис. 3. Контур γ.

γ – контур, изображённый на рис. 3, охватывающий полюса $g(\omega, \omega_0, \nu)$. Рис. 2 несколько условен: $\Phi(\omega, \omega_0, s)$ может иметь сингулярности на отрезке $[0, \pi]$. Их следует обходить по малым дугам полуокружностей с центрами в сингулярных точках и лежащих в полуплоскости $\operatorname{Im} s \leqslant 0$. Сингулярностей в случае выпуклого конуса может быть максимум две: $s = s_0$, где s_0 расстояние вдоль S^2 между ω и ω_0 и $s = \tau_r$, где τ_r расстояние между ω и ω_0 вдоль ломаного луча, имеющего точку отражения на ∂N.

В коротковолновую ($kr \to +\infty$) асимптотику интеграла (4.1) вносят вклад те сингулярности $\Phi(\omega, \omega_0, s)$, которые находятся на отрезке $[0, \pi]$ и стационарная точка $s = \pi$. Сингулярности

$\Phi(\omega, \omega_0, s)$, представляющие для нас интерес, находятся с помощью следующих построений (см. [8]): при малых s, таких, что ни на окружности $s_0(\omega, \omega_0) = s \subset S^2$, ни внутри неё нет точек ∂N – особенности Φ совпадают с сингулярностями функции

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi}\frac{d}{ds}(\cos s - \cos s_0 + \mathrm{i}\,0)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.4}$$

Когда s делается столь большим, что окружность $s_0 = s$ достигает границы ∂N, к указанным сингулярностям следует добавить сингулярности, получающиеся в результате отражения по правилам лучевого метода сингулярностей функции (4.4) от кривой ∂N. Мы предполагаем, что лучи падающей волны некасательны к ∂N и что волновой процесс описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \Delta_\omega + \frac{1}{4}\right)\Phi = 0. \tag{4.5}$$

Краевые условия на ∂N – Дирихле или Неймана. Пусть кривая ∂N аналитическая, тогда вблизи особенности $s = \tau_r$ для Φ можно написать формулу:

$$\Phi(\omega, \omega_0, s) = (\tau_r - s + \mathrm{i}\,0)^{-3/2}\Phi_1(\omega, \omega_0, s) + \Phi_2(\omega, \omega_0, s), \tag{4.6}$$

где Φ_1 и Φ_2 аналитичны и Φ_1 отлична от нуля вблизи точек, где $s = \tau_r$.

Пусть точки $s = \pi$ и $s = \tau_r$ близки. При $\tau_r > \pi$ сингулярность $s = \tau_r$ уже не порождает (см. формулу (4.1)) г-о разложения отражённой волны. Соответствующие точки r, ω находятся в зоне тени отражённой волны. Окрестность точек, таких, что $\pi = \tau_r(\omega, \omega_0)$ -это полутень для отражённой волны. Волновое поле здесь описывается интегралом (4.1), где точка ветвления $s = \tau_r$, близка к стационарной точке $s = \pi$. Асимптотику интегралов такого типа изучал Н. Блейстейн [9]. Из его результатов вытекает, что в зоне полутени отражённой волны волновое поле описывется ПЦ-анзацем (1.1), где $p = -\frac{3}{2}$, причём соответствующее разложение является "равномерным" в том смысле, что область его применимости не стягивается к поверхности $m = 0$ при $kr \to +\infty$. Коэффициенты A_j, B_j функции l, m аналитичны. К этому анзацу следует добавить г-о волну, порожденную функцией Φ_2.

Завершим этот раздел статьи кратким обзором литературы. Впервые волновое поле вблизи сингулярного направления рассматривал В. А. Боровиков [10], который ввел для описания соответствующей волновой картины т.н обобщённый интеграл Френеля, выражающийся через функции параболического цилиндра. Анзац по-существу идентичный ПЦ-анзацу ($p = -\frac{3}{2}$) был введён в работе [1]. Там же (стр. 228) указано, что волновое поле в окрестности сингулярного направления описывается суммой падающей волны (как фон) + ПЦ-анзац+г-о волна со сферическим фронтом (центр – вершина конуса) и с регулярными в окрестности сингулрных направлений коэффициентами. В работах [8] и [11] для нахождения аналитичесого выражения для волн вблизи сингулярных направлений применяется методика пограничного слоя: область применимости полученных асимптотических формул стягивается к поверхности $m(x) = 0$ при $k \to +\infty$.

5. Об уравнениях переноса в случае ПЦ-анзаца.

