Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 308, 2004 г.

М. А. Лялинов

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПРОЗРАЧНОМ КРУГОВОМ КОНУСЕ

Среди канонических задач теории дифракции задачи с двумя скоростями распространения в клиновидных или конусовидных областях считаются наиболее сложными. Это является следствием того, что, с одной стороны, наличие сингулярности границы (ребра или конической точки) приводит, кроме прочего, к появлению краевых волн, порождаемых сингулярностью, а с другой стороны, сложность и разнообразие дифракционных явлений увеличивается возможностью распространения волн с двумя различными скоростями. К задачам такого сорта относятся дифракция в упругом или прозрачном клине [1, 2, 3].

В настоящей работе мы исследуем задачу дифракции плоской акустической волны на прозрачном круговом конусе. Дифракция волн в конусовидной области с идеальными граничными условиями изучалась довольно интенсивно в последнее время [4, 5, 6, 7] и эту задачу можно считать, в определенном смысле, решенной. В задаче дифракции акустических волн на импедансном конусе точного решения не удается найти даже в случае кругового конуса [8], однако, и в этой задаче наметился существенный прогресс [8, 9] в последние годы. Некоторые вопросы обоснования решения обсуждаются в работе [10].

В первом параграфе рассматривается постановка задачи и доказывается теорема единственности при освещении прозрачного конуса компактным источником. Для плоской падающей волны задаются условия излучения.

Во втором параграфе с помощью интегралов Конторовича–Лебедева задача редуцируется к решению уравнений типа Лапласа–Бельтрами на сфере с нелокальными граничными условиями по спектральной переменной. Нелокальные граничные условия определяются сингулярным интегральным оператором, ядро

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 02-02-16560.

которого является мероморфной функцией. Обсуждается аналитическое продолжение представлений интегралами Конторовича–Лебедева на вещественные значения волнового числа.

В третьем параграфе изучаются свойства сингулярного ядра и обсуждаются частные случаи задачи. Для кругового конуса решения ищется в виде разложения Фурье. Для коэффициентов Фурье выводится сингулярное интегральное уравнение.

В последнем параграфе проводится регуляризация сингулярного интегрального уравнения и обсуждается фредгольмовость регуляризованного уравнения. Заметим, что наш подход близок к использованному в [3, 13] для клиновидных областей.

§1. Постановка задачи дифракции и теорема единственности

Пусть коническая поверхность C разделяет трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ на части Ω_1 внешность и Ω_2 внутренность конуса (Рис. 1). Внутренность конической поверхности, которую считаем выпуклой, заполнена акустической средой с плотностью ρ_2 и волновым числом k_2. Области Ω_1 отвечают параметры ρ_1 и k_1.

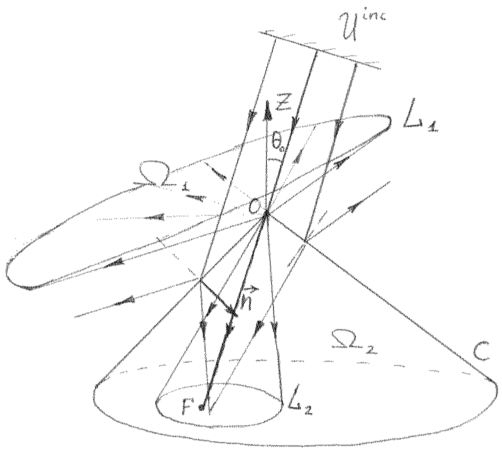

Рис. 1. Дифракция на прозрачном конусе.

Будем называть ϑ_1 ($\vartheta_1 > \pi/2$) углом раствора круговой конической поверхности угол между ее осью симметрии и образующей конуса. Вплоть до третьего параграфа мы рассматриваем произвольную гладкую выпуклую коническую поверхность C, считая, что образуемый конус не слишком узкий. Последнее требование носит технический характер и подразумевает следующее. В коническую поверхность C можно вписать конус минимального угла раствора ϑ_1 так, что $\frac{\pi}{2} < \vartheta_1 \leqslant \frac{3\pi}{4}$. Следствием этого требования является то, что внутри конуса не происходит отражений преломленных волн от границы. Это действительно так, если плоская волна целиком освещает коническую поверхность и ϑ_1 удовлетворяет вышеуказанному неравенству. Сделанные предположения приводят к некоторому техническому упрощению, в частности, при постановке условий излучения для плоской падающей волны. Лучевая картина в этом случае проще.

Рассмотрим конические поверхности L_1 и L_2, "сотканные" соответственно отраженными и преломленными лучами. Поверхность L_1 ограничивает область в Ω_1 засвеченную отраженными от конуса лучами. Во внешности поверхности L_2 в Ω_2 в каждую точку приходит ровно один преломленный луч, тогда как внутри L_2 через каждую точку проходят не менее двух преломленных лучей.

Пусть $U + U^{inc}$ волновое поле в Ω_1 является суммой падающей и рассеянной волны. Рассеянная волна V в Ω_2 появляется в результате прохождения волнового поля через границу C. Рассеянная волна $U(k_1 r, \omega, \omega_0)$ решает уравнение Гельмгольца в Ω_1

$$(\Delta + k_1^2)U = 0, \tag{1}$$

а $V(k_2 r, \omega, \omega_0)$ в Ω_2

$$(\Delta + k_2^2)V = 0, \tag{2}$$

где (r, ω) сферические координаты, связанные с осью Oz, $\omega = (\vartheta, \varphi)$, $\omega_0 = (\vartheta_0, \varphi_0)$, причем на конической поверхности C выполнены граничные условия

$$\begin{gathered} U + U^{inc}|_C = V|_C, \\ \frac{\partial (U + U^{inc})}{\partial n}\Big|_C = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial V}{\partial n}\Big|_C, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\vec{n}$ – внутренняя нормаль к C, $\varkappa = \rho_2/\rho_1$. Здесь и в дальнейшем мы предполагаем гармоническую зависимость от времени $e^{-i\hat{\omega} t}$, которую опускаем во всех формулах.

Считаем, что плотность энергии волнового поля является локально интегрируемой и, кроме того, выполнено условие Мейкснера в форме

$$\operatorname{Im}\left\{\int_{S^1_\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial n}\bar{u}ds+\frac{1}{\varkappa}\int_{S^2_\varepsilon}\frac{\partial V}{\partial n}\bar{V}ds\right\}\to 0,\quad \varepsilon\to 0,\tag{4}$$

где S^j_ε $(j=1,2)$ – часть поверхности сферы S_ε радиуса ε с центром в вершине O, лежащая в области Ω_j. Заметим, что условия (4) будут выполнены, если

$$U\sim O((k_1r)^m),$$
$$V\sim O((k_2r)^m),\quad m>-1/2\tag{5}$$

равномерно по ω.

Обратимся теперь к условиям на бесконечности. В случае освещения компактным источником в качестве таких условий можно взять условия излучения Заммерфельда, а точнее их ослабленную форму

$$\int_{S^1_R}\left|\frac{\partial U}{\partial R}-ik_1U\right|^2ds\to 0,$$
$$\int_{S^2_R}\left|\frac{\partial V}{\partial R}-ik_2V\right|^2ds\to 0,\quad R\to\infty.\tag{6}$$

Очевидно, что, если $R(\partial_RU-ik_1U)\to 0$, $R(\partial_RV-ik_2V)\to 0$, $R\to\infty$, то условия (6) выполнены.

