Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 308, 2004 г.

С. А. Назаров

ОЦЕНКИ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ДЛЯ ТОНКИХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНОЙ

Неравенства Корна, приспособленные к тонким упругим телам, предоставляют оценки $H^1(\Omega_h)$-норм собственных векторов u^m задачи теории упругости в тонкой пластине Ω_h. При условии нормировки $\|u^m; L_2(\Omega_h)\| = 1$ мажорантой для величины $\|u^m; H^1(\Omega_h)\|$ служит выражение $ch^{-1}\Lambda_m(h)^{1/2}$, где $\Lambda_m(h)$ — собственное число, отвечающее u^m, а постоянная c не зависит ни от малой толщины $h \in (0,1]$, ни от номера $m = 1, 2, \dots$ собственного числа. Стандартные асимптотические анзацы подтверждают асимптотическую точность такой мажоранты. Отметим, что выражение $h^{-1}\Lambda_m(h)^{1/2}$ равномерно относительно $h \in (0,1]$ ограничено только внутри так называемой низкочастотной полосы спектра, на которой $\Lambda_m(h)$ обладает асимптотикой $h^2\lambda_m + \dots$ (ср. с [1]).

Неравенства Корна обычно рассматриваются как единственный инструмент для исследования свойств решений краевых задач для тонких упругих тел. В то же время почти все приложения, например, вычислительные методы и анализ устойчивости в механике разрушения, требуют либо оценивания старших производных, либо поточечную информацию о решении. Насколько известно автору, существует лишь одна статья [2], в которой получены весовые гельдеровские оценки остатков в асимптотических разложениях упругих полей в деформируемых тонких стержнях.

В п.7 рассматривается спектральная задача для скалярного уравнения второго порядка в тонком цилиндре с условиями Дирихле и Неймана, поставленными на его боковой поверхности и основаниях соответственно. Поскольку эта задача обычно рассматривается как упрощенная модель колебаний упругой пластины, вычисляется асимптотика соболевских норм первой собственной функции u^1, нормированной в $L_2(\Omega_h)$, и устанавливается, что при неизменных в продольных направлениях коэффициентах дифференциального оператора справедливо соотношение

$$\|\nabla_x^2 u^1; L_2(\Omega_h)\| = O(h^{-1}) \quad \text{при} \quad h \to +0.$$

Иными словами, $H^2(\Omega_h)$-норма функции u^1 *неограниченно возрастает.*

В статье будет доказано, что в противоположность упомянутому факту для *тонких анизотропных неоднородных пластин с переменной толщиной* подобные нормы вторых производных $\nabla_x^2 u^m$ *остаются ограниченными* при $h \to +0$ для низкочастотной полосы спектра, т.е. для малых собственных чисел. Более точно, оцениваются некоторые весовые[1] $L_2(\Omega_h)$-нормы вторых производных собственного вектора u^m и для них находятся верхние границы

$$C\{h^{-1}\Lambda_m(h)^{1/2} + \Lambda_m(h)\},$$

которые оказываются почти такими же, как и верхняя граница $c\,h^{-1}\Lambda_m(h)^{1/2}$ для $H^1(\Omega_h)$-нормы. Подчеркнем еще раз, что постоянные не зависят ни от $h \in (0,1]$, ни от $m = 1, 2, \ldots$. На средне – и высокочастотных полосах спектра мажоранта, тем не менее, неограниченно возрастает при уменьшении толщины. Весовые нормы более старших производных растут даже для низких частот.

Известно, что энергетические оценки безразличны к расположению зоны защемления вблизи кромки пластины, а именно, локальная вариация этой зоны привносит в упругую энергию возмущение такого же порядка, как и сама асимптотическая точность двумерной модели пластины (ср. с [3]). Это наблюдение оправдывает обычное упрощение формулировки трехмерной задачи за счет предположения о защемлении боковой поверхности, хотя, разумеется, подобное крепление никогда не возникает в реальных инженерных конструкциях. Имея дело с производными второго порядка, мы вынуждены более тщательно обращаться с зоной защемления. Здесь описываются пять типов защемления и конкретизируется положение введенных условий Дирихле, а также линий особенностей границы и смены краевых условий вблизи

[1] Весовые множители в нормах отражают особенности решений и представляют собой степени расстояний от нерегулярностей на кусочно гладкой границе и от линий смены типа кревых условий в смешанной краевой задаче.

кромки пластины. Так как решение упругой задачи имеет сингулярное поведение около этих линий, используются весовые классы Кондратьева (см. [4], а также [5, 6] и др.).

1. Формулировка спектральной задачи. Пусть ω — плоская область, ограниченная простым замкнутым контуром $\partial\omega$ класса C^3, а $H_\pm$ — такие функции в $C^3(\overline{\omega})$, что сумма $H = H_+ + H_-$ положительна на замыкании $\overline{\omega} = \omega \cup \partial\omega$ области ω. Трехмерная тонкая пластина задается формулой

$$\Omega_h = \left\{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : x' = (x_1, x_2) \in \omega, -hH_-(x') < x_3 < hH_+(x')\right\}, \tag{1}$$

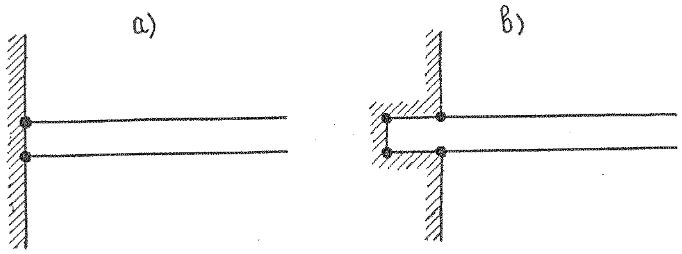
в которой $h \in (0,1]$ — малый параметр. Введем естественные криволинейные координаты (ν, τ) в окрестности $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ контура $\partial\omega$; здесь τ обозначает длину дуги на $\partial\omega$ и $|\nu|$ — расстояние от $\partial\omega$, причем $\nu > 0$ внутри $\omega \cap \mathcal{V}$. Для определения области защемления Γ_h^D на поверхности $\partial\Omega_h$, выберем некоторые из следующих множеств: боковая поверхность

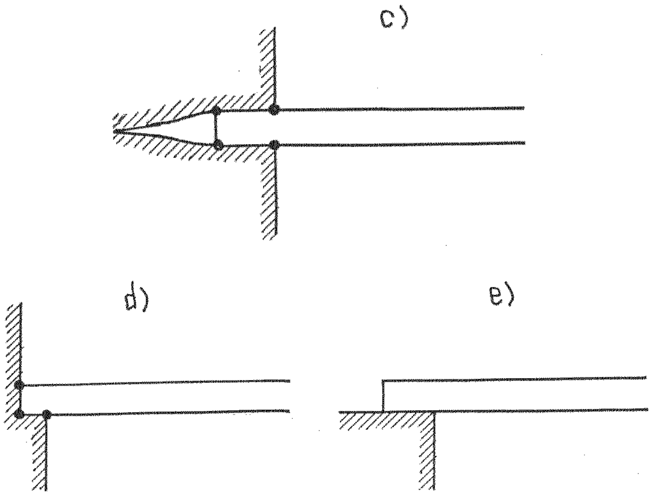
$$\Gamma_h^0 = \{x : x' \in \partial\omega, -hH_-(x') < x_3 < hH_+(x')\}$$

и тонкие пограничные полоски

$$\Gamma_h^\pm = \left\{x \in \Sigma_h^\pm : \nu < hd^\pm(\tau)\right\}$$

на основаниях $\Sigma_H^\pm = \{x : x' \in \omega, x_3 = \pm hH_\pm(x')\}$; здесь $d^\pm \in C^3(\partial\omega)$ — положительные функции. Теперь возьмем в качестве $\Gamma_h^D \neq \emptyset$ объединение отобранных множеств и предположим, что поверхность $\Gamma_h^N = \partial\omega_h \setminus \overline{\Gamma_h^D}$ свободна от напряжений. В принципе, возможен один из следующих типов защемления:





a). Идеализированное защемление. b). Паз. c). Реальное защемление.
d). Подложка. e). Нахлест.

