Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 308, 2004 г.

С. П. Хэкало

КАЛИБРОВОЧНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**Работа посвящается П. В. Крауклису
в связи с его семидесятилетием**

1. Введение. Калибровочно эквивалентные деформации линейных дифференциальных операторов основаны на сплетаемости исходного и деформированного дифференциальных операторов при помощи дифференциальных операторов, зависящих от спектральных параметров [1–3]. Они нашли применение к проблеме Адамара, связанной с отысканием неэлементарных дифференциальных операторов, удовлетворяющих принципу Гюйгенса [4, 5]. (Для операторов высоких порядков строится "анзатц"с "коэффициентами", являющимися степенями оператора косого присоединенного действия [1–6]. Благодаря свойству калибровочной эквивалентности исходного и деформированного операторов, происходит обрыв ряда-"анзатца".)

В работах [3, 6] найдены некоторые классы дифференциальных операторов, для которых имеет место калибровочная эквивалентность. Представители этих классов есть деформации дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами членам и меньшего порядка с переменными коэффициентами.

В работе [7] описано семейство обыкновенных биспектральных коммутативных дифференциальных операторов, имеющих собственные "пси-функции". Фактически в этой работе решен вопрос о калибровочной эквивалентности таких операторов.

В настоящей работе строится и изучается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которой

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науке и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, проект No. 02-01-00721).

позволяют найти коэффициены калибровочно эквивалентных деформаций обыкновенного линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Такой подход, повидимому, позволит решать задачи о деформациях линейных дифференциальных операторов в часных производных высоких порядков. Так, например, применение аналога метода Фурье разделения переменных позволяет обобщить результаты работы на случай многих переменных. (Частные примеры см., например, в [8].)

2. Калибровочная эквивалентность дифференциальных операторов. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ – произвольные операторы. *Оператором косого присоединенного действия* [1, 5] *называется оператор* $\mathrm{ad}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\mathcal{C}$, *определяемый следующим рекуррентным соотношением*

$$\mathrm{ad}^0_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\mathcal{C} = \mathrm{id}\circ\mathcal{C} = \mathcal{C}, \quad \mathrm{ad}^k_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\mathcal{C} = \mathrm{ad}^{k-1}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\mathcal{A}\circ\mathcal{C} - \mathcal{C}\circ\mathcal{B}), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Здесь id – тождественный оператор, а $\circ$ – знак композиции операторов.

Определение ([3]). *Линейные дифференциальные операторы* $\mathcal{L}_2$ *и* $\mathcal{L}_1$ *называются* M*-калибровочно эквивалентными при помощи функции* f*, если найдутся натуральное число* M *и ненулевая бесконечно дифференцируемая функция* f*, такие, что*

$$\mathrm{ad}^{M+1}_{\mathcal{L}_2,\mathcal{L}_1}\, f = 0. \tag{1}$$

Пример. Пусть d/dx – оператор дифференцирования на $\mathbb{R}$, тогда имеет место следующая 1-калибровочная эквивалентность

$$\mathrm{ad}^{1+1}_{d^2/dx^2-2/x^2,\, d^2/dx^2}\, x = 0.$$

Отметим несколько очевидных свойств.

Свойство 2.1. *Пусть* a *– произвольная постоянная, тогда*

$$\mathrm{ad}^k_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(a\circ\mathcal{C}) = a\circ\mathrm{ad}^k_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\mathcal{C}.$$

Свойство 2.2. *Если операторы* $\mathcal{L}_2$ *и* $\mathcal{L}_1$ *калибровочно эквивалентны, то их главные символы совпадают.*

Свойство 2.3. *Если $\mathcal{L}_1$ – заданный линейный дифференциальный оператор, а $\mathcal{L}_2$ – его калибровочно эквивалентная деформация, то равенство* (1) *равносильно системе, содержащей натуральный параметр M, нелинейных дифференциальных уравнений на коэффициенты оператора $\mathcal{L}_2$ и функцию f.*

Первое свойство следует из определения косого присоединенного действия. Второе, – из определения калибровочной эквивалентности, на основе равенства

$$\mathcal{L}_2 \circ \mathrm{ad}^M_{\mathcal{L}_2,\mathcal{L}_1} f = \mathrm{ad}^M_{\mathcal{L}_2,\mathcal{L}_1} f \circ \mathcal{L}_2.$$

Третье свойство получается по линейности оператора $\mathrm{ad}^{M+1}_{\mathcal{L}_2,\mathcal{L}_1} f$.