При падении плоской волны условия (6) не подходят, и о постановке условий излучения в этом случае речь пойдет дальше.

Определим показатель преломления N, $\operatorname{Re}N>1$ отношением $k_2^2/k_1^2=N^2$. Пусть k_1 вещественно, $k_1>0$, а $\operatorname{Im}N^2>0$. В этих условиях классическое решение задачи (1)–(6), если существует, единственно.

Для доказательства введем обозначения: $u^1=U$, $u^2=V$. Умножим уравнение Гельмгольца для u^j на $\bar{u}^j$, $j=1,2$ и проинтегрируем по области $\Omega^j_{\varepsilon,R}$, где $\Omega^j_{\varepsilon,R}$ – часть области Ω_j внутри сферы S_R радиуса R и вне сферы S_ε радиуса ε, воспользуемся формулой Грина

$$\int\limits_{\Omega^j_{\varepsilon,R}} (\Delta u^j + k_j^2 u^j)\bar{u}^j\,dv = k_j^2 \int\limits_{\Omega^j_{\varepsilon,R}} |u^j|^2 dv$$
$$- \int\limits_{\Omega^j_{\varepsilon,R}} |\nabla u^j|^2 dv + \int\limits_{\partial\Omega^j_{\varepsilon,R}} \frac{\partial u^j}{\partial n_j}\bar{u}^j\,ds = 0, \qquad (7)$$

n_j – внешняя к $\Omega^j_{\varepsilon,R}$ нормаль, $\partial\Omega^j_{\varepsilon,R} = S^j_\varepsilon \cup C_{\varepsilon,R} \cup S^j_R$, $C_{\varepsilon,R}$ – часть конической поверхности между сферами S_ε и S_R. Вычислим мнимую часть равенства (7), умножим (7) при $j = 2$ на $\varkappa^{-1}$ и сложим с равенством при $j = 1$, получим

$$k_1^2 \frac{\operatorname{Im} N^2}{\varkappa} \int\limits_{\Omega^2_{\varepsilon,R}} |u^2|^2 dv + \operatorname{Im}\Bigg(\int\limits_{S^1_\varepsilon} \frac{\partial u^1}{\partial u_1}\bar{u}^1 ds$$
$$+\frac{1}{\varkappa}\int\limits_{S^2_\varepsilon} \frac{\partial u^2}{\partial n_2}\bar{u}^2 ds + \int\limits_{C_{\varepsilon,R}} \left(\frac{\partial u^1}{\partial n_1}\bar{u}^1 + \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial u^2}{\partial n_2}\bar{u}^2\right) ds$$
$$+\int\limits_{S^1_R} \frac{\partial u^1}{\partial R}\bar{u}^1 ds + \frac{1}{\varkappa}\int\limits_{S^2_R} \frac{\partial u^2}{R}\bar{u}^2 ds\Bigg) = 0.$$

Устремим $\varepsilon \to 0$, воспользуемся условиями Мейкснера (4) и граничными условиями (3), после элементарных преобразований имеем

$$-\operatorname{Im}\Bigg(\int\limits_{S^1_R} \frac{\partial u^1}{\partial R}\bar{u}^1 ds + \frac{1}{\varkappa}\int\limits_{S^2_R} \frac{\partial u^2}{\partial R}\bar{u}^2 ds\Bigg) = k_1^2 \frac{\operatorname{Im} N^2}{\varkappa} \int\limits_{\Omega^2_R} |u^2|^2 dv \geqslant 0. \qquad (8)$$

Левая часть в равенстве (8) неотрицательна, преобразуем и оценим ее следующим образом

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant & -\operatorname{Im}\Big(\int\limits_{S_R^1} \frac{\partial u^1}{\partial R}\bar u^1 ds + \frac{1}{\varkappa}\int\limits_{S_R^2} \bar u^2 ds\Big) \\
& = -\operatorname{Im}\Big\{\int\limits_{S_R^1} \big(\frac{\partial u^1}{\partial R} - ik_1 u^1\big)\bar u^1 ds + ik_1\int\limits_{S_R^1} |u^1|^2 ds \\
& \quad + \frac{1}{\varkappa}\int\limits_{S_R^2} \big(\frac{\partial u^2}{\partial R} - ik_2 u^2\big)\bar u^2 ds + \frac{ik_2}{\varkappa}\int\limits_{S_R^2} |u^2|^2 ds\Big\} \qquad (9) \\
& \leqslant \Big[\int\limits_{S_R^1} \big|\frac{\partial u^1}{\partial R} - ik_1 u^1\big|^2 ds\Big]^{1/2}\Big[\int\limits_{S_R^1} |u^1|^2 ds\Big]^{1/2} - \operatorname{Im}(ik_1)\int\limits_{S_R^1} |u^1|^2 ds \\
& + \frac{1}{\varkappa}\Big[\int\limits_{S_R^2} \big|\frac{\partial u^2}{\partial R} - ik_2 u^2\big|^2 ds\Big]^{1/2}\Big[\int\limits_{S_R^2} |u^2| ds\Big]^{1/2} - \operatorname{Im}\big(\frac{ik_2}{\varkappa}\big)\int\limits_{S_R^2} |u^2|^2 ds.
\end{aligned}
$$

Правая часть неравенства (9) неотрицательна, откуда имеем

$$
\begin{aligned}
& k_1\Big[\int\limits_{S_R^1} |u^1|^2 ds + \operatorname{Im}\big(\frac{iN}{\varkappa}\big)\int\limits_{S_R^2} |u^2|^2 ds\Big]^{1/2} \\
& \leqslant \Big[\int\limits_{S_R^1} \big|\frac{\partial u^1}{\partial R} - ik_1 u^1|^2 ds\Big]^{1/2}\Big[\frac{\int_{S_R^1} |u^1|^2 ds}{\int_{S_R^1} |u^1|^2 ds + \operatorname{Im}\big(\frac{iN}{\varkappa}\big)\int_{S_R^2} |u^2|^2 ds}\Big]^{1/2} \\
& + \frac{1}{\varkappa}\Big[\int\limits_{S_R^2} \big|\frac{\partial u^2}{\partial R} - ik_2 u^2\big|^2 ds\Big]^{1/2}\Big[\frac{\int_{S_R^2} |u^2|^2 ds}{\int_{S_R^1} |u^1|^2 ds + \operatorname{Im}\big(\frac{iN}{\varkappa}\big)\int_{S_R^2} |u^2|^2 ds}\Big]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Используя условия излучения (6), легко убедиться, что при $R \to \infty$

$$
\int\limits_{S_R^1} |u^1|^2 ds \to 0, \qquad \int\limits_{S_R^2} |u^2|^2 ds \to 0,
$$

тогда, принимая во внимание оценку (9), из равенства (8) ($R \to \infty$) заключаем $u^2 \equiv 0$. В силу граничных условий $u^1|_C = 0$, $\partial_n u^1|_C = 0$. Учитывая, что u^1 есть решение однородного эллиптического уравнения с нулевыми начальными условиями Коши, приходим к тождеству $u^1 \equiv 0$, завершая доказательство единственности.