Потребуем, чтобы анзац (1.1) ($p = -\frac{3}{2}$) удовлетворял уравнению Гельмгольца:

$$(\Delta+k^2)k^{-\frac{1}{4}}\left[e^{\mathrm{i}\,kl}\left(AD_{-\frac{3}{2}}(\sqrt{k}e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}m)+k^{-\frac{1}{2}}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}BD'_{-\frac{3}{2}}(\sqrt{k}e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}m)\right)\right]=0. \tag{5.1}$$

Мы ввели в выражение для анзаца множитель $k^{-\frac{1}{4}}$, чтобы анзац мог представлять волновое поле в полутени отражённой волны, имеющей порядок $O(1)$ при $k \to +\infty$.

Приравняем теперь нулю главные члены ($k \to +\infty$) в левой части равенства (5.1). Это будут коэффициенты при $k^{\frac{7}{4}}D_{-\frac{3}{2}}$ и $k^{\frac{5}{4}}D'_{-\frac{3}{2}}$. Мы получим:

$$\begin{aligned}
&(1-(\nabla l)^2-\frac{1}{4}m^2(\nabla m)^2)A_0-\frac{1}{2}\nabla l\nabla mB_0=0,\\
&2\nabla l\nabla mA_0+(1-(\nabla l)^2-\frac{1}{4}m^2(\nabla m)^2)B_0=0.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Коэффициенты A_0 и B_0 не должны одновременно равняться нулю, поэтому определитель системы (5.2) должен равняться нулю, откуда

$$1-(\nabla l)^2-\frac{1}{4}m^2(\nabla m)^2=0, \tag{5.3}$$

$$\nabla l\nabla m=0. \tag{5.4}$$

При выполнении равенств (5.3)–(5.4) равенства (5.2) тоже очевидно выполняются.

Обратимся к следующему приближению – приравняем нулю в левой части (5.1) коэффициенты при $k^{3/4}D_{-\frac{3}{2}}$ и $k^{1/4}D'_{-\frac{3}{2}}$:

$$L := 2\nabla l\nabla A_0 + \Delta l A_0 - (\nabla m)^2 A_0 - \frac{(\nabla m)^2}{4} 2\nabla m \nabla B_0$$
$$-\frac{1}{2}m(\nabla m)^2 B_0 - \frac{1}{4}m^2\Delta m B_0 = 0, \tag{5.5}$$
$$M := 2\nabla l\nabla B_0 + \Delta l B_0 - 2\nabla m\nabla A_0 - \Delta m A_0 = 0. \tag{5.6}$$

Умножим равенство (5.5) на $m^{-\frac{3}{2}}$, равенство (5.6) на $-\frac{1}{2}m^{-\frac{1}{2}}$ и сложим:

$$Lm^{-\frac{3}{2}} - M\frac{1}{2}m^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

или (после громоздких выкладок):

$$2\nabla\left(l+\frac{m^2}{4}\right)\nabla(A_0 m^{-\frac{3}{2}} - \frac{m^{-\frac{1}{2}}}{2}B_0)$$
$$+\Delta\left(l+\frac{m^2}{4}\right)(A_0 m^{-\frac{3}{2}} - \frac{m^{-\frac{1}{2}}}{2}B_0) = 0. \tag{5.7}$$

Равенство (5.7) – является уравнением переноса лучевого метода для эйконала $l+\frac{m^2}{4}$. (Нетрудно видеть, что из равенств (5.3)–(5.4) следуют уравнения эйконала: $(\nabla\left(l\pm\frac{m^2}{4}\right))^2 = 1$.) Умножим теперь равенство (5.5) на $m^{\frac{1}{2}}$, а равенство (5.6) на $\frac{1}{2}m^{\frac{3}{2}}$. Сложив полученные соотношения, получим:

$$Lm^{\frac{1}{2}} + M\frac{1}{2}m^{\frac{3}{2}} = 0$$

или

$$2\nabla\left(l-\frac{m^2}{4}\right)\nabla(A_0 m^{\frac{1}{2}} + \frac{m^{3/2}2}{B}{}_0) + \Delta\left(l-\frac{m^2}{4}\right)(A_0 m^{\frac{1}{2}} + \frac{m^{3/2}2}{B}{}_0) = 0. \tag{5.8}$$

Равенство (5.8) – уравнение переноса для эйконала $l-\frac{m^2}{4}$. Из уравнений переноса (5.7)–(5.8) следуют формулы

$$A_0 m^{-\frac{3}{2}} - \frac{m^{-\frac{1}{2}}}{2}B_0 = \chi_1(\alpha_1,\beta_1)\sqrt{\frac{J_1^0}{J_1}}, \tag{5.9}$$

$$A_0 m^{\frac{1}{2}} + \frac{m^{\frac{3}{2}}}{2} B_0 = \chi_2(\alpha_2, \beta_2)\sqrt{\frac{J_2^0}{J_2}}. \tag{5.10}$$

Здесь α_j, β_j, $j = 1, 2$ – параметры, характеризующие лучи, χ_j, $j = 1, 2$ – дифракционные коэффициенты, J_1, J_2 – геометрические расходимости вдоль соответствующих лучей, J_1^0, J_2^0 – расходимости в некоторой фиксированной точке на луче.

