Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 308, 2004 г.

М. И. Белишев

О ГРАНИЧНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ НА ОДНОМ КЛАССЕ ГРАФОВ (НА ДЕРЕВЬЯХ)

**Посвящается Дж. Лагнезу
в связи с его 65-летием**

0. Введение

0.1. О работе.

Механический объект, приводящий к задаче, – плоский граф, состоящий из конечного числа струн переменной плотности. Граф может смещаться по нормали к плоскости; смещение его граничных вершин (граничное управление Дирихле) инициирует волну, распространяющуюся по графу. Мы изучаем вопрос, – можно ли создавать волны заданной формы, оперируя граничным управлением? В случае, когда граф является деревом (не содержит циклов), ответ оказывается положительным: мы приводим точную оценку времени, при котором отображение "управление $\mapsto$ волна" становится сюръективным (из L_2-пространства управлений на L_2-пространство на графе) и описываем конструктивную процедуру, обращающую это отображение.

0.2. Постановка и главный результат.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ есть конечный связный плоский граф с рёбрами (прямолинейными интервалами) $\{e_1, \dots, e_l\} = E$, вершинами $\{v_1, \dots, v_m\} = V$ и граничными вершинами $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} = \Gamma \subset V$. Граф оснащён плотностью ρ, – функцией, строго положительной на Ω и C^2-гладкой на рёбрах. Величина

$$d(\Omega) := \sup_{a,b \in \Omega} \min_{\pi[a,b]} \int\limits_{\pi[a,b]} \sqrt{\rho}\, |dx|$$

Работа поддержана грантом РФФИ No. 02-01-00260 и грантом EO2-1.0-172 МО РФ.

($|dx|$ – элемент длины на Ω, индуцированный $\mathbf{R}^2$-метрикой; min берётся по путям $\pi[a,b]\subset\Omega$, соединяющим a с b) есть оптический диаметр графа.

Графу сопоставляется динамическая система

$$\begin{aligned}
&\rho\, u_{tt} - u_{ee} = 0 \quad \text{в} \quad \{\Omega\setminus V\}\times(0,T);\\
&\sum_{e\sim v} u_e\,|_{x=v} = 0 \quad \text{для всех} \quad v\in V\setminus\Gamma;\\
&u\,|_{t=0} = u_t\,|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega;\\
&u = f \quad \text{на} \quad \Gamma\times[0,T],
\end{aligned}$$

где $(\,\cdot\,)_e$ – дифференцирование вдоль ребра; сумма берётся по рёбрам, инцидентным вершине v, $(\cdot)_e\,|_v$ есть производная вдоль e в направлении от v, взятая в v; $f=f(\gamma,t)$ – граничное управление; $u=u^f(x,t)$ – решение.

Главный результат работы состоит в следующем.

Теорема 1. *Если Ω является деревом, то для любых $T\geq\frac{d(\Omega)}{2}$ и $y\in L_{2,\rho}(\Omega)$ (с мерой $\rho|dx|$) найдётся управление $f\in L_2(\Gamma\times[0,T])$, при котором выполнено равенство*

$$u^f(\cdot,T)=y.$$

Другими словами, ассоциированная с деревом динамическая система, описываемая волновым уравнением, является точно управляемой при временах $\geq\frac{d(\Omega)}{2}$. Наше доказательство конструктивно: мы предлагаем процедуру, определяющую f по y.

0.3. Замечания.

Наша постановка задачи граничного управления мотивирована обратными задачами на графах (см.[2, 3]). Она отличается от традиционной постановки, состоящей в управлении полным динамическим состоянием $\{u^f(\cdot,T),u^f_t(\cdot,T)\}$.

В случае, когда *все* вершины графа доступны управлению, точная управляемость дерева установлена в [1] с помощью спектральной (частотной) техники. Не исключено, что этот подход может быть распространён и на случай граничного управления. Мы, однако, используем другую (временну́ю) технику, восходящую к А. С. Благовещенскому (см., например, [4]): как мы полагаем, она более естественна и, в отличие от спектральной, приводит к точной оценке времени управляемости.

С целью ограничить объём работы, мы опускаем некоторые детали технического характера (главным образом в п.п. 2.2–2.4). В частности, мы не доказываем результаты, отнесенные в предложения: они либо известны, либо доказываются достаточно просто.

1. Граф

Терминология.

Ребро это конечный интервал прямой линии, лежащей в плоскости $\mathbf{R}^2$:

$$e = \left\{ \operatorname{col}\{x^1, x^2\} \;\middle|\; x^i = a^i + b^i s,\;\; a^i, b^i = \mathrm{const},\; s \in (0,1) \right\};$$

вершина – точка $v \in \mathbf{R}^2$. *Граф* $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ есть дизъюнктная сумма $\Omega = E \cup V$ конечного множества рёбер $E = \{e\}$ и конечного множества вершин $V = \{v\}$, такая что Ω является замкнутым связным множеством на плоскости.

Мы говорим, что $v \in V$ и $e \in E$ *инцидентны* (и пишем $e \sim v$, $v \sim e$), если $v \in \overline{e}$ (замыкание в $\mathbf{R}^2$) и обозначаем $r(v) := \sharp\{e \in E \,|\, e \sim v\}$. Для простоты рассматриваются только графы с $r(\,\cdot\,) \neq 2$.

Множество $\Gamma := \{v \in V \,|\, r(v) = 1\}$ есть *граница* Ω; множество $\int \Omega := \Omega \setminus \Gamma$ составляют *внутренние* точки графа.

Путь $\pi[a,b] \subset \Omega$, связывающий точки $a, b \in \Omega$, есть образ отрезка [0,1] при гомеоморфизме $\varphi : [0,1] \mapsto \Omega$, таком что $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$; обозначения $\pi\,[a,b)$, $\pi\,(a,b]$, $\pi\,(a,b)$ также имеют очевидный смысл.

Граф Ω есть *дерево*, если любые $a, b \in \Omega$, $a \neq b$ соединяются единственным путём (так что в Ω отсутствуют циклы). В данной работе мы имеем дело, главным образом, с деревьями.

Дерево может быть полуупорядочено стандартным образом. Именно, пусть точка $\xi \in \Omega$ фиксирована и объявлена *корнем*; для $a, b \in \Omega$ мы пишем $a \preceq b$ ($a \prec b$), если $a \in \pi\,[\xi, b]$ ($a \in \pi\,[\xi, b)$). Разумеется, этот полупорядок определяется выбором ξ.

1.2. Оптическая метрика.

Функция ρ, определённая на $\Omega \backslash V$ называется *плотностью*, если

(i) ρ строго положительна: $\rho(\,\cdot\,) \geq \rho_0 > 0$;

(ii) на каждом ребре $e \in E$ функция $\rho|_e$ может быть продолжена на $\overline{e}$ до функции класса $C^2(\overline{e})$.

Таким образом, граничные значения $\rho(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ корректно определены, в то время как во внутренних вершинах $v \in V \setminus \Gamma$ плотность можно рассматривать как $r(v)$-значную функцию.

Пусть $|dx|^2$ есть евклидов элемент длины, индуцированный в Ω $\mathbf{R}^2$-метрикой. *Оптическая метрика* τ на графе определяется элементом
$$d\tau^2 := \rho(x)|dx|^2, \quad x \in \Omega \setminus V;$$
по свойствам ρ эта метрика эквивалентна евклидовой. Если Ω является деревом, легко имеем:
$$\tau(a,b) = \begin{cases} \int\limits_{\pi[a,b]} \sqrt{\rho}\,|dx|, & a \neq b; \\ 0, & a = b. \end{cases}$$
Мы обозначаем
$$B_r[a] := \{x \in \Omega \,\big|\, \tau(a,x) < r\};$$
величину
$$d\,(\Omega) := \sup_{a,b\,\in\,\Omega} \tau(a,b)$$
называем (оптическим) диаметром графа; число
$$T_* := \frac{d\,(\Omega)}{2}$$
– его радиус. Точка $x_* \in \Omega$, для которой выполнено $\tau(x_*, \Gamma) = T_*$, называется (оптическим) *центром* графа.

Предложение 1. *Дерево имеет единственный центр.*

1.3. Пространства и классы на графе.