Пусть волновое поле возбуждается точечным источником, помещенным в точку $\vec{r}_0$. Если $G(\vec{r}, \bar{r}_0)$ единственное решение краевой задачи дифракции на прозрачном конусе, то определим единственное решение при падении плоской волны как предельное

$$\begin{aligned} U(k_1 r, \omega, \omega_0) &= \lim_{r_0\to\infty} \left\{ \frac{e^{-ikr_0}}{(4\pi r_0)^{-1}} G^1(\vec{r}, \vec{r}_0) \right\}, \\ V(k_2 r, \omega, \omega_0) &= \lim_{r_0\to\infty} \left\{ \frac{e^{-ik_1 r_0}}{(4\pi r)^{-1}} G^2(\vec{r}, \vec{r}_0) \right\}, \end{aligned} \tag{10}$$

если предел существует, причем $\vec{r} = (r, \omega)$, $\vec{r}_0 = (r_0, \omega_0)$, $G = G^1$ в Ω_1, $G = G^2$ в Ω_2. Заметим, что плоская падающая волна

$$U^{inc}(k_1 r, \omega, \omega_0) = e^{-ik_1 r \cos\vartheta_i(\omega,\omega_0)}, \tag{11}$$

где $\cos\vartheta_i(\omega, \omega_0) = \cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$, $\omega_0 = (\vartheta_0, \varphi_0)$, является пределом

$$U^{inc}(k_1 r, \omega, \omega_0) = \lim_{r_0\to\infty} \left\{ \frac{e^{-ik_1 r_0}}{(4\pi r_0)^{-1}} \left(\frac{e^{ik_1|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} \right) \right\}.$$

Условия излучения при падении плоской волны, по-существу, состоят в том, что в дальнем поле присутствуют лишь уходящие волны. Для более детального описания асимптотики волнового поля рассмотрим единичную сферу S^2 с центром в вершине конуса (Рис. 2).

Пусть $\sigma = C \cap S^2$ гладкий контур на S^2, ограничивающий геодезически выпуклую область Σ. Линии $l_1 = L_1 \cap S^2$ и $l_2 = L_2 \cap S^2$ определяют так называемые сингулярные направления, где дифракционные коэффициенты сферической волны, расходящейся от вершины имеют особенность. В окрестности этих направлений волновое поле имеет переходный характер и списывается в терминах специальных функций (функции параболического цилиндра). Область $M_1 \subset S^2$ мы называем “оазисом.” Для любого направления $\omega \in M_1$ асимптотика поля описывается сферической волной

$$U(k_1 r, \omega, \omega_0) = [D_1(\omega, \omega_0) + O(1/(k_1 r))] \frac{e^{ik_1 r}}{(-ik_1 r)}, \tag{12}$$

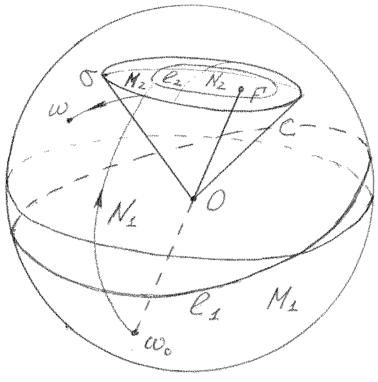

Рис. 2. Подобласти на единичной сфере, связанные с условиями излучения.

где $D_1(\omega,\omega_0)$ соответствующий дифракционный коэффициент. Для направлений $\omega \in N_1$, N_1 область на сфере между l_1 и σ, в дальнем поле выделяется сферическая волна и волна отраженная от конуса по законам геометрической оптики

$$U(k_1 r,\omega,\omega_0) = [D_1(\omega,\omega_0) + O(1/(k_1 r))]\frac{e^{ik_1 r}}{(-ik_1 r)} \\ +D_r(k_1 r,\omega,\omega_0)e^{-ik_1 r\cos\vartheta_r(\omega,\omega_0)}, \tag{13}$$

где $D_r(k_1 r,\omega,\omega_0)$ разложения по $(k_1 r)^{-1}$, а $\tau_r = -r\cos\vartheta_r(\omega,\omega_0)$ эйконал отраженной волны

$$(\nabla\tau_r)^2 = 1, \\ (\nabla_\omega\vartheta_r)^2 = 1, \\ \nabla_\omega = \vec{e}_\vartheta\partial_\vartheta + \vec{e}_\varphi\frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{14}$$

Внутри конуса C для направлений $\omega \in M_2$ в дальнем поле присутствует одна преломленная волна и волна, рассеянная вершиной,

$$V(k_2,r,\omega,\omega_0) =[D_2(\omega,\omega_0) + O(1/k_2 r)]\frac{e^{ik_2 r}}{(-ik_2 r)} \\ +D_t(k_2 r,\omega,\omega_0)e^{-ik_2 r\cos\vartheta_t(\omega,\omega_0)} + \ldots, \tag{15}$$

где $D_2(\omega, \omega_0)$ – дифракционный коэффициент, $D_t(r_2, r, \omega, \omega_0)$ разложение по $(k_2 r)^{-1}$, $\tau_t = -Nr\cos\vartheta_t(\omega, \omega_0)$ – эйконал преломленной волны,

$$\begin{aligned}(\nabla\tau_t)^2 &= N^2,\\ (\nabla_\omega\vartheta_t)^2 &= 1.\end{aligned} \tag{16}$$

В области $\omega \in N_2$, если через точку (r, ω) проходят два преломленных луча, асимптотика волнового поля имеет вид[1]

$$\begin{aligned}V(k_2, r, \omega, \omega_0) = {} & [D_2(\omega, \omega_0) + O(1/k_2 r)]\frac{e^{ik_2 r}}{(-ik_2 r)}\\ & + D_t^1(k_2 r, \omega, \omega_0)e^{-ik_2 r\cos\vartheta_t^1(\omega,\omega_0)}\\ & + D_t^2(k_2 r, \omega, \omega_0)e^{-ik_2 r\cos\vartheta_t^2(\omega,\omega_0)},\end{aligned} \tag{17}$$

т.е. в дальнем поле присутствуют две преломленные волны, приходящие от границы C и сферическая волна от вершины.

Стоит отметить следующее. Сферическая волна внутри конуса C распространяется с меньшей скоростью ($\mathrm{Re}\, N > 1$) по сравнению с такой же волной вне конуса. Поэтому внутри C существует головная волна с фронтом касательным к соответствующему сферическому фронту. Обычно эта волна имеет более высокий порядок по $(k_2 r)^{-1}$ по сравнению со сферической. Соответствующее сингулярное направление касания фронтов на Рис. 2 не показано.

Обсуждение условий излучения при падении плоской волны мы завершим постановкой начальных условий для уравнений эйконала в (14), (16). Из непрерывности волнового поля на границе имеем

$$\begin{aligned}\cos\vartheta_r(\omega, \omega_0)|_{\omega\in\sigma} &= N\cos\vartheta_t(\omega, \omega_0)|_{\omega\in\sigma},\\ \cos\vartheta_r(\omega, \omega_0)|_{\omega\in\sigma} &= \cos\vartheta_i(\omega, \omega_0)|_{\omega\in\sigma}.\end{aligned} \tag{18}$$

Пусть s естественный параметр вдоль кривой σ. Тогда из равенства $\vartheta_r|_\sigma = \vartheta_i|_\sigma$ получим

$$\cos\alpha_r = \cos\alpha_i, \quad \frac{\partial\vartheta_r|\sigma}{\partial s} = \frac{\partial\vartheta_i|\sigma}{\partial s}, \tag{19}$$

[1] Для других точек N_2 асимптотика может иметь более сложный вид.