В п.4 имеем дело со случаями a)–d) и обсуждаем e) в п.7.

В рамках линеаризованной теории упругости рассмотрим в Ω_h спектральную задачу со смешанными краевыми условиями

$$\begin{gathered} L(h,x,\nabla_x)u(h,x) = \Lambda(h)\gamma(h,x)u(h,x), \quad x \in \Omega_h, \\ N(h,x,\nabla_x)u(h,x) = 0, \quad x \in \Gamma_h^N, \\ u(h,x) = 0, \quad x \in \Gamma_h^D. \end{gathered} \tag{2}$$

При этом $\Lambda(h)$ и $u(h,\cdot)$ — собственное число (квадрат собственной частоты) и соответствующий собственный вектор (собственная мода колебаний). Кроме того, L и N — 3×3-матрицы дифференциальных операторов, определенные следующим образом:

$$Lu = \Big(-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}\Big)_{i=1}^{3}, \quad Nu = \Big(\sum_{j=1}^{3} n_j\sigma_{ij}\Big)_{i=1}^{3};$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{p,q=1}^{3} a_{ij}^{pq}\varepsilon_{pq}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{3}$$

Здесь (σ_{ij}) и (ε_{ij}) — тензоры напряжений и деформаций, $u = (u_1,u_2,u_3)$ — вектор смещений, а $n = (n_1,n_2,n_3)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхностям $\Sigma_h^{\pm}$ и Γ_h^0. Предполагаем, что упругие модули a_{ij}^{pq} и плотность $\gamma > 0$ зависят от продольных переменных x' и растянутой поперечной переменной $\zeta = h^{-1}x_3$. Другими словами, $a_{ij}^{pq} \in C^1(\overline{\Omega}_1)$ и $\gamma \in C(\overline{\Omega}_1)$, причем Ω_1 — множество (1) при $h = 1$. Как обычно, требуются следующие свойства симметрии и положительности тензора (a_{ij}^{pq}):

$$a_{ij}^{pq}(x',\zeta) = a_{pq}^{ij}(x',\zeta) = a_{ji}^{pq}(x',\zeta),$$

$$c_a \sum_{i,j=1}^{3} |\xi_{ij}|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{p,q=1}^{3} a_{ij}^{pq}(x',\zeta)\xi_{ij}\xi_{pq} \leqslant C_a \sum_{i,j=1}^{3} |\xi_{ij}|^2. \qquad (4)$$

При этом c_a и C_a — положительные постоянные, не зависящие от параметра $h \in (0,1]$ и точки $x \in \overline{\Omega}_h$, а $\xi = (\xi_{ij})$ — симметрическая 3×3-матрица. Эти свойства означают, что собственные числа задачи (2) формируют последовательность

$$0 < \Lambda_1(h) \leqslant \Lambda_2(h) \leqslant \cdots \leqslant \Lambda_m(h) \leqslant \cdots \to +\infty. \qquad (5)$$

Кроме того, соответствующие собственные векторы $u^m(h,\cdot)$ можно выбрать так, чтобы выполнялись условия ортогональности и нормировки

$$(u^m, u^n)_{\Omega_h} = \delta_{m,n}, \qquad m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}, \qquad (6)$$

где $(\ ,\ )_{\Xi}$ — скалярное произведение в пространстве $L^2(\Xi)$, скалярном или векторном.

2. Асимптотические свойства спектра. В [1] для изотропных однородных цилиндрических пластин и в [3, 7, 8] для анизотропных неоднородных пластин с переменной толщиной было установлено, что для $m \in \mathbb{N}$

$$h^{-2}\Lambda_m(h) \to \lambda_m \quad \text{при} \quad h \to +0, \qquad (7)$$

а последовательность "предельных" собственных чисел

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m \leqslant \cdots \to +\infty \qquad (8)$$

относится к двумерной модели пластины, именно, к модели Кирхгофа в [1] и к общей связанной модели в [3, 7, 8]. Кроме того, метод, развитый в [3; гл. 7] и [8], устанавливает следующую оценку скорости сходимости в (7) :

$$|\Lambda_m(h) - h^2\lambda_m| \leqslant \mathbf{c}\varkappa_p h^{5/2}(\lambda_m)^{5/4}. \qquad (9)$$

Множитель $\mathbf{c}$ оказывается общим для всех номеров $m \in \mathbb{N}$ только при ограничительном требовании

$$h \leqslant \mathbf{h}(\lambda_m)^{-1}\varkappa_m^{-2}(1+\alpha_m^{-1})^{-1}, \tag{10}$$

где величина $\mathbf{h} > 0$ не зависит ни от $h \in (0,1]$, ни от $m \in \mathbb{N}$; $\varkappa_m$ обозначает кратность собственного числа λ_m, т.е.

$$\lambda_{M-\varkappa_m-1} < \lambda_{M-\varkappa_m} = \cdots = \lambda_{M-1} < \lambda_M, \tag{11}$$

причем $m \in [M-\varkappa_q, M-1]$. Наконец, величина α_m в (10) отражает положение собственного числа λ_m по отношению к соседям $\lambda_{M-\varkappa_m-1}$ и λ_M,

$$\alpha_m = \min\left\{\frac{\lambda_m}{\lambda_{M-\varkappa_m-1}} - 1, 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_M}\right\}.$$

3. Весовые анизотропные неравенства Корна. Пусть пара $\{\Lambda_m(h), u^m(h,\cdot)\}$ — решение задачи (2), и собственный векор u^m удовлетворяет условию нормировки (6). Умножим систему (2) на u^m, проинтегрируем по частям в Ω_h и получим равенство

$$2E(u^m;\Omega_h) = \Lambda_m(h) \tag{12}$$

с функционалом упругой энергии

$$E(u;\Omega_h) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_h} \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dx \tag{13}$$

(ср. с (3)). В силу определений (4) и (13) имеем

$$\sum_{i,j=1}^{3} \left\| \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right); L_2(\Omega_h)\right\|^2 =: \mathcal{E}(u;\Omega_h) \leqslant 2c_a^{-1}E(u;\Omega_h). \tag{14}$$

Ввиду различных типов защемления воспользуемся результатами [2; гл. 3], относящимися к весовым анизотропным неравенствам Корна — анизотропное распределение степеней параметра h появилось впервые в работе [9], а весовые множители $\rho_h(x) = h + \operatorname{dist}\{x', \partial\omega\}$ были привлечены в работах [10, 11].