Введём (вещественное) гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_{2,\rho}(\Omega)$,
$$(y,w)_{\mathcal{H}} := \int\limits_{\Omega} yw\,\rho\,|dx| = \sum_{e \in E} \int\limits_{e} yw\,\rho\,|dx|.$$
Мы относим функцию y на Ω к классу $\mathcal{H}_0^1$, если

(i) $y \in C(\Omega)$;

(ii) $y\,|_{\overline{e}}$ входит в класс Соболева $H^1(\overline{e})$ на каждом ребре e;

(iii) $y = 0$ на Γ,

и обозначаем

$$(y, w)_{\mathcal{H}_0^1} := \int\limits_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla w \, |dx| = \sum_{e \in E} \int\limits_{e} \frac{dy}{de} \frac{dw}{de} \, |dx|,$$

где ∇ есть евклидов градиент на Ω, $\frac{d}{de}$ есть дифференцирование по евклидовой длине в любом (но одном и том же для y и w) направлении вдоль e.

Введём также тройку (оснащённое гильбертово пространство)

$$\mathcal{H}_0^1 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{-1},$$

в которой $\mathcal{H}^{-1}$ есть пространство, двойственное к $\mathcal{H}_0^1$ относительно скалярного произведения $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathcal{H}}$. Как обычно, мы обозначаем через $(h, y)_{\mathcal{H}}$ значение функционала $h \in \mathcal{H}^{-1}$ на элементе $y \in \mathcal{H}_0^1$. Как известно, меры Дирака, определяемые соотношением $(\delta_\xi, y)_{\mathcal{H}} = y(\xi)$, входят в $\mathcal{H}^{-1}$.

Скажем, что функция $y \in \mathcal{H}$ входит в класс $\mathcal{K}$, если

(iv) $y \in C(\Omega)$;

(v) $y\,|_{\overline{e}} \in C^2(\overline{e})$ на каждом $e \in E$;

(vi) в каждой внутренней вершине $v \in V \setminus \Gamma$ выполняется равенство (закон Кирхгофа)

$$\sum_{e \sim v} \frac{dy}{de}(v) = 0, \tag{1}$$

в котором

$$\frac{dy}{de}(v) := \lim_{x \in e,\, x \to v} \frac{y(x) - y(v)}{|x - v|}.$$

Наконец, условимся называть функцию y *кусочно-гладкой*, если существует конечное множество точек $A_y := \{a_1, \ldots, a_N\} \supset V$, такое что для всякого открытого интервала $\omega \subset \Omega \setminus A$ сужение $y\,|_\omega$ допускает продолжение на $\overline{\omega}$ до функции класса $C^2(\overline{\omega})$.

2. Волны на графе

2.1. Динамическая система.

Говоря о динамической системе, ассоциированной с графом, мы имеем ввиду начально-краевую задачу вида

$$\rho\, u_{tt} - u_{ee} = 0 \quad \text{в} \quad \{\Omega \setminus V\} \times (0,T); \tag{2.1}$$

$$u(\,\cdot\,,t) \in \mathcal{K}, \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T]; \tag{2.2}$$

$$u\,|_{t=0} = u_t\,|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega; \tag{2.3}$$

$$u = f \quad \text{на} \quad \Gamma \times [0,T], \tag{2.4}$$

с граничным управлением (Дирихле) $f = f(\gamma,t)$; решение $u = u^f(x,t)$ описывает волну, инициированную на Γ и распространяющуюся в Ω. Напомним известный факт: в силу условий на плотность ρ, если f является C^2-гладким по t и аннулируется вблизи $t=0$, то задача имеет единственное классическое решение u^f.

Пространство управлений $\mathcal{F}^T := L_2\,(\Gamma \times [0,T])$ со скалярным произведением

$$(f,g)_{\mathcal{F}^T} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int\limits_0^T f(\gamma,t)\, g(\gamma,t)\, dt$$

называется *внешним пространством* системы (2.1)–(2.4).

Пространство $\mathcal{H}$ есть *внутреннее пространство*; волны (состояния) $u^f(\,\cdot\,,t)$ суть зависящие от времени элементы $\mathcal{H}$.

Соответствие "вход $\to$ состояние" реализуется *оператором управления* $W^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{H}$,

$$W^T f := u^f(\cdot,T),$$

определённым на управлениях, дающих классические решения системы (2.1)–(2.4).

2.2. Распространение сингулярностей.

Все результаты п.п. 2.2, 2.3 справедливы для произвольных графов (не только для деревьев).

Фундаментальное решение. Фиксируем $\gamma \in \Gamma$ и обозначим

$$\delta_\gamma(\gamma') := \begin{cases} 0, & \gamma' \neq \gamma; \\ 1, & \gamma' = \gamma. \end{cases}$$

Возьмём $\chi \in C^2[0,T]$ таким, что $\chi \geq 0$, $\operatorname{supp}\chi \subset (0,T)$ и $\int\limits_0^T \chi(t)dt = 1$. Выберем малое $\varepsilon > 0$ и обозначим

$$\chi_\varepsilon(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\chi(\dfrac{t}{\varepsilon}), & 0 \leq t \leq \varepsilon T; \\ 0, & \varepsilon T < t < T; \end{cases}$$

пусть $u^{\delta_\gamma \chi_\varepsilon}$ есть классическое решение задачи (2.1)–(2.4), отвечающее управлению $f(\gamma', t) = \delta_\gamma(\gamma')\chi_\varepsilon(t)$. Как можно показать, при стремлении $\varepsilon \to 0$ (так что χ_ε сходится к δ-функции Дирака) предельный переход приводит к функции

$$u^{\delta_\gamma \delta} := \lim_{\varepsilon \to 0} u^{\delta_\gamma \chi_\varepsilon} \in C\Big([0, T]\,;\, \mathcal{H}^{-1}\Big)$$

являющейся *фундаментальным решением* задачи (2.1)–(2.4). Это решение описывает волну, инициированную мгновенным точечным источником, локализованным в γ. В оставшейся части п. 2.2 мы обсуждаем свойства $u^{\delta_\gamma \delta}$ более подробно; все они хорошо известны.

Первое ребро. Напомним, что $\tau(a, b)$ есть оптическое расстояние между $a, b \in \Omega$. Пусть e есть ребро, инцидентное γ, и $v \in V$ – вторая вершина, инцидентная e. При временах $0 < t \leq \tau(\gamma, v)$ справедливо известное представление (временнóе ВКБ-разложение)

$$u^{\delta_\gamma \delta}(x, t) = \left[\frac{\rho(x)}{\rho(\gamma)}\right]^{-\frac{1}{4}} \delta\Big(t - \tau(x, \gamma)\Big) + u_\gamma(x, t), \qquad x \in \Omega, \tag{2.5}$$

в котором u_γ есть ограниченная функция, C^2-гладкая на $[\operatorname{supp} u_\gamma] \setminus \{(\gamma, 0)\}$ и такая, что $\operatorname{supp}\, u_\gamma(\,\cdot\,, t) \subseteq \overline{B_t[\gamma]} \subseteq \overline{e}$ (см., например, [4]). Первый член в (2.5) интерпретируется как главная сингулярность, которая движется от γ к v вдоль e с переменной скоростью $\rho^{-1/2}$: см. точку l на рис. 1a.

Прохождение через первую вершину. В момент $t = \tau(\gamma, v)$ сингулярность достигает вершины v и, затем, проходит через v. Простой анализ, использующий (2.5) и закон Кирхгофа (1.1) даёт следующее представление при временах $\tau(\gamma, v) < t \leq \tau(\gamma, v) + \varepsilon$ (с малым $\varepsilon > 0$):

$$u^{\delta_\gamma \delta}(x, t) = \alpha(x)\, \delta\Big(t - \tau(\gamma, v) - \tau(v, x)\Big) + u_\gamma(x, t), \quad x \in \Omega \tag{2.6}$$

с ограниченным u_γ, удовлетворяющим $\operatorname{supp} u_\gamma(\,\cdot\,, t) \subseteq \overline{B_t[\gamma]}$ и кусочно-гладким на $\operatorname{supp} u_\gamma(\,\cdot\,, t)$. *Амплитуда* α есть кусочно-гладкая функция, строго положительная на других рёбрах $e' \sim v$, $e' \neq e$, инцидентных v.