где $\cos\alpha_i = \frac{\partial\vartheta_i|\sigma}{\partial s} = \langle\nabla_\omega\vartheta_i|_\sigma, \vec{e}_s\rangle$, $\cos\alpha_r = \frac{\partial\vartheta_r|\tau}{\partial s} = \langle\nabla_\omega\vartheta_r|_\sigma, \vec{e}_s\rangle$ $\vec{e}_s$ единичный касательный к σ вектор. Аналогично из первого равенства в (18) имеем

$$N\sin\vartheta_t\Big|_\sigma \frac{\partial\vartheta_t}{\partial s}\Big|_\sigma = \sin\vartheta_r\Big|_\sigma \frac{\partial\vartheta_r}{\partial s}\Big|_\sigma \tag{20}$$

или

$$\cos\alpha_t = \cos\alpha_i\sqrt{\frac{1-\cos^2\vartheta_i|_\sigma}{N^2-\cos^2\vartheta_i|_\sigma}}, \tag{21}$$

где $\cos\alpha_1 = \frac{\partial\vartheta_t}{\partial s}|_\sigma = \langle\nabla_\omega\vartheta_t|_\sigma, \vec{e}_s\rangle$. Равенства (18)–(21) задают начальные условия для уравнений эйконала и, фактически, определяют закон отражения-преломления на прозрачной границе. Заметим, что в "оазисе" $\vartheta_r(\omega,\omega_0) > \pi$.

§2. Интегралы Конторовича–Лебедева и редукция задачи

Для плоской падающей волны (11) справедливо представление в виде интеграла Конторовича–Лебедева [9]

$$U^{inc}(k_1 r,\omega,\omega_0) = \frac{4}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \nu\sin\pi\nu\, u_\nu^{inc}(\omega,\omega_0)\frac{K_\nu(-ik_1 r)}{\sqrt{-ik_1 r}}d\nu, \tag{22}$$

где $K_\nu(z)$ функция Макдональда,

$$K_\nu(z) = -i\frac{\pi}{2}e^{-i\pi\nu/2}H_\nu^{(2)}(-iz) = \frac{\pi(e^{i\pi\nu/2}J_{-\nu}(iz) - e^{-i\nu\pi/2}J_\nu(iz))}{\sin(\pi\nu)},$$

$-\pi < \arg(z) \leqslant \pi/2$, $J_\nu(z)$ – функция Бесселя,

$$u_\nu^{inc}(\omega,\omega_0) = -\frac{P_{\nu-1/2}(-\cos\vartheta_i(\omega,\omega_0))}{4\cos(\pi\nu)}, \tag{23}$$

$P_{\nu-1/2}^{-|n|}(\cos\vartheta)|_{n=0} =: P_{\nu-1/2}(\cos\vartheta)$ функция Лежандра. Воспользовавшись асимптотиками для $K_\nu(z)$ и $P_{\nu-1/2}(\cos\vartheta)$,

$$K_\nu(z) \cong c\nu^a\frac{\cos[\nu(\pi/2 + |\arg(z)|)]}{\sin\pi\nu}, \quad a = |\operatorname{Re}\nu| - 1/2,$$

$|\operatorname{Im}\nu| \to \infty$, z фиксировано,

$$P_{\nu-1/2}^{-|n|}(\cos\vartheta) = \frac{\sqrt{2}\Gamma(\nu-|n|+1/2)}{\sqrt{\pi\sin\vartheta}\Gamma(\nu+1)}\cos(\nu\theta - \pi|n|/2 + \pi/4)(1 + O_n(\nu^{-1})),$$

$0 < \vartheta < \pi$, $|\arg\nu| < \pi$, можно установить, что интеграл в (22) экспоненциально сходится, если

$$\vartheta_i(\omega,\omega_0) > \pi/2 + |\arg(-ik_1)|. \tag{24}$$

Предположим, что

$$|\arg(-ik_1)| \leqslant \pi/2, \quad |\arg(-ik_2)| \leqslant \pi/2. \tag{25}$$

Эти предположения позволяют использовать для вычисления решения представления интегралами вида (22).

$$U(k_1 r,\omega,\omega_0) = \frac{4}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \nu \sin\pi\nu u_\nu(\omega,\omega_0) \frac{K_\nu(-ik_1 r)}{\sqrt{-ik_1 r}} d\nu, \tag{26}$$

$$V(k_2 r,\omega,\omega_0) = \frac{4}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \nu \sin\pi\nu v_\nu(\omega,\omega_0) \frac{K_\nu(-ik_2 r)}{\sqrt{-ik_2 r}} d\nu, \tag{27}$$

где u_ν, v_ν неизвестные спектральные функции, которые должны быть выбраны из специального класса функций.

Пусть u_ν, v_ν четные по ν и мероморфные функции. Если u_ν, v_ν регулярны в окрестности мнимой оси, то представления (26), (27) удовлетворяют условию Мейкснера (5) (см. [10]), при условии, что интегралы сходятся. Потребуем, чтобы выполнялись оценки

$$|u_\nu(\omega,\omega_0| \leqslant \frac{c_1}{|\cos(\pi+e)\nu|}, \quad \omega\in M_1, \quad 0\leqslant e < \vartheta_r - \pi, \tag{28}$$

$$|u_\nu(\omega,\omega_0)| \leqslant \frac{c_2|\nu|^{-1/2}}{|\cos(\nu\vartheta_r(\omega,\omega_0))|}, \quad \omega\in N_1, \tag{29}$$

$$|v_\nu(\omega,\omega_0)| \leqslant \frac{c_3|\nu|^{-1/2}}{|\cos(\nu\vartheta_t(\omega,\omega_0))|}, \quad \omega\in M_2, \tag{30}$$

$$|v_\nu(\omega,\omega_0)| \leqslant \frac{c_4|\nu|^{-1/2}}{|\cos(\nu\vartheta_t'(\omega,\omega_0))|}, \quad \omega\in N_2, \tag{31}$$

если через точку (r,ω), $(\omega\in N_2)$ проходят два преломленных луча, $\vartheta_t'(\omega,\omega_0) = \min_{j\in\{1,2\}}\vartheta_t^j(\omega,\omega_0)$, (см. (17)). Оценки (28)–(31) обеспечивают “правильное” поведение интегралов (26), (27) при

$r \to \infty$, т.е. условия излучения (12), (13), (15), (17). С другой стороны, интегралы (26), (27) экспоненциально сходятся, если

$$\begin{aligned} \vartheta_r(\omega,\omega_0) &> \pi/2 + |\arg(-ik_1)|, \quad \omega \in N_1, \\ \vartheta_t(\omega,\omega_1) &> \frac{\pi}{2} + |\arg(-ik_2)|, \quad \omega \in M_2 \end{aligned} \tag{32}$$

соответственно. В силу предположений (25) интегральные представления верны для некоторых k_1, k_2 при условии (25) и любых ω, ω_0, удовлетворяющих (32). Заметим, что в этом случае k_1, вообще говоря, не является вещественным так, что аналитическое продолжение формул (26), (27) на вещественные значения k_1, k_2 и произвольные $\omega \in S^2$ является содержательной задачей.