Лемма 1. *Если $u \in H^1(\Omega_h)^3$ удовлетворяет условиям Дирихле $(2)_3$, то выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_h} \left\{ \sum_{p=1}^{2} \left[\sum_{q=1}^{2} \left| \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \right|^2 + h^2 \rho_h^{-2} \left(\left| \frac{\partial u_p}{\partial x_3} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_p} \right|^2 \right) + \rho_h^{-2} |u_p|^2 \right] + \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right|^2 + h^2 \rho_h^{-4} |u_3|^2 \right\} dx \leqslant c\mathcal{E}(u;\Omega_h) \quad (15)$$

с постоянной c, не зависящей от параметра $h \in (0,1]$ и от вектор-функции u.

Так как $\rho_h(x) \leqslant \mathrm{const}$ при $x \in \Omega_h$, устранение весов в лемме 1 приводит еще к одному утверждению.

Следствие 2. *Для того же векторного поля u, что и в лемме 1, выполняется неравенство*

$$||u; H^1(\Omega_h)||^2 \leqslant ch^{-2} E(u;\Omega_h), \quad (16)$$

причем постоянная c не зависит от параметра $h \in (0,1]$ и от вектор-функции u.

Формулы (16), (12) и (6) приводят к оценке

$$||u^m; H^1(\Omega_h)||^2 \leqslant ch^{-2} \Lambda_m(h), \quad (17)$$

в которой c не зависит ни от $h \in (0,1]$, ни от $m \in \mathbb{N}$. Подчеркнем, что в силу (7) мажоранта в (17) приобретает порядок $h^0 = 1$ внутри низкочастотной полосы. Наша ближайшая цель — вывести аналогичные оценки для вторых производных вектор-функции.

4. Оценки вблизи кромки пластины. Помимо двух *сингулярных* кривых $\Upsilon_h^{\pm} = \{x : x' \in \partial\omega, x_3 = \pm h H_{\pm}(x')\}$ собственные векторы могут иметь особенности на кривых смены типа краевых условий (на них встречаются условия Дирихле $(2)_3$ и условия Неймана $(2)_2$). Обрабатывая зон защемления типов a)–d) (см. рис.), образуем сингулярное множество Υ_h из дуг, отмеченных символом $\bullet$. Введем весовую функцию

$$R(h,x) = \min\{1, h^{-1}\,\mathrm{dist}(x, \Upsilon_h)\} \quad (18)$$

и определим пространство $V_\beta^2(\Omega_h; h)$ как замыкание $C_0^\infty(\overline{\Omega}_h \setminus \Upsilon_h)$ по такой весовой норме:

$$||v; V_\beta^2(\Omega_h;h)|| = \sum_{k=0}^{2} h^k ||R^{\beta-2+k} \nabla_x^k v; L_2(\Omega_h)||. \quad (19)$$

Здесь $\nabla_x^k v$ — набор всех производных функции v порядка k, а $C_0^\infty(\overline{\Omega}_h \setminus \Upsilon_h)$ — линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{\Omega}_h$, обращающихся в нуль вблизи Υ_h. При фиксированном $h > 0$ пространство $V_\beta^2(\Omega_h; h)$ является пространством Кондратьева (см., например, [4, 5]), т.е. каждое дифференцирование функции увеличивает показатель степени весового множителя $\operatorname{dist}(x, \Upsilon_h)$ на единицу. Считая h параметром, видим, что порядок дифференцирования в (19) совпадает с показателем степени, а значит, на удалении от кромки норма (19) наследует свойства соболевской нормы с параметром (такие нормы систематически применялись в [12]). Укажем очевидные вложения

$$V_\beta^2(\Omega_h; h) \subset H^p(\Omega_h) \quad \Longleftrightarrow \quad \beta \leqslant 2 - p, \tag{20}$$

где $p = 1, 2$, и неравенства

$$|||u; H^p(\Omega_h)||| \leqslant c_p ||u; V_\beta^2(\Omega_h; h)||, \qquad \beta \leqslant 2 - p,$$

в которых для того, чтобы сделать постоянные c_1 и c_2 не зависящими от h, используются упомянутые выше нормы с параметром

$$|||v; H^p(\Omega_h)||| = \sum_{k=0}^{p} h^k ||\nabla_x^k v; L_2(\Omega_h)||. \tag{21}$$

Для того чтобы обработать собственные векторы вблизи кромки пластины, фиксируем точку τ на контуре $\partial\omega$ (не различаем двумерные множества и их погружения в плоскость $\{x : x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$). Пусть η_τ — дуга с длиной h и центром в τ. Вырежем из пластины Ω_h пограничную ячейку S_h при помощи цилиндрической поверхности

$$\{x : x' \in \mathcal{V}, \nu = d_0 h, x_3 \in \mathbb{R}\} \tag{22}$$

и двух плоскостей $\Pi_\tau^\pm$, перпендикулярных к $\partial\omega$ в концевых точках дуги. Величина d_0 в (22) будет выбрана позднее.

Если заменить h на $2h$ во всех формулах предыдущего абзаца, получим бо́льшую ячейку $\widehat{S}_h \supset S_h$. Выполнив замену переменных $x \mapsto \xi = h^{-1}(x - \tau)$, преобразуем S_h и $\widehat{S}_h$ в области $\mathbf{S}_h$ и $\widehat{\mathbf{S}}_h$ соответственно. Заметим, что растянутые ячейки $\mathbf{S}_h$ и $\widehat{\mathbf{S}}_h$ имеют единичные размеры, однако нижний индекс h сохранен потому, что границы $\partial\mathbf{S}_h$ и $\partial\widehat{\mathbf{S}}_h$ по-прежнему зависят от h, хотя и оказываются плавно изменяющимися.

Пусть $\mathbf{u}^m$ — функция u^m, записанная в растянутых координатах ξ. Согласно $(2)_1$ эта функция удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{L}u^m = \mathbf{F} := h^2\Lambda_h(h)\gamma\mathbf{u}^m \quad \text{в} \quad \widehat{\mathbf{S}}_h, \tag{23}$$

причем $h^{-2}\mathbf{L}$ — дифференциальный оператор L из (3) в координатах ξ. Более того, соотношения $(2)_2$ и $(2)_3$ гарантируют, что однородные условия Неймана и Дирихле выполняются для $\mathbf{u}^m$ на частях границы $\partial\widehat{\mathbf{S}}_h$ соответствующих $\partial\widehat{S}_h \cap \Gamma_h^N$ и $\partial\widehat{S}_h \cap \Gamma_h^D$.

Очередное утверждение доставляет локальную весовую оценку, вытекающую из общих результатов об эллиптических задачах в областях с кусочно гладкими границами (ср. с [13, 14] и др.) и конкретных сведений об упругой задачи, обеспеченных ее полиномиальным свойством [15, 16] (см. также книгу [5], §8.3 и §6.1 соответственно).