Добавим, что $\alpha\,|_e$ может быть отрицательной. С физической точки зрения это означает, что отражённая часть сингулярности, двигающаяся назад к γ (точка r на рис. 1b) может иметь

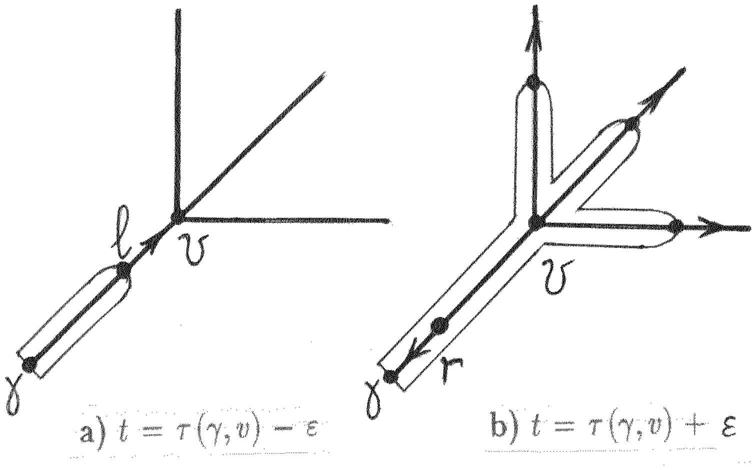

Рис. 1.

фазу, противоположную фазе падающей сингулярности (точка l на рис. 1a; в обоих случаях шар $B_t[\gamma]$ отмечен контуром).

Первое отражение от границы. Пусть $\gamma' \in \Gamma$ есть ближайшая к v граничная вершина:

$$\tau(\gamma', v) = \min_{\gamma'' \in \Gamma} \tau(\gamma'', v)$$

(возможно, $\gamma = \gamma'$). При $t \to \tau(\gamma, v) + \tau(v, \gamma') - 0$ сингулярность, прошедшая через v (и, возможно, через другие вершины или отражённая от v назад к γ), приближается к γ'. Затем сингулярность отражается от γ': см. точку r на рис. 2b. Простой анализ, использующий условие

$$u^{\delta_\gamma \delta}(\,\cdot\,, t)\,|_\Gamma = 0, \quad t > 0,$$

приводит к представлению

$$u^{\delta_\gamma \delta}(x,t) = \alpha(x)\,\delta\Big(t - \tau(\gamma, v) - \tau(v, \gamma') - \tau(\gamma', x)\Big) + u_\gamma(x,t), \quad (2.7)$$

справедливому при временах $\tau(\gamma, v) + \tau(v, \gamma') < t \le \tau(\gamma, v) + \tau(v, \gamma') + \varepsilon$ в точках x, близких к γ', с ограниченным кусочно-гладким u_γ. Если $\gamma' \neq \gamma$, то амплитуда α отрицательна; это озна-

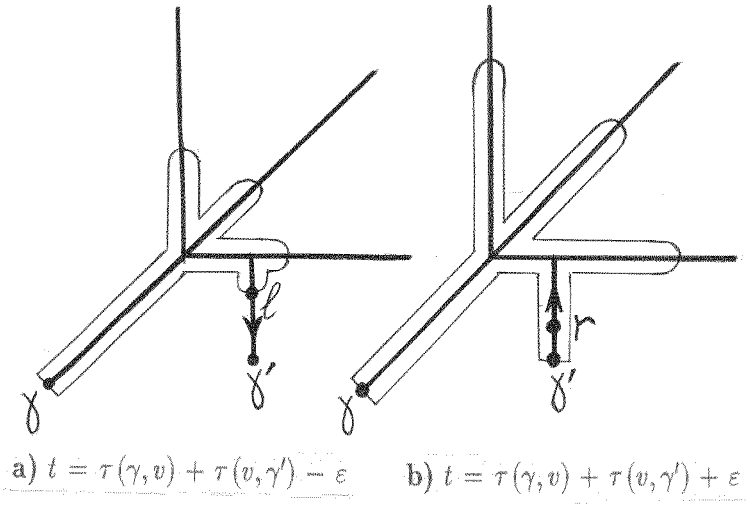

Рис. 2.

чает, что отражение от границы ведёт к инверсии фазы падающей сингулярности.

Произвольные времена. Представления (2.5)–(2.7) вполне достаточны для дальнейшего анализа распространения сингулярностей в Ω. Опуская технические детали, приведём сводку результатов.

В пространственно-временой области $\Omega \times \overline{\mathbf{R}}_+$, для фиксированной точки (x_0, t_0) определим *характеристический конус*

$$\mathcal{C}_{(x_0,t_0)} := \Big\{(x,t) \mid t - t_0 = \tau(x, x_0)\Big\};$$

для подмножества $A \subset \Omega \times \overline{\mathbf{R}}_+$ положим

$$\mathcal{C}_A := \bigcup_{(x,t)\in A} \mathcal{C}_{(x,t)}.$$

Введём также *характеристическое множество* $\mathcal{T}_{(x_0,t_0)}$, определяемое следующей рекуррентной процедурой:

Шаг 0*:* положим

$$\mathcal{T}^{[0]}_{(x_0,t_0)} := \mathcal{C}_{(x_0,t_0)}$$

и

$$\mathcal{V}^{[0]}_{(x_0,t_0)} := \{\, (x,t) \in \mathcal{T}^{[0]}_{(x_0,t_0)} \,|\, x \in V\};$$

Шаги $j=1,2,\dots$*:* положим

$$\mathcal{T}^{[j]}_{(x_0,t_0)} := \mathcal{T}^{[j-1]}_{(x_0,t_0)} \bigcup \mathcal{C}_{\mathcal{V}^{[j-1]}_{(x_0,t_0)}}$$

и

$$\mathcal{V}^{[j]}_{(x_0,t_0)} := \{\,(x,t)\in \mathcal{T}^{[j]}_{(x_0,t_0)}\,|\, x\in V\};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,;$$

определим

$$\mathcal{T}_{(x_0,t_0)} := \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{T}^{[j]}_{(x_0,t_0)}.$$

Заметим, что $\mathcal{T}_{(x_0,t_0)}$ также может быть охарактеризовано как минимальное подмножество в $\Omega\times\overline{\mathbf{R}}_+$, удовлетворяющее условиям:

(i) $\mathcal{C}_{(x_0,t_0)}\subset \mathcal{T}_{(x_0,t_0)}$;

(ii) если $v\in V$ и $t_v\in \mathbf{R}_+$ таковы, что $(v,t_v)\in\mathcal{T}_{(x_0,t_0)}$, то $\mathcal{C}_{(v,t_v)}\subset\mathcal{T}_{(x_0,t_0)}$.

Это множество имеет форму пространственно-временного графа; рис. 3 иллюстрирует случай $x_0=\gamma$, $t_0=0$.

Мы также обозначаем через

$$\mathcal{C}^s_{(x_0,t_0)} := \{x\in\Omega \mid (x,s)\in \mathcal{C}_{(x_0,t_0)}\};$$

$$\mathcal{T}^s_{(x_0,t_0)} := \{x\in\Omega \mid (x,s)\in \mathcal{T}_{(x_0,t_0)}\}$$

сечения плосостью $t=s$; отметим простое равенство

$$\mathcal{C}^s_{(x_0,t_0)} = \{x\in\Omega \mid \tau(x,x_0)=s-t_0\}.$$

Предложение 2. *Главные сингулярности решения* $u^{\delta_\gamma\delta}$ *(как пространственно-временного распределения) располагаются на характеристическом множестве* $\mathcal{T}_{(\gamma,0)}$*. При любом* $t>0$ *справедливо представление*

$$\begin{aligned} u^{\delta_\gamma\delta}(\,\cdot\,,t) = &\sum_{\xi\in\mathcal{C}^t_{(\gamma,0)}} \alpha_\gamma(\xi)\,\delta_\xi(\,\cdot\,)+\\ &+\sum_{\eta\in\mathcal{T}^t_{(\gamma,0)}\setminus\mathcal{C}^t_{(\gamma,0)}} \beta_\gamma(\eta,t)\,\delta_\eta(\,\cdot\,)+u_\gamma(\,\cdot\,,t) \quad \text{в} \quad \Omega, \end{aligned} \tag{2.8}$$

в котором:

$\delta_\xi\in\mathcal{H}^{-1}$ *суть меры Дирака;*

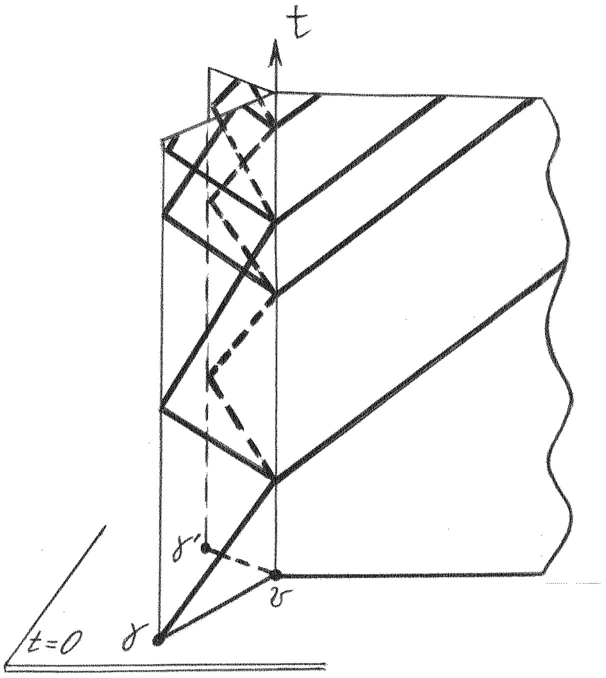

Рис. 3.