Обсудим основные идеи такого продолжения (В. П. Смышляев, частное сообщение). Для определенности рассмотрим интеграл (26), r фиксировано. В условиях (32) сходимости интеграла (26) представим $K_\nu(z)$ с помощью функций Бесселя и воспользуемся четностью u_ν, после простых преобразований получим

$$U(k,r,\omega,\omega_0) = 4i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{\gamma_\Phi} \nu e^{-i\nu\pi/2} u_\nu(\omega,\omega_0)\frac{J_\nu(k_1 r)}{\sqrt{-ik_1 r}}d\nu, \tag{33}$$

где $\gamma_\Phi = (-e^{i\Phi}\infty, e^{i\Phi}\infty)$, $\Phi = \pi/2$. Воспользовавшись асимптотикой функции Бесселя и оценкой (29) убеждаемся в быстрой сходимости интеграла в условиях (32) для некоторых k_1, удовлетворяющих $|\arg(-ik_1)| \leqslant \pi/2$. Оценки показывают, что деформируя концы контура γ_Φ в область $\operatorname{Re}\nu > 0$ вплоть до значений $\Phi = 0$, $\Phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, так, чтобы контур γ_0 охватывал особенности u_ν[2] $\operatorname{Re}\nu > 0$ и уходил концами на $+\infty$ параллельно вещественной оси, можно добиться сходимости интеграла (33) для вещественных k_1 и любых фиксированных ϑ_r, $r > 0$.

Нетрудно показать связь аналитического продолжения в (33) с модифицированным интегралом Конторовича–Лебедева [11]

$$U(k_1,r,\omega,\omega_0) = \frac{4}{i\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\gamma_\Phi} d\nu e^{\varepsilon\nu^2}\nu\sin(\pi\nu)u_\nu(\omega,\omega_0)\frac{K_\nu(-ik_1 r)}{\sqrt{-ik_1 r}},$$

$\frac{\pi}{4} < \Phi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Использование такого сорта интеграла позволяет расширить стандартную область применимости преобразования.

[2] Можно показать, что все полюсы u_ν лежат в некоторой полосе, параллельной вещественной оси.

Известно, что, если u_ν, v_ν являются решениями уравнений [9]

$$(\Delta_\omega + \nu^2 - 1/4)\begin{pmatrix} u_\nu \\ v_\nu \end{pmatrix} = 0, \tag{34}$$

то, при условии сходимости интегралов, представления (26), (27) удовлетворяют уравнениям Гельмгольца (1), (2) соответственно.

Подставим выражения (22), (26), (27) в граничные условия (3)

$$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \mu\sin(\pi\mu)(u_\mu(\omega|_\sigma,\omega_0) + u_\mu^{inc}(\omega|_\sigma,\omega_0))\frac{K_\mu(-ik_1 r)}{\sqrt{-ik_1 r}}d\mu$$

$$= \int\limits_{i\infty}^{i\infty} \mu\sin(\pi\mu)v_\nu(\omega|_\sigma,\omega_0)\frac{K_\mu(-ik_2 r)}{\sqrt{-ik_2 r}}d\mu, \tag{35}$$

$$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \mu\sin(\pi\mu)\frac{\partial}{\partial N_\omega}(u_\mu(\omega,\omega_0) + u_\mu^{inc}(\omega,\omega_0))\bigg|_\sigma \frac{K_\mu(-ik_1 r)}{\sqrt{-ik_1 r}}d\mu$$

$$= \frac{1}{\varkappa}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \mu\sin\pi\nu\frac{\partial}{\partial N_\nu}v_\nu(\omega,\omega_0)\bigg|_\sigma \frac{K_\mu(-ik_2 r)}{\sqrt{-ik_2 r}}d\mu, \tag{36}$$

где ∂_{N_ω} дифференцирование по внутренней нормали к σ в касательной плоскости к S^2. Умножим левую и правую части равенств (35), (36) на $(-ik_2 r)^{\delta-1/2}K_\nu(-ik_2 r)$, проинтегрируем по r, $r\in(+0,+\infty)$, переставим порядки интегрирования (что возможно) и устремим $\delta\to 0^+$

$$\lim_{\delta\to 0+}\int\limits_{i\mathbb{R}} d\mu\,\mu\sin(\pi\mu)H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_2)v_\mu(\omega|_\sigma,\omega_0)$$

$$= \lim_{\delta\to 0+}\int\limits_{i\mathbb{R}} d\mu\,\mu\sin(\pi\mu)H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_1)(u_\nu(\omega|_\sigma,\omega_0) + u_\nu^{inc}(\omega|_\sigma,\omega_0)), \tag{37}$$

$$\lim_{\delta\to 0+}\frac{1}{\varkappa}\int\limits_{i\mathbb{R}} d\mu\,\mu\sin(\pi\mu)H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_2)\frac{\partial}{\partial N_\omega}v_\mu(\omega,\omega_0\Big|_\sigma$$
$$=\lim_{\delta\to 0+}\int\limits_{i\mathbb{R}} d\mu\,\mu\sin(\pi\mu)H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_1)\frac{\partial}{\partial N_\omega}(u_\nu(\omega,\omega_0)+u_\nu^{inc}(\omega,\omega_0))\Big|_\sigma, \tag{38}$$

где

$$H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_1)=-\frac{k_2}{(i\pi)^2}\int\limits_0^\infty dr(-ik_2r)^\delta\frac{K_\mu(-ik_1r)}{\sqrt{-ik_1r}}\frac{K_\nu(-ik_2r)}{\sqrt{-ik_2r}}. \tag{39}$$

Воспользуемся тем, что в смысле обобщенных функций (см. [9])

$$\lim_{\delta_0\to 0+}H_{\delta_0}(\nu,\mu;k_2,k_2)=\frac{1}{2}(\delta(\mu-\nu)+\delta(\mu+\nu)), \tag{40}$$

$\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, получим

$$\begin{aligned} v_\nu|_\sigma &= \mathcal{H}(u+u^{inc})|_\sigma(\nu),\\ \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v_\nu}{\partial N_\omega}\Big|_\sigma &= \mathcal{H}\left[\frac{\partial}{\partial N_\omega}(u+u^{inc})\right]\Big|_\sigma(\nu), \end{aligned} \tag{41}$$

где интегральный оператор $\mathcal{H}$ определен правой частью (37)

$$(\mathcal{H}w)(\nu)=\lim_{\delta\to 0+}\int\limits_{i\mathbb{R}} d\mu\mu\sin(\pi\mu)H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_1)w(\mu). \tag{42}$$

В дальнейшем мы покажем, что оператор $\mathcal{H}$ это сингулярный интегральный оператор с мероморфным ядром $\mu\sin(\pi\mu)$ $H_0(\nu,\mu;k_2,k_1)$.

Аналогично (41) легко вывести эквивалентные (41) нелокальные по ν граничные условия

$$(u_\nu+u_\nu^{inc})\Big|_\sigma=(\mathcal{H}^{-1}v)\Big|_\sigma(\nu),\ \frac{\partial}{\partial N_\omega}(u_0+u_\nu^{inc})\Big|_\sigma=\frac{1}{\varkappa}(\mathcal{H}^{-1}\frac{\partial}{\partial N_\omega}v)\Big|_\sigma(\nu), \tag{43}$$

где

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}^{-1}w)(\nu) &= \lim_{\delta\to 0+}\int\limits_{i\mathbb{R}} d\mu\,\mu\sin(\pi\mu)h_\delta(\nu,\mu;k_1,k_2)w(\mu),\\ h_\delta(\nu,\mu;k_1,k_2) &= -\frac{k_1}{(i\pi)^2}\int\limits_0^\infty dr(-ik_1r)^\delta\frac{K_\mu(-ik_2r)}{\sqrt{-ik_2r}}\frac{K_\nu(-ik_1r)}{\sqrt{-ik_1r}}. \end{aligned} \tag{44}$$