Если $|m| \geqslant \mathrm{const} > 0$, то χ_1 и χ_2 ничем не связаны между собой. Равенства (5.9)–(5.10) дают возможность выразить A_0, B_0 через χ_j и геометрические расходимости. Аналогично можно было бы рассмотреть A_j, B_j, $j > 0$.

В окрестности поверхности $m = 0$ на коэффициенты A_0, B_0 накладывается то ограничение, что они должны сохранять гладкость в окрестности поверхности $m = 0$.

6. О волновом поле вблизи сингулярного направления в случае импедансного или прозрачного конуса.

Вернёмся к формулам (5.9)–(5.10). Из формул для волнового поля в сингулярном направлении в случае краевых условий Дирихле или Неймана (см. [11]) $A_0|_{m=0} \neq 0$. Из (5.9) следует, что при подходе к поверхности $m = 0$ χ_1 имеет сингулярность $\sim m^{-\frac{3}{2}}$, что, разумеется, согласуется с результатами работ [1, 8, 10, 11]. Особенность χ_2 имеет порядок $\sim \sqrt{m}$.

Эйконал s_{sc} волны, рассеянной вершиной конуса, не меньше эйконала s_0 – эйконала отражённой волны. (Это обстоятельство существенно и в плоском случае: см. формулу В. А. Боровикова (3.1), где выражение $\sqrt{k(s_{sc} - s_0)}$ – вещественно.) “Геометрооптической” отражённой волне соответствует эйконал $l - \frac{m^2}{4}$. Заметим, что правая часть равенства (5.10) известна: отражённая волна находится лучевым методом. Главный сингулярный член при $m \to 0$ левой части равенства (5.10), равен $A_0|_{m=0}\, m^{1/2}$. Приравнивая главные ($m \to 0$) члены обеих частей равенства (5.10) можно найти $A|_{m=0}$.

В случае идеальных краевых условий (Дирихле или Неймана) мы не получим ничего нового: главный член ($m \to 0$) в этом случае известен [1, 10, 11]. Здесь важно заметить следующее: правая часть в равенстве (5.10) пропорциональна коэффициенту отражения. В случае краевого условия Неймана коэффициент отражения равен единице, поэтому для получения формулы для волнового поля в сингулярном направлении в первом при $m \to 0$ приближении достаточно соответствующие формулы для краевого условия Неймана умножить на коэффициент отражения. Предполагая этот приём справедливым для импедансного или прозрачного конуса, мы придём к искомым формулам для волнового поля в этих весьма непростых случаях.

Приведём сначала формулу для волнового поля в окрестности сингулярного направления в случае краевого условия Неймана [11]. Пусть плоская волна распространяется по направлению $-\omega_0$ ($|\omega_0| = 1$). Проведём сферу единичного радиуса с центром в вершине конуса (см. начало раздела 4), вектор ω $|\omega| = 1$ характеризует направление в котором расчитывается волновое поле. Считается, что ω_0 и ω на единичной сфере соединяет ломаный "луч", составленный из двух дуг больших кругов на сфере $\smile{\omega_0 s_0}$ и $\smile{s_0\omega}$ $s_0 \in \partial N$. Угол падения (ψ) в точке s_0 равен углу отражения, θ_0 и θ_1 длины дуг $\smile{\omega_0 s_0}$ и $\smile{s_0\omega}$. Выражение для волнового поля в точке ω, r имеет вид:

$$u_N \cong \frac{\mathrm{i}\, e^{-3\pi \mathrm{i}/8} e^{\mathrm{i}\, kr} \sqrt{\cos\psi}}{4(kr)^{1/4}\sin\theta_0} \left(\frac{1}{\rho_g}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\mathrm{i}\,\frac{\beta^2}{4}} D_{-\frac{3}{2}}\left(\beta e^{-\pi\mathrm{i}/4}\right). \qquad (6.1)$$

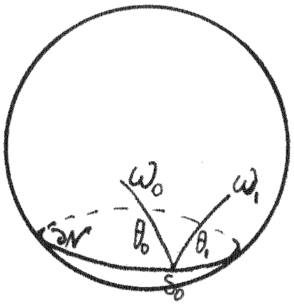

Рис. 4. Отражение луча $\omega_0 s_0 \omega$ от кривой ∂N.