амплитудная функция α_γ строго положительна в Ω, кусочно-гладкая и C^2-гладкая вне внутренних вершин; значение $\alpha_\gamma(\xi)$ определяется плотностью $\rho\big|_{\pi[\gamma,\xi]}$;

β_γ есть кусочно-гладкая функция, определённая на $\mathcal{T}_{(\gamma,0)} \setminus \mathcal{C}_{(\gamma,0)}$;

$u_\gamma(\,\cdot\,,t)$ есть ограниченная кусочно-гладкая функция (с возможными разрывами на $\mathcal{T}^t_{(\gamma,0)}$), удовлетворяющая $\operatorname{supp} u_\gamma(\,\cdot\,,t) \subset \overline{B_t[\gamma]}$.

Первая сумма в (2.8) выделяет т.н. *передовые* сингулярности, лежащие на переднем фронте волны $u^{\delta_\gamma\delta}(\,\cdot\,,t)$, идущей от γ. Эти сингулярности присутствуют только если $t < \max\limits_{x\in\Omega}\tau(x,\gamma)$; при этом $\alpha_\gamma(\xi)$ есть амплитуда первой (по времени) сингулярности, достигающей ξ из γ в момент $t = \tau(\xi,\gamma)$.

Вторая сумма содержит *вторичные* сингулярности, появляющиеся вследствие отражений от вершин и локализованные внутри $B_t[\gamma]$.

Типичная картина представлена на Рис. 4: точки $\xi_1, \dots, \xi_5$ несут передовые сингулярности, а точки $\xi_6, \dots, \xi_9$ – вторичные (шар $B_t[\gamma]$ отмечен контуром).

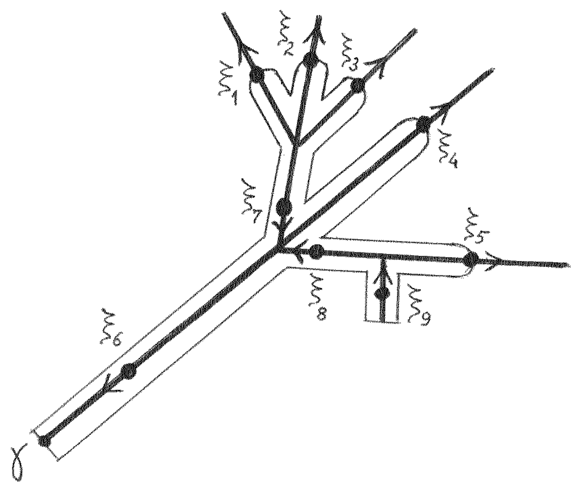

Рис. 4.

2.3. Обобщённые решения.

Здесь мы приводим некоторые свойства решений задачи (2.1)–(2.4), которые легко выводятся из представления (2.8).

Пусть
$$\mathcal{F}^T_\gamma := \Big\{ f \in \mathcal{F}^T \mid \operatorname{supp} f \subset \gamma \times [0,T] \Big\}$$
есть подпространство управлений, действующих с $\gamma \in \Gamma$; введём классы
$$(\mathcal{F}^T)^1_0 := \Big\{ f \in \mathcal{F}^T \mid f(\,\cdot\,,t) = \sum_{\gamma' \in \Gamma} \delta_{\gamma'}(\,\cdot\,) g_{\gamma'}(t), \;\; g_{\gamma'} \in H^1_0\,[0,T] \Big\}$$
(так что для управлений этого класса выполнено $f(\,\cdot\,,0) = f(\,\cdot\,,T) = 0$) и
$$(\mathcal{F}^T_\gamma)^1_0 := (\mathcal{F}^T)^1_0 \bigcap \mathcal{F}^T_\gamma\,.$$
Пусть $\mathcal{H}^1 := H^1(\Omega) \supset \mathcal{H}^1_0$ есть соболевский клас функций на Ω, удовлетворяющих условиям (i), (ii), п. 1.3.

(i) (*Формула Дюамеля*). Если f таково, что решение u^f является классическим, то справедливо представление

$$u^f(x,t) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\left[u^{\delta_\gamma\delta}(x,\,\cdot\,) * f(\gamma,\,\cdot\,)\right](\,t\,) \tag{2.9}$$

(свёртка по времени).

(ii) (*Обобщённые решения*). При любом $f \in \mathcal{F}^T$ правая часть (2.9) корректно определена и принадлежит классу $C([0,T];\mathcal{H})$; она определяет (обобщённое) решение u^f задачи (2.1)–(2.4) этого класса. Как следствие, оператор управления $W^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{H}$ является непрерывным, что является известным фактом (см., например, [1]).

(iii) (*Локализация решений*). Для управлений $f \in \mathcal{F}^T_\gamma$ имеет место включение

$$\operatorname{supp} u^f(\,\cdot\,,t) \subset \overline{B_t[\gamma]}, \quad t \geq 0.$$

(iv) (*Запаздывающие решения*). Для $f \in \mathcal{F}^T$ обозначим

$$f_{t_0}(\,\cdot\,,t) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0; \\ f(\,\cdot\,,t-t_0), & t_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Поскольку граф и его плотность не зависят от времени, имеем:

$$u^{f_{t_0}}(\,\cdot\,,t) = u^f(\,\cdot\,,t-t_0) \tag{2.10}$$

(мы полагаем $u^f\big|_{t<0} \equiv 0$.) Как следствие, если $f(\,\cdot\,,t) = 0$ при $0 \leq t \leq t_0$, то выполнено соотношение:

$$\operatorname{supp} u^f(\,\cdot\,,t) \subset \overline{B_{t-t_0}[\gamma]}, \quad t \geq 0. \tag{2.11}$$

(v) (*Гладкость*). В случае $f \in (\mathcal{F}^T)^1_0$ имеем: $u^f(\,\cdot\,,t) \in \mathcal{H}^1$ для всех $t \in [0,T]$ и $u^f(\,\cdot\,,T) \in \mathcal{H}^1_0$.

3. Управляемость

3.1. Задача граничного управления.

Здесь мы расматриваем вопрос: можно ли, оперируя граничным управлением, создавать волны желаемой формы? В точной формулировке, это вариант задачи граничного управления для системы (2.1)–(2.4) (см., например, [1]): по заданной функции $y \in \mathcal{H}$ найти управление $f \in \mathcal{F}^T$, обеспечивающее равенство

$$u^f\,(\,\cdot\,,T) = y. \tag{3.1}$$

В случае, когда Ω – дерево, теорема 1 даёт положительный ответ: при временах $T \geq T_*$ уравнение (3.1) оказывается разрешимым относительно f. Для удобства читателя, доказательство разбито на несколько частей, помещённых в п.п. 3.2–3.6 Напомним, что радиус T_* и центр x_* дерева введены в п. 1.2.

3.2. Управление f_ξ.

В последующем мы предполагаем Ω полуупорядоченным относительно корня x_* и говорим, что b лежит позади a, если $b \succ a$. С каждым $a \in \mathrm{int}\Omega$, $a \notin x_*$ мы ассоциируем поддерево

$$\Omega_a := \{x \in \Omega \mid x \succeq a\} = \{x \in \Omega \mid \tau(x, x_*) \geq \tau(a, x_*)\}$$

и обозначаем $\Gamma_a := \Omega_a \bigcap \Gamma$.