Полезно отметить, что

$$h_\delta(\nu,\mu;k_1,k_2)=\frac{k_1}{k_2}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^\delta H_\delta(\mu,\nu;k_2,k_1). \tag{45}$$

Второе замечание касается оператора $\mathcal{H}^{-1}$, определенного (44). Этот оператор действительно является обратным к $\mathcal{H}$. В этом легко убедиться, по крайней мере, на формальном уровне. Рассматривая равенство

$$\int\limits_{i\mathbb{R}}\mu\sin\pi\mu\frac{K_\mu(-ik_1r)}{\sqrt{-ik_1r}}X(\mu)d\mu=\int\limits_{i\mathbb{R}}\mu\sin\pi\mu\frac{K_\mu(-ik_2r)}{\sqrt{-ik_2r}}Y(\mu)d\mu, \tag{46}$$

умножив левую и правую часть на $K_\nu(-ik_2r)(-ik_2r)^{\delta-1/2}$ или на $K_\nu(-ik_1r)(-ik_1r)^{\delta-1/2}$ и проинтегрировав по r, $r\in(0,\infty)$, получим соответственно (см. (40))

$$Y(\nu)=(\mathcal{H}X)(\nu)$$

или

$$X(\nu)=(\mathcal{H}^{-1}Y)(\nu),$$

где $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^{-1}$ определены в (42) и (44). Эти формальные манипуляции можно оправдать с использованием комплексной формы преобразования Конторовича–Лебедева ([9], Приложение B). Действительно, если $p(kr)$ удовлетворяет оценке

$$|p(kr)|\leqslant c(kr)^{a-1/2}|e^{ikr\cos b}|,$$

$0<b<\pi/2$, $a>0$, $|\arg(-ik)|<\pi/2$, и аналитично в окрестности луча $r>0$, тогда справедливо прямое преобразование

$$\psi(\nu)=\frac{(-k)}{i\pi}\int\limits_0^\infty\frac{p(kr)}{\sqrt{-ikr}}\nu\sin\pi\nu K_\nu(-ikr)dr,$$

где $\psi(\nu)\sim 0\left(\frac{\nu^d\sin\pi\nu}{\cos\nu[\pi-b]}\right)$, $\nu\to i\infty$. При условии $\frac{\pi}{2}-b-|\arg(-ik)|>0$ справедливо и обратное преобразование

$$p(kr)=\frac{1}{i\pi}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\psi(\nu)\frac{K_\nu(-ikr)}{\sqrt{-ikr}}d\nu.$$

Оправдание сводится к проверке условий применимости преобразования Конторовича–Лебедева к (46).

§3. Сингулярное интегральное уравнение. Круговой конус

Краевая задача (34), (41) довольно сложна в общем случае. Однако, для круговой границы σ можно дополнительно разделить переменные ϑ и φ, представив решение в виде ряда Фурье [10]

$$
\begin{aligned}
u_\nu(\omega,\omega_0) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\varphi} R_u(\nu,n) \frac{P^{-|n|}_{\nu-1/2}(\cos\vartheta)}{d_{\vartheta_1} P^{-|n|}_{\nu-3/2}(\cos\vartheta_1)},\\
v_\nu(\omega,\omega_0) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\varphi} R_v(\nu,n) \frac{P^{-|n|}_{\nu-1/2}(-\cos\vartheta)}{d_{\vartheta_1} P^{-|n|}_{\nu-1/2}(-\cos\vartheta_1)},
\end{aligned}
\tag{47}
$$

причем известно, что ($\vartheta_0 \neq 0$)

$$
u^{inc}_\nu(\omega,\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\varphi} R^{inc}_u(\nu,n) \frac{P^{-|n|}_{\nu-1/2}(-\cos\vartheta)}{d_{\vartheta_1} P^{-|n|}_{\nu-1/2}(-\cos\vartheta_1)},
\tag{48}
$$

где ($\vartheta_1 \geqslant \vartheta > \vartheta_0$)

$$
\begin{aligned}
&R^{inc}_u(\nu,n)\\
&\qquad = \frac{i^n}{(-4\cos\pi\nu)} \frac{\Gamma(\nu+|n|+1/2}{\Gamma(\nu-|n|+1)} d_{\vartheta_1} P^{-|n|}_{\nu-1/2}(-\cos\theta_1) P^{-|n|}_{\nu-1/2}(\cos\vartheta_0),\\
&\quad d_{\vartheta_1} := \frac{d}{d\vartheta_1}.
\end{aligned}
$$

Разложения (47), (48) решают уравнения в (34). Неизвестные коэффициенты $R_{u,v}$ необходимо вычислить. Для этого подставим разложения (47), (48) в нелокальные по ν граничные условия (41) и приравняем соответствующие коэффициенты Фурье

$$
\begin{aligned}
R_v(\nu,n) Q(\nu,n) &= \mathcal{H}[P R_u + Q R^{inc}_u](\nu,n),\\
\frac{1}{\varkappa} R_v(\nu,n) &= \mathcal{H}[R_u + R^{inc}_u](\nu,n), \quad n \in \mathbb{Z},
\end{aligned}
\tag{49}
$$

где

$$
\begin{aligned}
Q(\nu,n) &= P^{-|n|}_{\nu-1/2}(-\cos\vartheta_1)/d_{\vartheta_1} P^{-|n|}_{\nu-1/2}(-\cos\vartheta_1), \quad \partial_{N_\omega} = \partial_\vartheta,\\
P(\nu,n) &= P^{-|n|}_{\nu-1/2}(\cos\vartheta_1)/d_{\vartheta_1} P^{-|n|}_{\nu-1/2}(\cos\vartheta_1).
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Исключим R_v из (49) и придем к интегральному уравнению ($\nu \in i\mathbb{R}$) для R_n

$$(Q\mathcal{H} - \varkappa^{-1}\mathcal{H}P)R_u + (Q\mathcal{H} - \varkappa^{-1}\mathcal{H}Q)R_u^{inc} = 0. \tag{51}$$

или в развернутом виде

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int\limits_{i\mathbb{R}} d\mu\mu\sin(\pi\mu)H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_1)\Big\{d(\mu,\nu)\cdot R_u(\mu,n)$$
$$+d_i(\mu,\nu)R_u^{inc}(\mu,n)\Big\} = 0, \tag{52}$$

где $d(\mu,\nu) = \varkappa^{-1}P(\mu,n) - Q(\nu,n)$, $d_i(\mu,\nu) = \varkappa^{-1}Q(\mu,n) - Q(\nu,n)$. Заметим, что если $k_1 = k_2$ в (49), то оператор $\mathcal{H} = I$ является тождественным оператором и система уравнений (49) решается явно, т.е. в этом случае задача дифракции имеет точное решение. Если же k_2/k_1 достаточно близко к единице, то решение (49) возможно в форме сходящихся рядов Неймана методом возмущений.