Лемма 3. *Существует такое $\delta(\tau) > 0$, что в случае $\beta \in (1-\delta(\tau), 1]$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{2} ||\mathbf{R}^{\beta-2+k}\nabla_\xi^k\mathbf{u}^m; L_2(\mathbf{S}_h)||^2 \leqslant \\ c_\beta(\tau)\left\{||\mathbf{R}^\beta\mathbf{F}; L_2(\widehat{\mathbf{S}}_h)||^2 + ||\mathbf{u}^m; L_2(\widehat{\mathbf{S}}_h)||^2\right\}, \tag{24}$$

где под $\mathbf{R}$ подразумевается весовая функция (18), записанная в растянутых координатах ξ; $\delta(\tau)$ и $c_\beta(\tau)$ — непрерывные функции переменной $\tau \in \partial\omega$, не зависящие от параметра $h \in (0,1]$ и вектор-функции $\mathbf{u}^m$.

Возьмем показатель $\beta \geqslant 0$ (ср. с (20) при $p = 2$). Ввиду формулы $\mathbf{R}(\xi)^\beta \leqslant \mathrm{const}$ возврат к координатам x превращает (24) в неравенство

$$||u^m; V_\beta^2(S_h; h)||^2 \leqslant c_\beta\left\{h^4\Lambda_m(h)^2||u^m; L_2(\widehat{S}_h)||^2 + ||u^m; L_2(\widehat{S}_h)||^2\right\}. \tag{25}$$

Отметим, что степени h^k появляются в норме (19) из левой части (25) по причине обратной замены переменных и связи $\nabla_\xi = h\nabla_x$ градиентов. Кроме того, основываясь на непрерывности величин $\delta(\tau)$ и $c_\beta(\tau)$, выбираем весовой индекс β и постоянную c_β общими для всех точек $\tau \in \partial\omega$.

Для того чтобы оценить последний член в (25), воспользуемся неравенством Корна

$$h^{-2}||u^m; L_2(\widehat{S}_h)||^2 \leqslant c_k \mathcal{E}(u^m; \widehat{S}_h), \tag{26}$$

в котором опять-таки постоянная c_k не зависит от $h \in (0,1]$, $\tau \in \partial\omega$ и u^m. Неравенство (26) выводится по следующей схеме. Во-первых, переходим к растянутым координатам ξ. Во-вторых, учитывая условия Дирихле $(2)_3$, получаем неравенство

$$||\mathbf{u}^m; L_2(\widehat{\mathbf{S}}_h)||^2 \leqslant c_k \mathcal{E}(\mathbf{u}^m; \widehat{\mathbf{S}}_h) \tag{27}$$

(см., например, [17, 18]), причем возврат к координатам x привносит множитель h^{-2} в левую часть (26). Наконец, с целью убедиться в независимости постоянной c_k от $h \in (0,1]$ и $\tau \in \partial\omega$ вспоминаем, что $\widehat{\mathbf{S}}_h$ является слегка искаженным параллелепипедом, и находим шар $\widehat{\mathbf{B}}_r \subset \widehat{\mathbf{S}}_h$ с фиксированным радиусом r, относительно которого ячейка $\widehat{\mathbf{S}}_h$ оказывается звездной. Результаты [18] обнаруживают нужное свойство независимости у постоянной c_k потому, что диаметры ячеек равномерно ограничены.

Опуская нормы u^m и $\nabla_x u^m$ в левой части (25), применяем соотношение (26) и получаем, что

$$h^4||R^\beta \nabla_x^2 u^m; L_2(S_h)||^2 \leqslant c\left\{h^4\Lambda(h)^2||u^m; L_2(\widehat{S}_h)||^2 + h^2\mathcal{E}(u^m; \widehat{S}_h)\right\}. \tag{28}$$

Нетрудно построить подходящее конечное покрытие $\partial\omega$ дугами с длинами h. Просуммировав неравенства (28), отвечающие этим дугам, приходим к оценке

$$\begin{gathered} ||R^\beta \nabla_x^2 u^m; L_2(\Omega_h(hd_0))||^2 \\ \leqslant C(d_0)\big\{\Lambda(h)^2||u^m; L_2(\Omega_h(2hd_0))||^2 + h^{-2}\mathcal{E}(u^m; \Omega_h(2hd_0))\big\}, \end{gathered} \tag{29}$$

где $\Omega_h(d_0h) = \{x \in \Omega_h : x' \in \mathcal{V}, \nu < d_0h\}$. В формуле (29) отмечена зависимость $C(d_0)$ от параметра d_0 из определения (22), который по-прежнему остается свободным, поскольку до сих пор учитывалось только тривиальное ограничение $\Upsilon_h^D \subset \partial\Omega_h(d_0h)$.

5. Оценки на удалении от кромки пластины. Разобьем плоскость $\mathbb{R}^2$ на квадраты Q_h со сторонами t_0h. Пусть $\widehat{Q}_h$ — квадрат, концентрический с Q_h, но имеющий сторону $2t_0h$. Согласуем размеры d_0 и t_0 так, чтобы удовлетворить двум условиям:

1^0. *если* $Q_h \cap \omega \neq Q_h$, *то* $Q_h \cap \omega \subset \mathcal{V}_{hd_0} \cap \omega$;

2^0. *если* $Q_h \cap (\omega \setminus \mathcal{V}_{hd_0}) \neq \emptyset$, *то* $\widehat{Q}_h \subset \omega$.

Здесь $\mathcal{V}_d = \{x' \subset \mathcal{V} : |\nu| < d\}$ при малом $d > 0$. Определим ячейку $S_h = \{x \in \Omega_h : x' \in Q_h\}$ — смысл обозначения $\widehat{S}_h$ также становится понятным. Увеличивая при необходимости размер d_0, соблюдаем последнее условие

3^0. *если* $Q_h \cap (\omega \setminus \mathcal{V}_{hd_0}) \neq \emptyset$, *то* $\partial\widehat{S}_h \cap \Gamma_h^D = \emptyset$.

Возьмем любой из квадратов Q_h, пересекающийся с $\omega \setminus \mathcal{V}_{hd_0}$, и сделаем замену переменных $x \mapsto \xi = h^{-1}(x - y)$, где y — центр $Q_h \subset \{x : x_3 = 0\}$. Получим раздутые ячейки $\mathbf{S}_h$ и $\widehat{\mathbf{S}}_h$, которые являются ничем иным как слегка искривленными параллелепипедами. Это наблюдение, в частности, обеспечивает локальную оценку (см. [19])

$$||\mathbf{u}^m; H^2(\mathbf{S}_h)^2|| \leqslant c\left\{||\mathbf{F}; L_2(\widehat{\mathbf{S}}_h)||^2 + ||\mathbf{u}^m; L_2(\widehat{\mathbf{S}}_h)||^2\right\} \tag{30}$$

для вектор-функции $\xi \mapsto \mathbf{u}^m(\xi) = u^m(x)$, которая удовлетворяет уравнению (23) и однородным условиям Неймана на основаниях $\widehat{\mathbf{S}}_h$ (ср. с требованием 3^0). Постоянная c в (30), разумеется, может быть сделана не зависящей от параметра $h \in (0, 1]$, номера $m \in \mathbb{N}$ и ячейки $\mathbf{S}_h$.