Фиксируем точку $\xi \in \Omega \setminus V$, $\xi \notin x_*$; пусть Ω_ξ есть соответствующее поддерево, а вершина $\gamma_\xi \in \Gamma_\xi$ такова, что

$$\tau(\xi, \gamma_\xi) = \max_{\gamma \in \Gamma_\xi} \tau(\xi, \gamma);$$

мы называем γ_ξ *управляющей* вершиной. Отметим простые соотношения: $\tau(\xi, \gamma_\xi) < T_*$ и $\overline{B_{\tau(\xi,\gamma_\xi)}[\gamma_\xi]} \subseteq \Omega_\xi$.

Вернёмся к системе (2.1)–(2.4) и положим $T = T_*$. В этой части доказательства мы установим, что существует (сингулярное) управление f_ξ, для которого выполнено соотношение

$$u^{f_\xi}(\,\cdot\,, T_*) = \alpha(\xi)\, \delta_\xi(\,\cdot\,) + u_\xi(\,\cdot\,) \quad \text{в} \quad \Omega \tag{3.2}$$

с кусочно-непрерывным строго положительным α и кусочно-непрерывным u_ξ, таким, что $\mathrm{supp}\, u_\xi \subset \Omega_\xi$. Управление f_ξ будет найдено в виде

$$\begin{aligned} f_\xi(\gamma, t) = \delta_{\gamma_\xi}(\gamma)\, \delta\left(t - [T_* - \tau(\xi, \gamma_\xi)]\right) + \\ + \sum_{\gamma' \in \Gamma} \delta_{\gamma'}(\gamma) \sum_{j=1}^{N(\gamma')} \kappa^j_{\gamma'}\, \delta\left(t - [T_* - t^j_{\gamma'}]\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

с коэффициентами κ^j_γ и временами t^j_γ, такими, что $t^j_\gamma < \tau(\xi, \gamma_\xi)$, т.е. в виде комбинации запаздывающих мгновенных точечных источников. Соответственно, u^{f_ξ} окажется линейной комбинацией запаздывающих фундаментальных решений.

Шаг 1 *(создание сингулярности в ξ).* Возьмём

$$f^{(0)}_\xi(\gamma, t) := \delta_{\gamma_\xi}(\gamma)\, \delta\Big(t - [T_* - \tau(\xi, \gamma_\xi)]\Big).$$

Согласно соотношению запаздывания (2.10), имеем

$$u^{f_\xi^{(0)}}(\,\cdot\,,T_*)=u^{\delta_{\gamma_\xi}\delta}(\,\cdot\,,\tau(\xi,\gamma_\xi)),$$

в то время, как (2.8) даёт представление

$$u^{f_\xi^{(0)}}(\,\cdot\,,T_*)=\alpha_{\gamma_\xi}(\xi)\,\delta_\xi(\,\cdot\,)+u_\xi^{(0)}(\,\cdot\,),\tag{3.4}$$

в котором слагаемое $u_\xi^{(0)}\in\mathcal{H}^{-1}$ удовлетворяет $\operatorname{supp}u_\xi^{(0)}\subset\overline{B_{\tau(\xi,\gamma_\xi)}[\gamma_\xi]}\subset\overline{\Omega_\xi}$ и является регулярным (не содержит мер Дирака) в окрестности точки ξ. Управление $f_\xi^{(0)}$ рассматривается в качестве нулевого приближения к требуемому f_ξ: оно создаёт нужную сингулярность в точке ξ.

Однако, в общем случае, слагаемое $\alpha_{\gamma_\xi}\delta_\xi$ в (3.4) не является единственной сингулярностью решения $u^{f_\xi^{(0)}}(\,\cdot\,,T_*)$: управление $f_\xi^{(0)}$ может создать также и другие сингулярности в Ω_ξ (см. (2.8)). В рамках поставленной цели, – обеспечить выполнение соотношения (3.2), эти дополнительные сингулярности нежелательны и должны быть устранены.

Шаг 2 (устранение ближайшей сингулярности). Детализируя $u_\xi^{(0)}$ в (3.4), можно записать:

$$u^{f_\xi^{(0)}}(\,\cdot\,,T_*)=\alpha_{\gamma_\xi}(\xi)\,\delta_\xi(\,\cdot\,)+\beta\,\delta_\eta(\,\cdot\,)+u_\xi^{(00)}(\,\cdot\,),\tag{3.5}$$

где $\eta\in\Omega_\xi$ – точка, несущая сингулярность решения $u^{f_\xi^{(0)}}(\,\cdot\,,T_*)$, ближайшую (в оптической метрике) к ξ и лежащую позади ξ, в то время как $u_\xi^{(00)}$ регулярно на $\pi[\xi,\eta]$.

Рассмотрим поддерево $\Omega_\eta\subset\Omega_\xi$, выберем его управляющую вершину γ_η и определим

$$g_\eta^{(0)}(\gamma,t):=-\frac{\beta}{\alpha_{\gamma_\eta}(\eta)}\,\delta_{\gamma_\eta}(\gamma)\,\delta\Big(t-[T_*-\tau(\eta,\gamma_\eta)]\Big).$$

В силу очевидного неравенства $\tau(\eta,\gamma_\eta)<\tau(\xi,\gamma_\xi)$, управление $g_\eta^{(0)}$ является запаздывающим по отношению к $f_\xi^{(0)}$. В соответствии с (2.8), (2.10), (2.11), такое управление создаёт волну

$$u^{g_\eta^{(0)}}(\,\cdot\,,T_*)=-\beta\,\delta_\eta(\,\cdot\,)+u_\eta^{(0)}(\,\cdot\,)\tag{3.6}$$

с $u^{(0)}_\eta$ локализованным в $\overline{\Omega_\eta}$ и регулярным вблизи η.

Обозначая
$$f^{(1)}_\xi := f^{(0)}_\xi + g^{(0)}_\eta$$
и сопоставляя (3.5) с (3.6), легко получаем:
$$u^{f^{(1)}_\xi}(\,\cdot\,, T_*) = \alpha_{\gamma_\xi}(\xi)\,\delta_\xi(\,\cdot\,) + u^{(1)}_\xi(\,\cdot\,), \tag{3.7}$$
где $u^1_\xi := u^{(00)}_\xi + u^{(0)}_\eta$ локализовано в $\overline{\Omega_\xi}$ и регулярно на $\pi[\xi, \eta]$. Таким образом, первое приближение $f^{(1)}_\xi$ сохраняет желаемую сингулярность в ξ и устраняет ненужную в η. Другими словами, нам удалось очистить от сингулярностей часть $\Omega_\xi \setminus \{\xi\}$, содержащую отрезок $\pi(\xi, \eta]$.

Шаг 3 *(расширение очищенной части).* Детализируя (3.7), имеем:
$$u^{f^{(1)}_\xi}(\,\cdot\,, T_*) = \alpha_{\gamma_\xi}(\xi)\,\delta_\xi(\,\cdot\,) + \beta'\,\delta_{\eta'}(\,\cdot\,) + u^{(11)}_\xi(\,\cdot\,),$$
где $\eta' \in \Omega_\xi$ есть точка, несущая сингулярность решения $u^{f^{(1)}_\xi}(\cdot, T_*)$, ближайшую к ξ и, очевидно, удовлетворяющая $\tau(\eta', \xi) \geq \tau(\eta, \xi)$, в то время как $u^{(11)}_\xi$ регулярно на $\pi[\xi, \eta']$. Применяя приём Шага 2 к поддереву $\Omega_{\eta'}$, удалим $\beta'\,\delta_{\eta'}$ и очистим $\pi(\xi, \eta']$ от сингулярностей.

Продолжая эту процедуру, мы на каждом шаге сохраняем член $\alpha_{\gamma_\xi}\,\delta_\xi$ и расширяем часть подграфа $\Omega_\xi \setminus \{\xi\}$, свободную от сингулярностей. В то же время, удаляя очередную сингулярность, мы создаём новые позади удаляемой. Поэтому следует проверить, что весь $\Omega_\xi \setminus \{\xi\}$ будет исчерпан по выполнении конечного числа элементарных операций, описанных в *Шагах 1–3*.

3.3. Проверка.