При исследовании уравнения (52) существенными являются свойства функции $H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_1)$ в (39). Воспользуемся связью функции $K_\mu(-ik_1r)$ с функциями Бесселя и представим их рядами по k_1r, после перестановки суммирования и интегрирования получим (см. также [3])

$$H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_1) = \frac{i}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\frac{(-ik_2)^\delta}{\sin(\pi\mu)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\Bigg\{\frac{(-ik_1/2)^{-\mu+2p}}{\Gamma(-\mu+p+1)}\times$$
$$\int\limits_0^\infty r^{-\mu+2p+\delta-1}K_\nu(-ik_2r)dr - \frac{(-ik_1/2)^{\mu+2p}}{\Gamma(\mu+p+1)}\int\limits_0^\infty r^{\mu+2p+\delta-1}K_\nu(-ik_2r)dr\Bigg\}.$$

Примем во внимание формулу из [12]

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}K_m(cx)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{c}\right)^\alpha\Gamma\Big(\frac{\alpha+m}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\alpha-m}{2}\Big),$$

$\mathrm{Re}\,\alpha > |\mathrm{Re}\,m|$, $\mathrm{Re}\,c > 0$. Применим формулу в наших условиях:

$\operatorname{Re}(\mp\mu+2p+\delta)>|\operatorname{Re}\nu|=0,\ |\arg(-ik_2)|<\pi/2,\ \operatorname{Re}(-ik_2)>0,$

$$H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_1)=\frac{i}{8\pi}\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\frac{2^\delta}{\sin\pi\mu}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\biggl(\frac{\Gamma\bigl(\frac{\nu-\mu+\delta}{2}+p\bigr)\Gamma\bigl(\frac{-\nu-\mu+\delta}{2}+p\bigr)}{\Gamma(-\mu+p+1)}$$
$$\times\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{-\mu+2p}-\frac{\Gamma\bigl(\frac{\nu+\mu+\delta}{2}+p\bigr)\Gamma\bigl(\frac{-\nu+\mu+\delta}{2}+p\bigr)}{\Gamma(\mu+p+1)}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\mu+2p}\biggr), \tag{53}$$

где мы считаем $|k_1/k_2|<1$, $\arg(k_2/k_1)=\varepsilon>0$, $\mu,\ \nu\in i\mathbb{R}$. Выражение (53) легко переписывается в терминах гипергеометрической функции $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$

$$H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_1)=\frac{i}{8\pi}\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\frac{2^\delta}{\sin\pi\mu}\biggl\{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{-\mu}\frac{\Gamma(\frac{-\nu-\mu+\delta}{2})\Gamma(\frac{-\nu+\mu+\delta}{2})}{\Gamma(-\mu+1)}$$
$$\times F\left(\frac{\nu-\mu+\delta}{2},\frac{-\nu-\mu+\delta}{2},-\mu+1;(k_1/k_2)^2\right)$$
$$-\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\mu}\frac{\Gamma(\frac{\nu+\mu+\delta}{2})\Gamma(\frac{-\nu+\mu+\delta}{2})}{\Gamma(\mu+1)}$$
$$\times F\left(\frac{\nu+\mu+\delta}{2},\frac{-\nu+\mu+\delta}{2},\mu+1;(k_1/k_2)^2\right)\biggr\}. \tag{54}$$

Гипергеометрический ряд сходится равномерно по z, $|z|\leqslant 1$, если $\operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma)>0$,

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+p)\Gamma(\beta+p)}{p!\Gamma(\gamma+p)}z^p,$$

что оправдывает равномерную сходимость рядов в (53) и (54). Функция $H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_1)$ четная по ν и по μ, мероморфная по (ν,μ) и имеет особенности вблизи мнимой оси, $\mu=\pm\nu\pm\delta$. При $\delta\to 0$ левая часть уравнения (52) представляет сингулярный интеграл, так как особенности $H_0(\nu,\mu;k_2,k_1)$ при $\mu=\pm\nu$ находятся на мнимой оси. Нетрудно показать, что

$$\lim_{\delta\to 0}+\int_{i\mathbb{R}}\mu\sin(\pi\mu)H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_1)\Psi(\mu)d\mu$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\left(\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\nu}+\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{-\nu}\right)\Psi(\nu)$$
$$+v.p.\int_{i\mathbb{R}}\mu\sin(\pi\mu)H_0(\nu,\mu;k_2,k_1)\Psi(\mu)d\mu. \tag{55}$$

Уравнение (52) принимает вид классического сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\left(\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\nu}+\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{-\nu}\right)d(\nu,\nu)R_u(\nu,n)$$
$$+v.p.\int\limits_{i\mathbb{R}}\mu\sin(\pi\mu)H_0(\nu,\mu;k_2,k_1)d(\mu,\nu)R_u(\mu,n)d\mu+S_i(\nu,n)=0, \tag{56}$$

где

$$S_i(\nu,n)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\left(\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\nu}+\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{-\nu}\right)d_i(\nu,\nu)R_u^{inc}(\nu,n)$$
$$+v.p.\int\limits_{i\mathbb{R}}\mu\sin\pi\mu H_0(\nu,\mu;k_2,k_1)d_i(\mu,\mu)R_u^{inc}(\mu,n)d\mu. \tag{57}$$

За счет четности по ν можно свести уравнение на полуось $(0,i\infty)$.

Отметим, что, если решение интегрального уравнения (56) известно, то ряд Фурье в (47) дает значение $u_\nu(\omega,\omega_0)$, тогда посредством (41) находится $v_\nu(\omega,\omega_0)$. Замечательно, что в этом случае дифракционный коэффициент в (12) легко определяется из (26)

$$D_1(\omega,\omega_0)=-2i\int\limits_{i\mathbb{R}}\nu\sin\pi\nu u_\nu(\omega,\omega_0)d\nu \tag{58}$$

в “оазисе”, $\vartheta_r(\omega,\omega_0)>\pi$, $\omega\in M_1$, и является быстро сходящимся интегралом. Мы учли в (26), что $K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}(1+O_\nu(\frac{1}{z}))$, $|z|\gg 1$, $|z|\gg|\nu|$.

§4. Регуляризация сингулярного интегрального уравнения

Мы применим процедуру так называемой левой регуляризации. Для этого обратимся к уравнению (52) и представим его в виде

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int\limits_{i\mathbb{R}}d\mu\,\mu\sin\pi\mu H_\delta(\nu,\mu;k_2,k_1)\{d(\mu,\mu)R_u(\mu,n)+d_i(\mu,\mu)R_u^{inc}(\mu,n)\}$$
$$+\int\limits_{i\mathbb{R}}d\mu\,\mu\sin\pi\mu H_0(\nu,\mu;k_2,k_1)\{(d(\mu,\nu)-d(\mu,\mu))R_u(\mu,n)$$
$$+(d_i(\mu,\nu)-d(\mu,\mu))R_u^{inc}(\mu,n)\}=0. \tag{59}$$

Во втором интеграле (59) мы перешли к пределу под знаком интеграла: подынтегральная функция является гладкой при $\mu = \nu$, $\nu \in i\mathbb{R}$.