Здесь $\frac{1}{\rho_g}$ – геодезическая кривизна кривой ∂N в точке s_0, $\beta = \sqrt{k}(\theta_0 + \theta_1 - \pi)$. Волновое поле в случае других краевых условий имеет вид $a_r u_N$, где a_r соответствующий коэффициент отражения. Для случая краевого условия Дирихле a_r равен -1.

Перейдём к случаям импедансного условия и контакта двух сред. В импедансном случае краевое условие запишем в традиционном виде:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n} + \mathrm{i}\, k \sin\xi u\right|_S = 0, \quad 0 < \xi \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{6.2}$$

Здесь ξ – характеризует импедансную границу, нормаль предполагается направленной внутрь области, занятой колебаниями. Пусть волна падает на импедансную поверхность под углом "скольжения" α (см. рис 5). Тогда

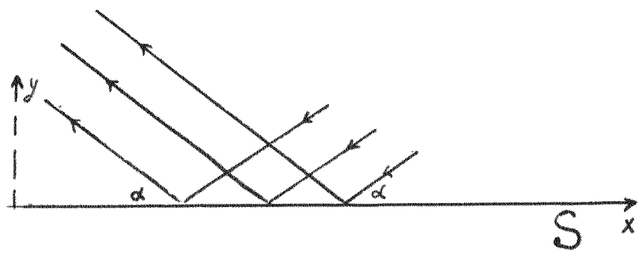

Рис. 5. Лучи падающей и отраженной волны.

$$a_r = \frac{\sin\alpha - \sin\xi}{\sin\alpha + \sin\xi}. \tag{6.3}$$

Пусть теперь S – граница раздела двух сред. В первой, где $y > 0$, содержащей лучи падающей и отражённой волн, пусть волновое число равно k, а во второй, где $y < 0$ соответственно mk, где m показатель преломления. Краевые условия на S, т.е. при $y = 0$, пусть имеют вид:

$$\left.\gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_S = \left.\gamma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_S, \quad \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0,$$

$$\zeta_1 u_1|_S = \zeta_2 u_2|_S\,, \quad \zeta_1 > 0, \zeta_2 > 0, \tag{6.4}$$

тогда:

$$a_r = \frac{\gamma_1 \sin\alpha_2 - \zeta_1\gamma_2\sqrt{m^2 - \cos^2\alpha}}{\gamma_1 \sin\alpha_2 + \zeta_1\gamma_2\sqrt{m^2 - \cos^2\alpha}}. \tag{6.5}$$

Литература

1. А. Л. Бродская, А. В. Попов, С. А. Хозиоский, *Асимптотика отражённой от конуса волны в области полутени. 6-ой Всесоюзный Симпозиум по Дифракции и Распространению Волн.* Москва-Ереван, 227–231 (1976).
2. Ф. Олвер, *Асимптотика и специальные функции.* Наука, М. (1960).
3. Ю. А. Кравцов, *Об одной модификации метода геометрической оптики.* — Изв.вузов. Радиофизика. **7**, No. 4(1964), 659–665.
4. Н. В. Цепелев, *О некоторых специальных решениях уравнения Гельмгольца.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **51**, 197–202 (1975).
5. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* ГИТТЛ. М-Л. (1951).
6. В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер, *Геометрическая теория дифракции.* Связь, М. (1978).
7. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения волн.* Советское Радио. М. (1970).
8. V. P. Smyshlyaev, *On the diffraction by cone at high frequencies.* LOMI Preprint E-9-89. Leningrad (1989) pages 47.
9. N. Bleistein, *Uniform asymptotic expansion of integrals with stationary points near algebraic singularities.* — Comm. on pure and applied math. **19**, No. 4 (1966), 353–370.
10. В. А. Боровиков, *Дифракция на многоугольниках и многогранниках.* Наука, М. (1966).
11. В. М. Бабич, Д. Б. Дементьев, Б. А. Самокиш, В. П. Смышляев. *О рассеянии плоской волны вершиной произвольного конуса. (Сингулярные направления).* — Зап.научн.семин. ПОМИ. **264** (2000), 7–21.

Babich V.M. On PC-ansatz.

The subject of the paper is detailed consideration of known from seventies ansatz:

$$e^{\mathrm{i}\,kl(x)}[AD_p(\sqrt{k}e^{-\frac{\pi}{4}}m(x))+k^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi}{4}}BD_p'(\sqrt{k}e^{-\frac{\pi}{4}}m(x))],$$

where A and B are series:

$$A=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{A_s(x)}{(\mathrm{i}\,k)^s};\quad B=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{B_s(x)}{(\mathrm{i}\,k)^s}.$$

Here D_p are parabolic cylinder functions. Analytical expressions in the first approximation for wave field in the penumbra of the wave reflected by impedance or transparent cone were obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 29 января 2004 г.