(i) Ближайшая сингулярность в η, упомянутая в Шаге 2, не может располагаться слишком близко к ξ; именно, справедлива оценка
$$\tau(\xi, \eta) \geq 2 \min\Big\{\tau(\xi, v_\xi), \min_{e \in E} d\,(e)\Big\}, \tag{3.8}$$
в которой $v_\xi \in \Omega_\xi \cap V$ – вершина, ближайшая к ξ (позади от ξ). Докажем это неравенство.

Начнём со случая, когда η является вторичной сингулярностью волны $u^{f^{(0)}_\xi}(\,\cdot\,, T_*)$, лежащей на том же ребре, что и ξ (см.

рис. 5а). Единственно возможный механизм, приводящий к появлению вторичной сингулярности, это отражение от концов рёбер Ω_ξ, которые либо примыкают к пути $\pi[\gamma_\xi, \xi]$, либо входят в его состав. Передовая сингулярность, инициированная в γ_ξ, движется вдоль этого пути и, проходя через вершины $v_1, v_2, \dots, v_\xi \in \pi[\gamma_\xi, \xi]$, порождает сингулярности, движущиеся вдоль упомянутых выше рёбер. Вторые концы рёбер отражают эти сингулярности; они возвращаются к вершинам $v_1, v_2, \dots, v_\xi$, проходят через них и, в конце концов, инжектируются внутрь $\pi[\gamma_\xi, \xi]$. Затем, эти сингулярности движутся к ξ вслед за передовой (см. рис. 5а: сплошной линией отмечена траектория передовой сингулярности; пунктиром указана траектория, приводящая к вторичной сингулярности в η).

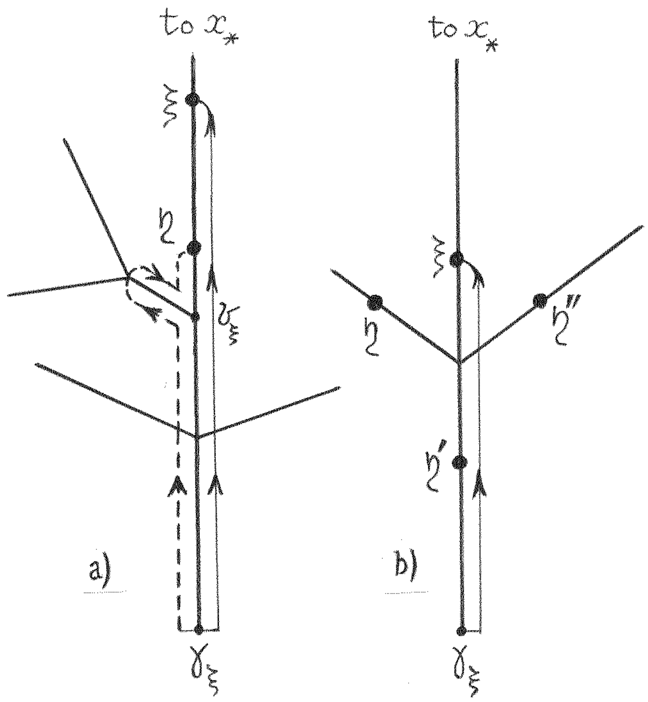

Рис. 5.

Учитывая время движения вдоль рёбер и обратно, имеем:

$$\tau(\xi,\eta) \geq 2\min\{d\,(e)\,|\,\overline{e}\cap\pi[\gamma_\xi,\xi]\,\neq\{\emptyset\}\}\geq\lambda, \tag{3.9}$$

где

$$\lambda := 2\,\min_{e\in E} d\,(e).$$

В то же время, если ξ достаточно близка к v_ξ, ближайшие сингулярности (передовые и вторичные) в $\eta, \eta', \dots$ отделены от ξ расстоянием

$$\tau(\xi,\eta) \;=\; 2\,\tau(\xi, v_\xi) \tag{3.10}$$

(см. рис .5b). Сравнивая (3.9) с (3.10), мы получаем (3.8).

(ii) Предположим, что ребро $e_\xi \ni \xi$ содержит вторичные сингулярности волны $u^{f_\xi^{(0)}}(\,\cdot\,,T_*)$ (см. рис. 5a); оценим количество элементарных операций, необходимых для их удаления (очистки e_ξ).

Напомним, что все сингулярности $u^{f_\xi^{(0)}}(\,\cdot\,,T_*)$ могут находиться только в точках сечения характеристического множества $\mathcal{T}^{T_*}_{(\gamma_\xi,T_*-\tau(\gamma_\xi,\xi))}$. Введём “плотность сингулярностей”

$$p := \max_{\substack{(\gamma,t)\in\Gamma\times[0,T_*)\\ a,b\,\in\Omega:\;\tau(a,b)=\lambda}} \sharp\left\{\mathcal{T}^{T_*}_{(\gamma,t)}\bigcap\pi\,[\,a,\,b\,]\right\},$$

и представим

$$\pi\,[\,\xi,\,v_\xi\,) = \bigcup_{j=1}^{n_\xi+1}\pi\,[\,\xi_{j-1},\,\xi_j\,),$$

где

$$\xi =: \xi_0 \prec \xi_1 \prec \dots \prec \xi_{n_\xi+1} := v_\xi; \quad \tau(\xi_{j-1},\xi_j)=\lambda, \quad j=1,\dots,$$

$$n_\xi := \mathrm{Ent}\,\frac{\tau(\xi,v_\xi)}{\lambda}$$

(Ent – целая часть), так что $\tau(\xi,v_\xi) = n_\xi\,\lambda + \tau(\xi_{n_\xi},\xi_{n_\xi+1})$ (рис. 6 соответствует $n_\xi = 3$).

Вернёмся к решению $u^{f_\xi^{(0)}}(\,\cdot\,,T_*)$; в начале процедуры очистки ситуация такова. В силу(3.8), часть $\pi\,[\,\xi_0\,,\,\xi_1\,)$ содержит единственную (передовую) сингулярность в $\xi_0=\xi$, а каждая из частей $\pi\,[\,\xi_j\,,\,\xi_{j+1}\,)$, $j=1,2,\dots,n_\xi$ может содержать не более p вторичных сингулярностей (см. η, η' на рис. 6a). Поэтому, устранение вторичных сингулярностей из $\pi\,[\,\xi_1,\,\xi_2\,)$ потребует не более p элементарных операций.

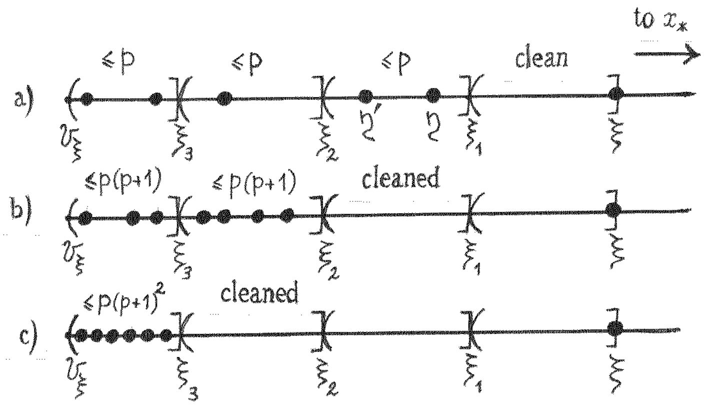

Рис. 6.

Каждая отдельная операция может привести к появлению дополнительных сингулярностей позади удаляемой, но, в силу (3.8), только в частях $\pi\,[\,\xi_2,\,\xi_3\,)$, $\pi\,[\,\xi_3,\,\xi_4),\ldots$ и не более, чем по p сингулярностей на каждой из этих частей. Поэтому, после очистки $\pi\,[\,\xi_1,\,\xi_2\,)$, картина оказывается следующей (см. рис. 6b). Каждая из частей $\pi\,[\xi_2,\,\xi_3\,)$, $\pi\,[\,\xi_3,\,\xi_4\,),\ldots$ содержит максимум $p+p\cdot p=p\,(p+1)$ сингулярностей, и для очистки $\pi\,[\,\xi_2,\,\xi_3\,)$ требуется не более $p(p+1)$ операций. Производя их, мы добавляем какое-то количество сингулярностей на части $\pi[\,\xi_3,\,\xi_4\,),\ldots$; в результате, на каждой из частей $\pi[\xi_j,\,\xi_{j+1}\,)$, $j>3$ оказывается не более чем $p(p+1)+p\cdot pp(p+1)=p\,(p+1)^2$ сингулярностей (см. рис. 6c).