Пусть всюду $x \in \mathbb{R}$ и $d = \dfrac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования на $\mathbb{R}$. Рассмотрим линейные дифференциальные операторы на $\mathbb{R}$ с гладкими (почти всюду) коэффициентами, зависящими от неотрицательного целого параметра

$$\mathcal{R}_n = \sum_{k=0}^{N} \varphi^n_k \circ d^k, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Здесь $N \geqslant 2$ – порядок оператора $\mathcal{R}_n$; $\varphi^n_k \equiv \varphi_k(n;x)$ – бесконечно дифференцируемая почти всюду по аргументу x функция, зависящая от двух параметров $k, n \in \mathbb{Z}_+$.

Будем считать, что операторы $\mathcal{R}_n$ являются неэлементарными калибровочно эквивалентными деформациями оператора

$$\mathcal{R}_0 = \sum_{k=0}^{N} a_k d^k, \quad a_k = \varphi^0_k,$$

с постоянными коэффициентами a_k:

$$\mathrm{ad}^{M+1}_{\mathcal{R}_n,\mathcal{R}_0} f = 0, \quad M = M(n). \tag{2}$$

При этом неэлементарность деформаций означает, что

$$\mathrm{ad}^1_{\mathcal{R}_n,\mathcal{R}_0} f = \mathcal{R}_n \circ f - f \circ \mathcal{R}_0 \neq 0.$$

Эти условия влекут равенства

$$\varphi^n_N \equiv \varphi^{n-1}_N = a_N, \ \ n = 1;2;,,,, \tag{3}$$

$$\varphi_{N-1}^{n} \equiv \varphi_{N-1}^{n-1} = a_{N-1}, \;\; n = 1; 2; , , , . \tag{4}$$

Равенство (3) есть прямое следствие (2) (свойство 2.2), а равенство (4) получается из того, что элементарными преобразованиями в дифференциальном операторе можно избавиться от слагаемого, содержащего d^{N-1} [см., например, 9].

Следующая теорема дает достаточные условия выполнения равенства (2). Эти условия значительно проще условия M-калибровочной эквивалентности, что в дальнейшем позволяет написать в явном виде некоторую систему дифференциальных уравнений, равносильную условиям теоремы.

Теорема 1 ([10]). *Пусть для любых $k = 1, 2, \ldots, n$ операторы $\mathcal{R}_k$ и $\mathcal{R}_{k-1}$ 1-калибровочно эквивалентны при помощи функции f:*

$$\mathrm{ad}^{1+1}_{\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_{k-1}} f = 0. \tag{5}$$

Тогда операторы $\mathcal{R}_n$ и $\mathcal{R}_0$ n-калибровочно эквивалентны при помощи функции f^n:

$$\mathrm{ad}^{n+1}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_0} f^n = 0.$$

Доказательство. Равенства (5) влекут следующее сплетающее соотношение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{R}_n\right) \circ \mathcal{T}_t{}^n(f) = \mathcal{T}_t{}^n(f) \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{R}_0\right)$$

на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ со спектральным параметром $t \in \mathbb{R}$. Здесь сплетающий оператор $\mathcal{T}_t{}^n(f)$ задается равенством

$$\mathcal{T}_t{}^n(f) = \prod_{k=1}^{n} \left(f + t \circ \mathrm{ad}_{\mathcal{R}_{n-k+1}, \mathcal{R}_{n-k}} f\right),$$

с независящим от t оператором $\mathcal{T}_0^n(f) = f^n$.

Сплетающее соотношение влечет выполнение равенства

$$\mathrm{ad}^{n+1}_{\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_0} \mathcal{T}_0^n(f) = 0,$$

что и утверждалось. □

3. AD^n-матрица оператора $\mathcal{R}_n$. Нас будет интересовать вопрос об алгебраических условиях на функции φ_k^n, $k = 0; 1; \dots ; N$, и f, для которых имеет место равенство (5).

Свяжем с оператором $\mathcal{R}_n$ класс квадратных $(N+1)$-матриц следующего вида

$$\mathrm{AD}^n(f) = \begin{pmatrix} r_{00}^n(f) & \dots & r_{0N}^n(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N0}^n(f) & \dots & r_{NN}^n(f) \end{pmatrix}, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

$$r_{ik}^n(f) \equiv r_{ik}^n = \sum_{s=k}^{N} \binom{s}{k} \left(\varphi_s^n \, (g_i^n(f))^{(s-k)} - g_s^n(f) \, (\varphi_i^{n-1})^{(s-k)} \right), \tag{6}$$

$$g_k^n(f) \equiv g_k^n = \sum_{s=k}^{N} \binom{s}{k} \varphi_s^n \, f^{(s-k)} - \varphi_k^{n-1} \, f. \tag{7}$$

Здесь $f^{(s)}$ – s-ая производния функции f.