Применим к (59) оператор $\mathcal{H}^{-1}$ из (44), получим

$$d(\mu,\mu)R_n(\mu,n) + d_i(\mu,\mu)R_n^{inc}(\mu,n) + \int\limits_{i\mathbb{R}} d\tau\, \tau \sin \pi\tau K(\mu,\tau,n) R_u(\tau,n)$$
$$+ \int\limits_{i\mathbb{R}} d\tau\, \tau \sin \pi\tau K_i(\mu,\tau,n) R_u^{inc}(\tau,n) = 0, \tag{60}$$

где

$$K(\mu,\tau,n) = \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{\delta \to)+} \int\limits_{i\mathbb{R}} \nu \sin \pi\nu h_\delta(\mu,\nu;k_1,k_2)$$
$$H_0(\nu,\tau;k_2,k_1)[d(\tau,\nu) - d(\tau,\tau)]d\nu, \tag{61}$$
$$K_i(\mu,\tau,n) = \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{i\mathbb{R}} \nu \sin \pi\nu h_\delta(\mu,\nu;k_1,k_2)$$
$$H_0(\nu,\tau;k_2,k_2)[d_i(\tau,\nu) - d_i(\tau,\tau)]d\nu.$$

При выводе уравнения (60) в третьем и четвертом слагаемом мы переставили порядки интегрирования и перешли к пределу под знаком интеграла по τ и ввели обозначения (61). Эти преобразования легко оправдать. В частности, выражения (61) показывают, что сингулярный интегральный оператор $\mathcal{H}^{-1}$ из (44) применяется к гладкой по ν функции $H_0(\nu,\tau;k_2,k_1)$ $[d(\tau,\nu) - d(\tau,\tau)]$ (или к $H_0(\nu,\tau;k_2,k_1)$ $[d_i(\tau,\nu) - d_i(\tau,\tau)]$) для любых $\tau \in i\mathbb{R}$. Можно убедиться, что ядра $K(\mu,\tau,n)$ и $K_i(\mu,\tau,n)$ являются гладкими функциями $(\tau,\mu) \in (i\mathbb{R}) \times (i\mathbb{R})$.

Особого обсуждения требует поведение ядер K, K_i и свободного члена уравнения (60) при $\tau \sim \mu \to i\infty$. Соответствующие оценки необходимы для выделения естественного класса функций, в котором решается уравнение, и для доказательства его фредгольмовости.[3] Преобразуем уравнение (60) в уравнение на отрезке $(0,1)$. Сначала, пользуясь четностью подынтегральных функций сведем интегрирование на промежуток $(0,+i\infty)$. Обозначим свободный член уравнения (60) $S_i(\nu,n)$ и запишем уравнение

[3] В данной работе мы рассматриваем фредгольмовость уравнения (60) как гипотезу, которую предполагаем доказать в последующих публикациях.

в виде

$$\cos(\pi\mu)R_u(\mu,n)$$
$$+\int\limits_0^{i\infty}\frac{2\tau\cos(\pi\mu)}{\pi d(\mu,\mu)}\cos^2(\pi\tau)K(\mu,\tau,n)R_u(\tau,n)\frac{\pi\sin(\pi\tau)}{\cos^2(\pi\tau)}d\tau$$
$$+\frac{\cos\pi\mu}{d(\mu,\mu)}S_i(\mu,n)=0,$$

введем новую неизвестную функцию

$$r(x,n)=\cos(\pi\mu)R_u(\mu,n)\big|_{x=1/\cos\pi\mu},$$

свободный член

$$r_i(x,n)=-\frac{\cos(\pi\mu)}{d(\mu,\mu)}S_i(\mu,n)\big|_{x=1/\cos(\pi\mu)},$$

и ядро

$$\mathcal{K}(x,y,n)=-\frac{2}{\pi}\frac{\tau\cos(\pi\mu)\cos(\pi\tau)}{d(\mu,\mu)}K(\mu,\tau,n)\Bigg|_{\substack{x=1/\cos\pi\mu\\ y=1/\cos\pi\tau}},$$

$d(\mu,\mu)\sim O(\mu^{-1})$, $\mu\to i\infty$. Получим интегральное уравнение второго рода на отрезке $(0,1)$. Нетрудно проверить [10], что $r_i\in L_p(0,1)$ для некоторого p, $1<p<p_*=\frac{\pi}{\pi-(\vartheta_1-\vartheta_0)}$. Уравнение принимает вид

$$r(x,n)+\int\limits_0^1\mathcal{K}(x,y,n)r(y,n)dy=r_i(x,n) \qquad (62)$$

Уравнение (62) естественно исследовать в $L_p(0,1)$ для некоторого p, $1<p<2$. В этом случае компактность интегрального оператора в (62) сводится к проверке оценки

$$\int\limits_0^h\int\limits_0^h|\mathcal{K}(x,y,n)|^p dxdy<\infty, \qquad (63)$$

для некоторого малого $h>0$. Заметим, что оценка вида (63) для $(x,y)\notin(0,h)\times(0,h)$ следует из непрерывности ядра $\mathcal{K}(x,y,n)$ вне h-окрестности точки $(0,0)$.

Получение оценок ядра вида (63) не может быть простой задачей, так как ядро $K(\mu, \tau, n)$ в (61) является интегралом типа Коши от специальных функций (гипергеометрических функций и присоединенных функций Лежандра) по бесконечному промежутку.

Другой содержательной и непростой задачей является вычисление асиптотики волнового поля вдали от конической точки, $k_{1,2}r \to \infty$. В этом случае приходится использовать иные интегральные представления для решения, такие как интегралы Зоммерфельда [9, 10]. Наконец, непосредственное вычисление дифракционных коэффициентов требует разработки соответствующих численных процедур. Эти и другие вопросы мы надеемся затронуть в последующих публикациях.

Литература

1. B. V. Budaev, *Diffraction by Wedges.* — Pitman research notes in mathematics series, **322**, Longmann, Essex, (1995).
2. J.-P. Croissille, G. Lebeau, *Diffraction by an Immersed Elastic Wedge.* — Lect. Notes Math., **1723**, Springer, (1999).
3. А. В. Осипов, *О методе интегралов Конторовича–Лебедева в задачах дифракции волн в секториальных средах.* — Проблемы дифракции и распространения волн, **25**, Изд-во СПбГУ, (1993), 173–218.
4. В. А. Боровиков, *Дифракция на многоугольниках и многогранниках.* — Наука, М. (1966).
5. V. P. Smyshlyaev, *Diffractijon by conical surfaces at high frequences.* — Wave Motion, **12(4)**, (1990), 329–339.
6. V. M. Babich, D. B. Dement'ev, B. A. Samokish, V. P. Smyshlyev, *On evaluation of the diffraction coefficients for arbitrary "non-singular" directions of a smooth convex cone.* — SIAM J. Appl. Math., **60(2)**, (2000), 536–573.
7. D. S. Jones, *Scattering by a cone.* — Q. J. Mech. Appl. Math., **50**, (1997), 499–523.
8. J.-M. L. Bernard, *Methode analytique et transformees fonctionelles pour la diffraction d'ondes par une singularite conique: equation integrale de noyau nonoscillant pour le cas d'impedance constante.* — Rapport CEA-R-5764, Editions Dist-Saclay, CEA/Saclay (1997).
9. J.-M. L. Bernard and M. A. Lyalinov, *Diffraction of scalar waves by a convex impedance cone of arbitrary cross-section.* — Wave Motion, **33**, (2001), 155–181.
10. М. А. Лялинов, *О дифракции плоской волны на импедансном конусе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **297**, Математ. вопросы теор. распростр. волн, **32**, (2003), 191–215.
11. D. S. Jones, *The Kontorovich–Lebedev transform.* — J. Inst. Maths Applics, **26**, (1980), 133–141.
12. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды.* — Специальные функции. М. (1983).

13. В. Н. Беркович, *К теории смешанных задач динамики клиновидных композитов.* — ДАН СССР, **314**, No. 1, (1990), 172–175.

Lyalinov M. A. On an integral equation in the problem of the plane wave diffraction by a circular transparent cone.

The problem of diffraction by a transparent convex cone is studied. The uniqueness theorem is proven in the problem of diffraction for the illumination by a compact source. For the circular cone the solution is obtained in the form of the Kontorovich–Lebedev integrals and of the Fourier series expansions. A singular integral equation is deduced for the Fourier coefficients and its reqularization is performed.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 18 декабря 2003 г.