Остается оценить норму $||\mathbf{u}^m; L_2(\widehat{\mathbf{S}}_h)||$ в формуле (30). С этой целью воспользуемся следующим разложением поля смещений $\mathbf{u}^m$ на ячейке $\widehat{\mathbf{S}}_h$:

$$\mathbf{u}^m(\xi) = \mathbf{u}^{m\perp}(\xi) + \mathbf{d}(\xi)\mathbf{b}. \tag{31}$$

Здесь $\mathbf{b}$ — столбец в $\mathbb{R}^6$, $\mathbf{d}(\xi)\mathbf{b}$ — жесткое смещение,

$$\mathbf{d}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

а составляющая $\mathbf{u}^{m\perp}$ подчинена условию ортогональности

$$\int\limits_{\mathbf{B}_r} \mathbf{d}(\xi)^\top \mathbf{u}^{m\perp}(\xi) d\xi = 0 \in \mathbb{R}^6, \tag{33}$$

причем шар $\mathbf{B}_r$ с фиксированным радиусом r выбирается так, чтобы ячейка $\widehat{\mathbf{S}}_h$ оказалась звездной относительно $\mathbf{B}_r$ (напоминаем, что основания ячейки возмущены лишь слегка). Подчеркнем, что интеграл $\int\limits_{\mathbf{B}_r} \mathbf{d}(\xi)^\top \mathbf{d}(\xi) d\xi$ представляет собой невырожденную матрицу Грама размером 6×6 и, таким образом, условие ортогональности (33) достигается подходящим выбором столбца $\mathbf{b}$. Выполняются такие варианты неравенства Корна с постоянными c, не зависящими от собственного вектора $\mathbf{u}^m$ и ячейки $\widehat{\mathbf{S}}_h$ (см. [18] и [3]):

$$||\mathbf{u}^{m\perp}; H^1(\mathbf{B}_r)||^2 \leqslant c\mathcal{E}(\mathbf{u}^{m\perp}; \mathbf{B}_r),$$

$$||\mathbf{u}^{m\perp}; H^1(\widehat{\mathbf{S}}_h)||^2 \leqslant c(\mathcal{E}(\mathbf{u}^{m\perp}; \widehat{\mathbf{S}}_h) + ||\mathbf{u}^{m\perp}; H^1(\mathbf{B}_r)||^2). \qquad (34)$$

Поскольку деформации ε_{ij} аннулируются на жестких смещениях, сначала перепишем (34) в виде

$$||\mathbf{u}^{m\perp}; H^1(\widehat{\mathbf{S}}_h)||^2 \leqslant c\mathcal{E}(\mathbf{u}^{m\perp}; \widehat{\mathbf{S}}_h) = c\mathcal{E}(\mathbf{u}^{m}; \widehat{\mathbf{S}}_h)$$

(см. (32), (3) и (14)), а затем обратим внимание на то, что уравнение (23),

$$\mathbf{L}u^{m\perp} = \mathbf{F} \quad \text{ин} \quad \widehat{\mathbf{S}}_h,$$

остается справедливым для вектор-функции $\mathbf{u}^{m\perp}$. То же верно и для однородных условий Неймана на основаниях ячейки (снова вспоминаем условие 3^0). Следовательно, локальная оценка (30) означает, что

$$||\nabla_\xi^2 \mathbf{u}^m; L_2(\mathbf{S}_h)||^2 = ||\nabla_\xi^2 \mathbf{u}^{m\perp}; L_2(\mathbf{S}_h)||^2 \leqslant ||\mathbf{u}^{m\perp}; H^1(\mathbf{S}_h)||^2 \leqslant$$

$$\leqslant c\left\{||\mathbf{F}; L_2(\mathbf{S}_h)||^2 + ||\mathbf{u}^{m\perp}; L_2(\widehat{\mathbf{S}}_h)||^2\right\}$$

$$\leqslant c\left\{h^4\Lambda_m(h)^2||\mathbf{u}^m; L_2(\widehat{\mathbf{S}}_h||^2 + \mathcal{E}(\mathbf{u}^m; \widehat{\mathbf{S}}_h)\right\}. \qquad (35)$$

Подчеркнем, что первое равенство выполняется потому, что последний член в (31) является линейной функцией и его вторые производные аннулируются. Возвращаясь к координатам x, преобразуем (35) в соотношение

$$h^4||\nabla_x^2 u^m; L_2(S_h)||^2 \leqslant c\left\{h^4\Lambda_m(h)^2||u^m; L_2(\widehat{S}_h)||^2 + h^2\mathcal{E}(u^m; \widehat{S}_h)\right\}, \qquad (36)$$

совпадающее с неравенством (28), в котором весовая функция R равна единице тождественно.

Согласно требованиям 2^0 и 1^0 оценка (36) выполняется для каждого квадрата Q_h, пересекающегося с $\omega \backslash \mathcal{V}_{hd_0}$. Итак, суммируя эти оценки, получаем искомое неравенство

$$||\nabla_x^2 u^m; L_2(\Omega_h \backslash \Omega_h(hd_0))||^2 \leqslant c\left\{\Lambda(h)^2||u^m; L_2(\Omega_h)||^2 + h^{-2}\mathcal{E}(u^m; \Omega_h)\right\}. \qquad (37)$$

6. Асимптотически точные оценки вторых производных собственных векторов. Опираясь на соотношения (28), (37) и (12), (18), формулируем очередное утверждение.

Теорема 4. *Найдется такая величина $\delta > 0$, что при любом $\beta \in (1-\delta, 1]$ собственные векторы u^m задачи (2), подчиненные условию нормировки (6), удовлетворяют оценке*

$$||R^\beta \nabla_x^2 u^m; L_2(\Omega_h)|| \leqslant c_\beta \Big(h^{-1}\Lambda_m(h)^{1/2} + \Lambda_m(h)\Big), \qquad (38)$$

где постоянная c_β не зависит ни от параметра $h \in (0,1]$, ни от номера $m \in \mathbb{N}$.

При помощи формальных асимптотических рассмотрений подтвердим асимптотическую точность мажоранты в оценке (38). Как обсуждалось подробно в [7, 3], спектр задачи теории упругости для тонкой пластины содержит несколько серий собственных чисел, а соответствующие собственные векторы имеют различающиеся асимптотические структуры. Покажем, что для всех этих серий правая и левая части (38) приобретают одинаковые порядки в сравнениии с параметром h. Только для простоты считаем показатель $\beta = 0$ допустимым.

i) *Первая серия (низкие частоты).* Ссылки на статьи [1, 3, 7] доставляют асимптотические анзацы

$$\Lambda(h) = h^2\lambda + \ldots,$$

$$u(h,x) = h^N \Big\{ h^{-2} e^3 w_3(x') + h^{-1} \sum_{i=1}^{2} e^i \Big[w_i(x') - \zeta \frac{\partial w_3}{\partial x_i}(x') \Big]$$
$$+ h^0 \mathcal{X}(x', \zeta, \nabla_{x'}) w(x') + \ldots \Big\}, \qquad (39)$$