Продолжая процедуру, нетрудно подсчитать, что для создания $\alpha\delta_\xi$ и очистки $\pi(\,\xi,\,v_\xi\,)$ требуется не более

$$1+p+p\,(p+1)+p\,(p+1)^2+\cdots+p\,(p+1)^{n_\xi-1}=$$

$$=1+p\,\frac{(p+1)^{n_\xi}-1}{(p+1)-1}=(p+1)^{n_\xi}$$

элементарных операций.

(iii) Вслед за e_ξ, очистке подлежат другие рёбра, инцидентные v_ξ, которые уже содержат сингулярности, образовавшиеся в процессе очистки e_ξ; и так далее, продолжая очистку оставшейся части Ω_ξ. Простой подсчёт элементарных операций даёт следующую (весьма грубую) оценку: их общее число не превосходит

$$\Big(p+1\Big)^{\mathrm{Ent}\left\{\frac{\sum\limits_{e\in E} d\,(e)}{\lambda}\right\}+1}.$$

Итак, процедура очищает $\Omega_\xi\setminus\{\xi\}$ за конечное число операций. Случаи $\xi = x_*$ и/или $\xi\in V$ могут быть рассмотрены вполне аналогично.

Этим завершается построение управления f_ξ, обеспечивающего выполнение соотношения (3.2). Приведем иллюстрацию для простого графа.

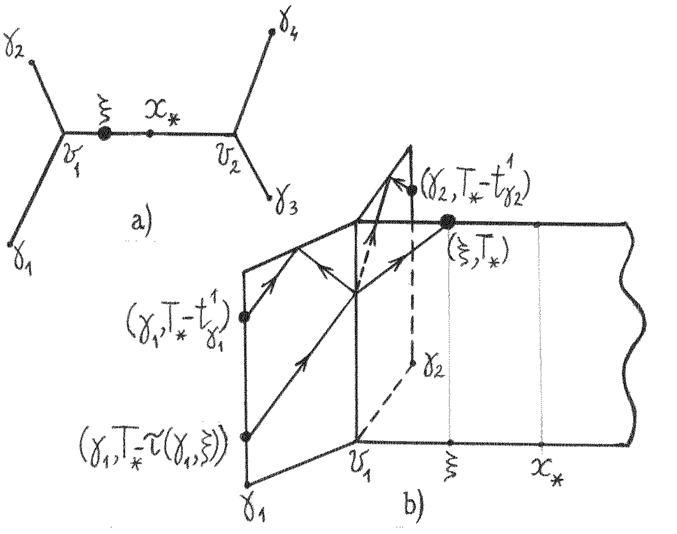

Рис. 7.

Для ξ, указанного на рис. 7a, управляющей вершиной является γ_1 и управление (3.3) имеет вид:

$$f_\xi(\gamma,t)=\delta_{\gamma_1}(\gamma)\,\delta\Big(t-[T_*-\tau(\gamma_1,\xi)]\Big)+\kappa^1_{\gamma_1}\delta_{\gamma_1}(\gamma)\,\delta\Big(t-[T_*-t^1_{\gamma_1}]\Big)+$$

$$+\kappa^1_{\gamma_2}\delta_{\gamma_2}(\gamma)\,\delta\Big(t-[T_*-t^1_{\gamma_2}]\Big).$$

Требуемая сингулярность в (ξ, T_*) создаётся передовой сингулярностью, стартующей из $(\gamma_1, T_* - \tau(\gamma_1, \xi))$. Проходя через v_1, она порождает две дополнительные сингулярности, движущиеся от v_1 к γ_1 и к γ_2. Эти (лишние) сингулярности подлежат удалению; в момент $t = T_*$ они компенсируются сингулярностями, приходящими из $(\gamma_1, T_* - t^1_{\gamma_1})$ и $(\gamma_2, T_* - t^1_{\gamma_2})$.

В заключение отметим одну особенность процедуры, описанной выше. Очистив ребро и приступая к очистке следующего, нам необходимо выбрать очередную управляющую вершину, которая может оказаться неединственной. С точностью до такого выбора, процедура является детерминированной и приводит к вполне определённому f_ξ. Тем не менее, как нетрудно видеть, в случае произвольного дерева возможны и другие варианты процедуры, решающей ту же задачу. Другими словами, в общем случае, управление f_ξ, создающее волну, которая локализована в $\overline{\Omega_\xi}$ и имеет требуемую сингулярность в ξ, не является единственным.

Отметим, что, как показывает более аккуратный анализ, добавляя регулярные поправки в правую часть (3.3), можно построить f_ξ такое, что (3.2) будет выполнено с $u_\xi \in C^k(\Omega)$ с любым заданным $k = 0, 1, \ldots$.

3.4. Зависимость от ξ.

Обратимся ещё раз к примеру на рис. 7. Величины $\tau(\gamma_1, \xi)$, $\kappa^1_{\gamma_1}$, $\kappa^1_{\gamma_2}$, $t^1_{\gamma_1}$, $t^1_{\gamma_2}$, играющие роль параметров управления f_ξ, сами зависят от ξ. Как легко видеть, они являются кусочно-гладкими функциями от $\xi \in \Omega$, гладкими вне вершин v_1, v_2, причём выполнены соотношения

$$-\frac{d\,\tau(\gamma_1, \xi)}{d\,\xi} = \left|\frac{d\,t^1_{\gamma_i}}{d\,\xi}\right| = 1,$$

в которых $\frac{d}{d\,\xi} := \frac{d}{d\,\tau(x_*, \xi)}$. Эти соотношения показывают, что отображения $\xi \mapsto \tau(\gamma_1, \xi)$, $\xi \mapsto t^1_{\gamma_i}(\xi)$ суть локальные диффеоморфизмы из Ω в $\mathbf{R}$.

Простой анализ показывает, что такая зависимость от ξ является фактом общего характера.

Предложение 3. *Вне конечного множества точек $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_q\} \subset \Omega$, включающего внутренние вершины дерева, параметры γ_ξ,*

$\tau(\gamma_\xi,\xi)$, $N_\gamma = N_\gamma(\xi)$, $\kappa^j_{\gamma_i} = \kappa^j_{\gamma_i}(\xi)$, $t^j_{\gamma_i} = t^j_{\gamma_i}(\xi)$, входящие в представление (3.3), гладко зависят от ξ. Отображения $\xi \mapsto \gamma_\xi$ из Ω в Γ и $\xi \mapsto N_\gamma(\xi)$ из Ω в $\mathbf{R}$ являются кусочно-постоянными. Функции $\tau(\gamma_\xi,\xi)$, $\kappa^j_\gamma(\xi)$, $t^j_\gamma(\xi)$ от $\xi \in \Omega$ кусочно-непрерывны на своих естественных областях определения, причём при $\xi \notin \Xi$ выполняются соотношения

$$-\frac{d\,\tau(\gamma_\xi,\xi)}{d\,\xi} = \left|\frac{d\,t^j_\gamma}{d\,\xi}\right| = 1,$$

вследствие которых $\xi \mapsto \tau(\gamma_\xi,\xi)$ и $\xi \mapsto t^j_\gamma(\xi)$ суть локальные диффеоморфизмы.

Пусть $\omega \subset \Omega$ есть достаточно малый открытый интервал, не содержащий исключительных точек $\xi_1,\dots,\xi_q$ и пусть $\gamma_\xi \equiv \tilde\gamma$, $N_\gamma(\xi) \equiv N_\gamma$ при $\xi \in \omega$, а $t^j_\gamma(\,\cdot\,) : \omega \mapsto \mathbf{R}$ суть диффеоморфизмы. Взяв $\psi \in \mathcal{H}$ такое, что $\mathrm{supp}\psi \subset \omega$, можно определить суперпозицию $\int\limits_\omega f_\xi\,\psi(\xi)\,|d\xi|$ функционалов (распределений) f_ξ, полагая

$$\left(\int\limits_\omega f_\xi\,\psi(\xi)\,|d\xi|, g\right)_{\mathcal{F}^{T_*}} := \int\limits_\omega (f_\xi, g)_{\mathcal{F}^{T_*}}\,\psi(\xi)\,|d\xi|$$

для пробных функций $g \in (\mathcal{F}^{T_*})^1_0$. С учётом предложения 3, представление (3.3) легко даёт:

$$\int\limits_\omega f_\xi(\gamma,t)\,\psi(\xi)\,|d\xi| = \delta_{\tilde\gamma}(\gamma)\,\psi\Big(\tau^{-1}(T_*-t,\tilde\gamma)\Big)+$$

$$+\sum_{\gamma'\in\Gamma}\delta_{\gamma'}(\gamma)\sum_{j=1}^{N(\gamma')} s^j_{\gamma'}\,\kappa^j_{\gamma'}\Big((t^j_{\gamma'})^{-1}(T_*-t)\Big)\,\psi\Big((t^j_{\gamma'})^{-1}(T_*-t)\Big),$$

$$(\gamma,t)\in\Gamma\times[0,T],$$

где $\tau^{-1}(\,\cdot\,,\tilde\gamma)$, $(t^j_\gamma)^{-1}$ суть функции, обратные к $\tau(\,\cdot\,,\tilde\gamma)$, t^j_γ; $s^j_\gamma = \pm 1$. Используя это явное выражение, нетрудно показать, что отображение $\psi \mapsto \int\limits_\omega f_\xi\,\psi(\xi)\,|d\xi|$ непрерывно из $L_2(\omega)$ в $\mathcal{F}^{T_*}$.

Покрывая $\Omega\setminus\Xi$ интервалами ω, мы легко придём к следующему результату. Для любого $\psi \in \mathcal{H}$ суперпозиция $\int\limits_\Omega f_\xi\,\psi(\xi)\,|d\xi|$ корректно определена как элемент $\mathcal{F}^{T_*}$, а отображение

$$Q^{T_*} : \psi \mapsto \int\limits_\Omega f_\xi\,\psi(\xi)\,|d\xi|$$

есть линейный непрерывный оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{F}^{T_*}$.

Используя этот факт, нетрудно оправдать следующую выкладку:

$$W^{T_*}Q^{T_*}\psi = W^{T_*}\int_\Omega f_\xi\,\psi(\xi)\,|d\xi| = \int_\Omega \Big[W^{T_*}f_\xi\Big]\psi(\xi)\,|d\xi| =$$

$$= \int_\Omega u^{f_\xi}(\,\cdot\,, T_*)\,\psi(\xi)\,|d\xi| = \langle\text{см. } (3.2)\rangle =$$

$$= \alpha\,\psi + \int_\Omega u_\xi(\,\cdot\,)\,\psi(\xi)\,|d\xi|. \tag{3.11}$$

3.5. Треугольность.

Во внутреннем пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим расширяющееся семейство подпространств (*цепочку*)

$$\mathcal{H}^\mu := \Big\{\, y \in \mathcal{H} \mid \operatorname{supp} y \subset \Omega \setminus B_{T_*-\mu}\,[x_*]\Big\}, \quad 0 \le \mu \le T_*,$$

так что $\mathcal{H}^0 = \{0\}$, $\mathcal{H}^{T_*} = \mathcal{H}$. Легко убедиться, что эта цепочка непрерывна:

$$P^\mu = s - \lim_{\nu\to\mu} P^{\,\nu},$$

где $P^{\,\mu}$ – (ортогональный) проекторор в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}^\mu$.

Введём интегральный оператор $V : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$,

$$(Vy)(x) := \int_\Omega u_\xi(x)\,y(\xi)\,|d\xi|, \quad x \in \Omega,$$

в котором роль ядра играет регулярное слагаемое $u_\xi(x)$ из представления (3.2). Это ядро является кусочно-гладкой функцией в $\Omega\times\Omega$; главное его свойство, которое, собственно, и мотивирует конструкцию управления f_ξ, состоит в следующем. В силу $\operatorname{supp} u_\xi \subset \Omega_\xi$, при $x \prec \xi$ имеем равенство $u_\xi(x) \equiv 0$. Поэтому интеграл, определяющий V, в действительности берётся только по пути, соединяющем x с центром дерева:

$$(Vy)(x) = \int_{\pi\,[x,x_*]} u_\xi(x)\,y(\xi)\,|d\xi|,$$

что влечёт *треугольность* оператора V относительно цепочки $\{\mathcal{H}^\mu\}$:
$$V\mathcal{H}^\mu \subset \mathcal{H}^\mu, \quad 0 \le \mu \le T_*.$$

В силу кусочной гладкости его ядра, оператор V является компактным оператором в $\mathcal{H}$. Треугольность относительно непрерывной цепочки вместе с компактностью приводят к тому, что V оказывается *вольтерровым* оператором: его спектр состоит из единственной точки $\lambda = 0$ (см. [5]).

3.6. Завершение доказательства Теоремы 1.

Ещё раз обратимся к (3.2) и введём оператор $C : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$,
$$(Cy)(x) := \int\limits_\Omega u^{f_\xi}(x, T_*)\, y(\xi)\, |d\xi| =$$
$$= \alpha(x)\, y(x) + \int\limits_\Omega u_\xi(x)\, y(\xi)\, |d\xi| = ([A + V]\, y)\,(x), \quad x \in \Omega,$$
где оператор A умножает функции на амплитуду α, отделённую от нуля. Поскольку A ограниченно обратим, а V вольтерров, оператор C оказывается ограниченно обратимым.

Сопоставляя определение C с (3.11), имеем операторное равенство
$$W^{T_*}Q^{T_*} = A + V,$$
ведущее к соотношению
$$W^{T_*}Q^{T_*}[\,A + V\,]^{-1} = \mathbf{1}.$$

Из него следует, что для заданного $y \in \mathcal{H}$ управление $f = Q^{T_*}[\,A+V\,]^{-1}y$ удовлетворяет равенству $W^{T_*}f = y$, то есть решает задачу граничного управления (3.1) за время $T = T_*$.

Так как достижимое множество $\{u^f(\,\cdot\,, T) \mid f \in \mathcal{F}^T\}$ не уменьшается с ростом T, задача разрешима при любом $T > T_*$. Теорема 1 доказана.

Добавим, что оператор $Q^{T_*}[\,A + V\,]^{-1}$, построенный в ходе доказательства, является *правым* обратным к W^{T_*}, тогда как *левого* обратного оператор управления, вообще говоря, не имеет. Соответственно, задача (3.1) разрешима (при $T \geqslant T_*$), но, вообще говоря, не единственным образом.

3.7. Комментарии.

- В терминах теории управления, теорема 1 устанавливает *точную граничную управляемость* системы (2.1)–(2.3) и даёт оценку времени управляемости $T_{\rm contr} \leq \frac{d(\Omega)}{2}$. Пример дерева, состоящего из единственного ребра, управляемого с обоих концов (с очевидным $T_{\rm contr} = \frac{d(\Omega)}{2}$) показывает, что эта оценка точна.В то же время, нетрудно привести примеры, в которых $T_{\rm contr} < \frac{d(\Omega)}{2}$.
- Наша схема легко переносится на случай более общего волнового уравнения $\rho u_{tt} - (\mu u_e)_e + qu = 0$ с переменными ρ, μ, q. Требуется лишь одно изменение – переопределить оптическую метрику как $d\tau^2 = \frac{\rho}{\mu}|dx|^2$.
- Автор признателен С. А. Иванову за полезные обсуждения и Г. Лёгерингу за любезные косультации.

Литература

1. S. A. Avdonin and S. A. Ivanov, *Families of exponentials. The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems*, — Cambridge University Press, Cambridge (1995).
2. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC-method)*, Inverse Problems **13(5)** (1997), P1–P45.
3. M. I. Belishev, *Inverse problems on a class of graphs (trees) by the BC-method*, PDMI PREPRINT–07/2003, June 23 (2003), 32 п.
4. A. S. Blagovestchenskii, *Inverse problems of wave processes*, VSP, Nitherlands (2001).
5. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и её приложения*, — Наука, М. (1967).
6. J. E. Lagnese, G. Leugering, and E. J. P. G. Schmidt, *Modeling, Analysis, and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures*, Burkhausser, Boston–Basel–Berlin (1994).
7. G. Leugering and E. Zuazua, *On exact controllability of generic trees*, (In preparation) (2003).

Belishev M. I. On boundary controllability of dynamical system gouverned by the wave equation on a class of graphs (trees).

The boundary control problem for the wave equation on a planar graph consisting of strings of variable densities with Dirichlet control at the boundary vertices is considered. The exact controllability in L_2–classes of controls and states is established in the case that the grapf is a tree; a sharp estimate of the time of controllability is given.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 26 августа 2003 г.