где λ и $w = (w_1, w_2, w_3)$ — решение спектральной задачи в рамках двумерной модели пластины, e^j — единичный вектор оси x_j; $\mathcal{X}(x', \zeta, \nabla_{x'})$ — 3×3-матрица дифференциальных операторов, которая зависит от коэффициентов (a_{ij}^{pq}) и функций $H_\pm$, описывающих форму пластины; этот оператор дифференцирует продольные смещения $w' = (w_1, w_2)$ один раз, а поперечное смещение w_3 — дважды. Так как $w_3 \neq 0$ (см. [7, 8]) и $||h^{-2} w_3; L_2(\Omega_h)|| = O(h^{-3/2})$, показатель N нормирующего множителя h^N равен $3/2$ и, значит, левая часть (38) приобретает порядок $h^{3/2} h^{-2} h^{1/2} = h^0$

(отметим, что множитель $h^{1/2}$ отражает малую толщину пластины). Анзац для собственного числа $\Lambda(h)$ превращает правую часть (38) в величину $O(h^{-1}(h^2)^{1/2}+h^2)=O(h^0)$ такого же порядка.

ii) *Вторая серия* (*средние частоты*). Во второй серии анзац для собственного числа выглядит так:

$$\Lambda(h)=\lambda+\dots. \tag{40}$$

В итоге правая часть (38) равна $O(h^{-1}+h^0)=O(h^{-1})$. Кроме того, упрощается асимптотичаский анзац (39) для собственных векторов за счет демпфирования изгибной компоненты (см. [7, 3]), а именно,

$$u(h,x)=h^N\left\{h^{-1}\sum_{i=1}^{2}e^i w_i(x')+h^0\mathcal{X}'(x',\zeta,\nabla_x)w'(x')+\dots\right\}. \tag{41}$$

Для того чтобы соблюсти условие нормировки $||u;L_2(\Omega_h)||=1$, нужно взять $N=1/2$. Поскольку $\partial^2/\partial z^2=h^{-2}\partial^2/\partial\zeta^2$, обнаруживаем, что $\nabla_x^2 u(h,x)=O(h^{N-2})$, и поэтому левая часть (38) также становится равной $O(h^{N-2}h^{1/2})=O(h^{-1})$.

iii) *Третья серия* (*высокие частоты*). Форма анзаца для собственных частот такова:

$$\Lambda(h)=h^{-2}\lambda+\dots; \tag{42}$$

при этом $h^{-1}\Lambda(h)^{1/2}+\Lambda(h)=O(h^{-2})$. В статье [21] предложен следующий анзац для собственных векторов:

$$u(h,x)=h^N\{h^{-1}w(y)\psi(\zeta)+\dots\} \tag{43}$$

Снова имеем $N=1/2$, но теперь главный асимптотический член зависит от растянутой переменной ζ, а значит, правая часть (38) оказывается равной $O(h^{1/2}h^{-1}h^{-2}h^{1/2})=O(h^{-2})$. Тем не менее, порядки по h обеих частей (38) опять совпадают.

Приведенные рассмотрения в достаточной мере эвристические, в то время как точная формулировка результата дана в теореме 4. В самом деле, обоснование анзацев $(39)_2$ и (41) проводилось только в энергетической норме, т.е. в $H^1(\Omega_h)^3$-норме (см. [1, 3, 7, 8, 21, 22]), и, следовательно, вторые производные не могут быть рассчитаны при помощи формул $(39)_2$ и (41). Более того, как обсуждалось в [7], анзац (43) вероятно некорректен

— определенные эффекты локализации, разрушающие представления вида (43), обнаружены в [23, 24] для скалярной задачи. В то же время, применение в задаче теории упругости анзацев типа пограничного слоя [24] подтверждает асимптотическую точность неравенства (38) на высокочастотной полосе спектра. Упомянем еще статью [25], в которой открыты краевые резонансы для задачи теории упругости с краевыми условиями Неймана в полуполосе (см. [24] по поводу смешанных краевых задач).

7. Комментарии. 1) В дополнение к неравенству (29), локальные оценки (24) обеспечивают неравенство

$$h^{-2}|||u^m; H^1(\Omega_h(hd_0))|||^2$$
$$\leqslant c\left\{h^{-2}||R^{\beta-2}u^m; L_2(\Omega_h(hd_0))||^2 + ||R^{\beta-1}\nabla_x u^m; L_2(\Omega_h(hd_0))||^2\right\}$$
$$\leqslant c\left\{h^2\Lambda(h)^2||u^m; L_2(\Omega_h(2hd_0))||^2 + \mathcal{E}(u^m; \Omega_h(2hd_0))\right\} \qquad (44)$$

(напоминаем, что $\beta \leqslant 1$). По сравнению с (29) правая часть (44) приобретает дополнительный множитель h^2, который, на первый взгляд, делает эту оценку более хорошей, чем (17). Однако это заключение неверно, так как для внутренних ячеек в п.5 только компоненты $\mathbf{u}^{m\perp}$, но не жесткие смещения $\mathbf{d}(\xi)\mathbf{b}$, удовлетворяют улучшенным оценкам (по счастию жесткие смещения в (31) не влияют на вторые производные). Более того, оценки того же сорта, что и (44),

$$h^{-2}||u^m; L_2(\Omega_h(hd_0))||^2 + ||\nabla_x u^m; L_2(\Omega_h(hd_0))||^2 \leqslant c\mathcal{E}(u^m; \Omega_h),$$

вытекают непосредственно из весового неравенства Корна (15), поскольку весовой множитель $\rho_h(x)$ имеет порядок h на $\Omega_h(hd_0)$.

Повторяя выкладки, выполненные в п.4 и п.5, для вывода оценок третьих производных, получаем неравенство

$$||R^{\beta+1}\nabla_x^3 u^m; L_2(\Omega_h)|| \leqslant ch^{-2}\Lambda_m(h)^{1/2}(1+\Lambda_m(h)). \qquad (45)$$

Теперь видно, что мажоранта в (45) оказывается равной $O(h^{-1})$ даже на низкочастотной полосе спектра. Асимптотическая точность оценки (44) может быть подтверждена при учете асимптотических анзацев (39), (41) и (43). Таким образом, на равномерную ограниченность норм производных порядка $k \geqslant 3$ надеяться не приходится.

2) Анализируя низкочастотные анзацы (39) еще раз, видим, что производные в направлениях x_1 и x_2 продольных смещений

u_1 анд u_2 являются единственными вторыми производными, которые могут оказаться бесконечно малыми при $h \to +0$. Несмотря на то, что анзац $(39)_2$ с $N = 3/2$ предсказывает неправильный (завышенный) порядок h^1 норм $||R^\beta \nabla^2_{x'} u_i^m; L_2(\Omega_h)||$ с $i = 1, 2$, само по себе заключение остается правильным. Действительно, в [3; §7.2] установлено неравенство

$$||R^\beta \nabla^2_{x'} u_i^m; L_2(\Omega_h)|| \leqslant ch^{-1/2} \Lambda_m(h)^{1/2} (1 + h^{-1} \Lambda_m(h)^{1/2})$$

с мажорантой $O(h^{1/2})$ в случае $\Lambda_m(h) \leqslant Ch^2$ (ср. с $(39)_1$). Понижение показателя степени происходит из-за эффектов типа пограничного слоя, описанных, например, в [21, 22], но опущенных в $(39)_2$. Главный член пограничного слоя принимает вид $\chi(x') v(h^{-1}\nu, h^{-1}z, \tau)$, где $\chi \in C_0^\infty(\mathcal{V})$ — срезающая функция, $\chi = 1$ вблизи контура $\partial\omega$, а сомножитель $v(\eta, \zeta, \tau)$ экспоненциально затухает при $\eta \to +\infty$. Поскольку возникла растянутая продольная переменная $\eta = h^{-1}$, имеем

$$||R^\beta \nabla^2_{x'} (\chi v); L_2(\Omega_h)|| = O(h^N h^{-2} h^{1/2} h^{1/2}) = O(h^{1/2})$$

(один из множителей $h^{1/2}$ порожден как раз экспоненциальным затуханием пограничного слоя).

3) Защемление типа e) было исключено из предыдущего анализа ввиду наличия ребра Υ_h^+, на обеих гранях которого поставлены условия Неймана. Как известно, в этом случае весовые пространства с однородными нормами (19) не обеспечивают фредгольмово свойство оператора задачи (2) при любом индексе $\beta \in \mathbb{R}$. Тем не менее, та же оценка (38) может быть получена при помощи так называемых ступенчатых весовых пространств (см. [6, 26, 27, 5, 16]). Отметим также другой подход [28], использующий пространства Соболева H^s с определенной верхней границей s_0 для нецелого показателя гладкости s.

Защемления типов b)–e) порождают линии смены краевых условий на гладких поверхностях, где встречаются условия Дирихле $(2)_3$ и Неймана $(2)_2$. Используя подход [29] (см. также [5; гл. 7]), можно проверить, что главный показатель сингулярности степенных решений на этих кривых принимает вид $\frac{1}{2} \pm \mu i$, где $\mu \in R$. Таким образом, число δ в теореме 4 не может превосходить 1/2.

Результаты [30] (см. также [31]) подтверждает справедливость теоремы 4 с весовым индексом $\beta \in \left(\frac{1}{2} - \alpha, 1\right]$ для произвольной выпуклой области, где α — некоторое неотрицательное число, существенно зависящее от упругих и геометрических свойств пластины. В то же время, понятие алгебраической эквивалентности плоских анизотропных упругих сред (см. [32]) позволяет указать анизотропные упругие пластины типа а), для которых $\alpha > 0$ оказывается либо произвольно малым, либо произвольно большим числом. У изотропной цилиндрической пластины, защемленной по боковой поверхности, сингулярности на ребре присутствуют и можно взять[2] $\beta > 0.405388$. Показатели степенных решений и, следовательно, границы для δ и α рассчитаны для многих анизотропных материалов и геометрических иррегулярностей (см. [33-35] и др.).

4) Рассмотрим смешанную краевую задачу для скалярного эллиптического уравнения в тонком цилиндре $\Omega_h = \omega \times (-h/2, h/2)$,

$$\begin{gathered} -\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk}\left(x', \frac{x_3}{h}\right) \frac{\partial u}{\partial x_k} u(h,x) = \Lambda(h) u(h,x),\ x \in \Omega_h; \\ \pm \sum_{k=1}^{3} a_{3k}\left(x', \pm\frac{1}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x_k}\left(h, x', \pm\frac{h}{2}\right) = 0,\ x' \in \omega; \\ u(h,x) = 0,\ x \in \partial\omega \times (-h/2, h/2). \end{gathered} \tag{46}$$

Результаты [3; §1.2, §7.2] относятся к случаю постоянных коэффициентами a_{jk}, однако асимптотический анализ и обоснование полученных асимптотических разложений могут быть легко приспособлены, например, к случаю гладких коэффициентов. В частности, асимптотические анзацы для решений спектральной задачи (46) выглядят следующим образом:

$$\Lambda(h) = \lambda + \ldots,$$

$$u(h,x) = h^N \left\{ h^{-1} w(x') + h^0 \sum_{i=1}^{2} \mathcal{X}_i(x', \zeta) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x') \right\} + \ldots \tag{47}$$

Здесь $\zeta = h^{-1} z$, $\partial\zeta = h^{-1}\partial/\partial z$, функции $\mathcal{X}_i$ удовлетворяют задачам с параметром $x' \in \omega$,

$$\begin{gathered} -\partial_\zeta a_{33}(x',\zeta)\partial_\zeta \mathcal{X}_i(x',\zeta) = \partial_\zeta a_{3i}(x',\zeta), \quad \zeta \in (-1/2, 1/2), \\ \pm a_{33}(x', \pm 1/2)\partial_\zeta \mathcal{X}_i(x', \pm 1/2) = \mp a_{3i}(x', \pm 1/2), \end{gathered} \tag{48}$$

[2] Результат вычислений сообщен М. Дож.

а пара $\{\lambda, w\}$ представляет собой решение двумерной спектральной задачи

$$-\sum_{i,n=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{in}(x') \frac{\partial w}{\partial x}(x') = \lambda w(x'), \quad x' \in \omega,$$

$$w(x') = 0, \quad x' \in \partial\omega, \tag{49}$$

и коэффициенты A_{in} определяются так:

$$A_{in}(x') = \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ a_{in}(x', \zeta) - a_{i3}(x', \zeta) a_{33}(x', \zeta)^{-1} a_{3n}(x', \zeta) \right\} d\zeta. \tag{50}$$

Если $(a_{jk}(x', \zeta))$ — симметрическая положительно определенная 3×3-матрица, то оба уравнения $(46)_1$ и $(49)_1$ являются эллиптическими. Кроме того, задачи (46) и (49) имеют спектральные последовательности (5) и (9) соответственно, причем $\Lambda_m(h) \to \lambda_m$ для любого $m \in N$ (см., например, [3]). Далее мы предполагаем, что коэффициенты a_{jk} зависят только от ζ. Тогда то же самое верно для $\mathcal{X}_i$ и, более того, коэффициенты (50) становятся постоянными. Подчеркнем, что при помощи аффинного преобразования задача (49) может быть сведена к задаче Дирихле для оператора Лапласа.

Так как двугранные углы на иррегулярных кривых $\partial\omega \times \{\pm h/2\}$ на границе $\partial\Omega_h$ выпуклые, решение u задачи (46) принадлежит $H^2(\Omega_h)$ (см., например, [29, 5]). Подсчитаем соболевские нормы. С одной стороны, анзац $(47)_2$ с $N = 1/2$ и $||w; L_2(\omega)|| = 1$ приводит к "почти нормированным" собственным функциям,

$$||u; L_2(\Omega_h)|| = 1 + \dots$$

С другой стороны, имеем

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}; L_2(\Omega_h) \right\|^2 = h \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\omega} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \sum_{i=1}^{2} \mathcal{X}_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx' + \dots$$

$$= h^{-2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{\omega} \left| \sum_{i=1}^{2} \partial_\zeta^2 \mathcal{X}_i(\zeta) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x') \right|^2 dx' d_\zeta + \dots$$

Частные производные первой собственной функции w_1 задачи (49) не могут быть линейно зависимыми и поэтому последний интеграл обращается в нуль лишь при условии $\partial_\zeta^2 \mathcal{X}_i = 0$, т.е. $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ — линейные функции от ζ. Благодаря формулам (48) подобная линейная зависимость возможна тогда и только тогда, когда дроби $a_{33}(\zeta)^{-1}a_{i3}(\zeta)$, $i = 1, 2$, постоянны. Следовательно, отрицая это свойство коэффициентов, выводим формально неравенство

$$||u^1; H^2(\Omega_h)|| \geqslant ch^{-1} > 0, \tag{51}$$

где u^1 — первая собственная функция задачи (46) (напоминаем, что $\Lambda_1(h)$ — простое собственное число и $||u^1; L_2(\Omega_h)|| = 1$). Для строгого доказательства (51) укажем оценку, установленную в [3; §7.1],

$$||u^1 - U^1; H^1(\Omega_h)|| \leqslant c_1 h^{1/2};$$

здесь U^1 — выражение $h^N\{\dots\}$ в $(47)_2$ с $N = -1/2$. Кроме того, применяя так же, как и в п.4 и п.5, локальные оценки, получаем неравенство

$$||\nabla_x^2(u^1 - U^1); L_2(\Omega_h)|| \leqslant C_1 h^{-1/2},$$

которым и завершается построение примера, обещанного во введении.

Литература

1. P. G. Ciarlet, S. Kesavan, *Two dimensional approximations of three dimensional eigenvalues in plate theory.* — Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **26** (1980), 149–172.
2. С. А. Назаров, *Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки.* — Проблемы матем. анализа. Вып. 17. СПб: изд-во СПбГУ. (1997), 101–152.
3. С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки.* Научная книга, Новосибирск (2002).
4. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.* — Труды Московск. матем. общества. **16** (1963), 219–292.
5. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* М. Наука (1991).
6. Н. Х. Арутюнян, С. А. Назаров, Б. А. Шойхет, *Оценки и асимптотика напряженно-деформированного состояния трехмерного тела с трещиной в теории упругости и теории ползучести.* — Докл. АН СССР. **266**, No. 6 (1982), 1365–1369.

7. С. А. Назаров, *Об асимптотике спектра задачи теории упругости для тонкой пластины.* — Сибирск. матем. журнал, **41**, No 4 (2000), 895–912.
8. S. A. Nazarov, *Estimating the convergence rate for eigenfrequencies of anisotropic plates with variable thickness.* — C.R. Mecanique. **330** 2002, 603–607.
9. Б. А. Шойхет, *Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры.* — Прикладная математика и механика, **37**, No. 5 (1973), 913–924.
10. С. А. Назаров, *Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей.* — Вестник СПбГУ, Серия 1, Вып. 2, No. 8 (1992), 19–24.
11. С. А. Назаров, *Асимптотический анализ произвольно анизотропной пластины переменной толщины (пологой оболочки).* — Матем. сборник, **191**, No. 7 (2000), 129–159.
12. М. С. Агранович, М. И. Вишик, *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.* — Успехи матем. наук, **19**, No. 3 (1999), 53–160.
13. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами на границе.* — Труды семинара С. Л. Соболева, Вып. 2 (1978), 69–102.
14. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, L_p*–оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами.* — Труды Московск. матем. общества, **37** (1978), 49–93.
15. С. А. Назаров, *Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы.* — Проблемы матем. анализа, Вып. 16, СПб: изд-во СПбГУ (1997), 167–192.
16. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов.* — Успехи матем. наук, **54**, No. 5 (1999), 77–142.
17. J.Nečas, *Les méthodes in théorie des équations elliptiques.* Paris-Prague: Masson-Academia (1967).
18. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, *Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна.* — Успехи матем. наук, **43**, No. 5(1988), 55–98.
19. S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions.* 2. — Comm. Pure Appl. Math., **17** (1964), 35–92.
20. В. Л. Бердичевский, *Высокочастотные длинноволновые колебания пластин.* — Докл АН СССР, **236**, No. 6 (1977), 1319–1322.
21. И. С. Зорин, С. А. Назаров, *Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины.* — Прикладная матем. и механика, **53**, No. 4 (1989), 642–650.
22. M. Dauge, I. Djurdjevic, E. Faou, A. Rössle, *Eigenmode asymptotics in thin elastic plates.* — J. Math. Pures Appl., **78**, No. 9 (1999), 925–964.
23. С. А. Назаров, *Асимптотика собственных чисел задачи Дирихле в тонкой области.* — Известия ВУЗов. Матем. No. 11 (1987), 54–64.
24. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области.* — Проблемы матем. анализа, Вып. 19, Новосибирск: Научн. книга (1999), 105–148.

25. I. Roitberg, D. Vassiliev, T. Weidl, *Edge resonance in an elastic semi-strip.* — Q. J. Mech. Appl. Math., **51**, No. 1 (1998), 1–13.
26. С. А. Назаров, *Оценки вблизи ребра решения задачи Неймана для эллиптической системы.* — Вестник ЛГУ, Серия 1, Вып. 1, (No. 1) (1988), 37–42.
27. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Задача Неймана для самосопряженных эллиптических систем в области с кусочно гладкой границей.* — Труды ленинградского матем. общества, Т. 1 (1990), 174–211.
28. M. Dauge, *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains.* — Lect. Notes Math., **1341** (1988).
29. С. А. Назаров, *Весовые функции и инвариантные интегралы.* — Вычислительная механика деформируемого твердого тела, Вып. 1 (1990), 17–31.
30. В. А. Козлов, В. Г. Мазья, *Спектральные свойства операторных пучков, порожденных краевыми задачами в конусе.* — Функц. анализ и его приложения, **22**, No. 2 (1988), 38–46.
31. V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations.* Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI (2001).
32. А. А. Куликов, С. А. Назаров, М. А. Нарбут, *Аффинные преобразования в плоской задаче теории упругости.* — Вестник СПбГУ, Сер. 1, Вып. 2, No. 8 (2000), 91–95.
33. M. L. Williams, *Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions.* — J. Appl. Mech., **19** (1952), 526–528.
34. M. Costabel, M. Dauge, *Computation of corner singularities in linear elasticity.* — Lect. Notes Pure and Appl. Maths., **167** (1994), 59–68.
35. P. J. Papadakis, I. Babuška, *A numerical procedure for the determination of certain quantities related to the stress intensity factors in two-dimensional elasticity.* — Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **122** (1995), 69–92.

Nazarov S. A. Estimates for second order derivatives of eigenvectors in thin anisotropic plates with variable thickness.

For second order derivatives of eigenvectors in a thin anisotropic heterogeneous plate Ω_h, we derive estimates of the weighted L_2-norms with the majorants whose dependence on both, the plate thickness h and the eigenvalue number, are expressed explicitly. These estimates keep the asymptotic sharpness along the whole spectrum while, inside its low-frequency range, the majorants remain bounded as $h \to +0$. The latter is rather unexpected fact because, for the first eigenfunction u^1 of the alike boundary value problem for a scalar second order differential operator with variable coefficients, the norm $\|\nabla_x^2 u^0; L_2(\Omega_h)\|$ is of order h^{-1} and grows as h vanishes.

ИПМаш РАН

Поступило 2 марта 2004 г.