Опишем некоторые свойства AD^n-матрицы.

Свойство 3.1. *Для любых $k = 0; 1; \dots ; N$ имеет место равенство*

$$r_{kN}^n + r_{Nk}^n = 0.$$

Доказательство.

$$r_{Nk}^n = \sum_{s=k}^{N} \binom{s}{k} \left(\varphi_s^n \, (g_N^n)^{(s-k)} - g_s^n \, (\varphi_N^{n-1})^{(s-k)} \right).$$

Из равенств $g_N^n = 0$ и (3) имеем

$$r_{Nk}^n = -g_k^n \, \varphi_N^{n-1} = -a_N \, g_k^n.$$

Далее

$$r_{kN}^n = \varphi_N^n \, (g_k^n)^{(0)} = a_N \, g_k^n$$

и, таким образом, $r_{kN}^n + r_{Nk}^n = 0$. □

Свойство 3.2. *Элемент $r_{N-1,N-1}^n$ определяется функцией f и старшим коэффициентом оператора $\mathcal{R}_n$:*

$$r_{N-1,N-1}^n = N^2 \, a_N^2 \, f''.$$

Здесь штрихи означают взятие производных.

Доказательство. Из равенств (3) и (4) имеем

$$\begin{aligned} r^n_{N-1,N-1} &= \varphi^n_{N-1}\, g^n_{N-1} - g^n_{N-1}\, \varphi^{n-1}_{N-1} + N\, \varphi^n_N\, (g^n_{N-1})' - N\, g^n_N\, (\varphi^{n-1}_{N-1})' \\ &= g^n_{N-1}\, (a_{N-1} - a_{N-1}) + N\, \varphi^n_N\, (g^n_{N-1})' - N\, g^n_N\, (a_{N-1})' \\ &= N\, a_N\, (g^n_{N-1})'. \end{aligned}$$

Далее, поскольку

$$g^n_{N-1} = \varphi^n_{N-1}\, f + N\, \varphi^n_N\, f' - \varphi^{n-1}_{N-1}\, f = N\, a_N\, f',$$

то

$$r^n_{N-1,N-1} = N\, a_N\, (N\, a_N\, f')' = N^2\, a_N^2\, f''.$$

□

Теорема 2. *Оператор* $\operatorname{ad}^2_{\mathcal{R}_n,\mathcal{R}_{n-1}} f$ *вполне определяется элементами матрицы* $\mathrm{AD}^n(f)$, *то есть имеет место следующее равенство:*

$$\operatorname{ad}^2_{\mathcal{R}_n,\mathcal{R}_{n-1}} f = \sum_{k=0}^{2N} R^n_k \circ d^k,$$

где

$$R^n_k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} r^n_{i,k-i}, & k = 0; 1; \ldots ; N, \\ \displaystyle\sum_{i=k-N}^{N} r^n_{i,k-i}, & k = N+1; \ldots ; 2N. \end{cases} \tag{8}$$

Следствие. *Для того чтобы оператор* $\operatorname{ad}^2_{\mathcal{R}_n,\mathcal{R}_{n-1}} f$ *был нулевой, необходимо и достаточно выполнение системы равенств*

$$R^n_k = 0, \quad k = 0; 1; \ldots ; 2N.$$

Перед доказательством теоремы рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть $N = 2$. В качестве оператора $\mathcal{R}_n$ рассмотрим оператор, полученный из квадратичного деформацией при помощи потенциала Штелльмахера [10, 8, 2]:

$$\mathcal{R}^{(1)}_n = a_2\, d^2 + a_1\, d + \left(a_0 - \frac{n(n+1)}{x^2}\, a_2\right).$$

Его AD^n-матрица $\mathrm{AD}_1^n(x)$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1^2 - 2a_2a_0 - \dfrac{2a_2a_1n}{x} + \dfrac{2a_2^2n(n+1)}{x^2} & a_2a_1 - \dfrac{2a_2^2n}{x} \\ * & 0 & 2a_2^2 \\ * & * & 0 \end{pmatrix},$$

где $r_{ij}^n = -r_{ji}^n$.

В результате чего, для $n = 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{R}_n^{(1)},\, \mathcal{R}_{n-1}^{(1)}} x = 2a_2\, d + \left(a_1 - \frac{2a_2n}{x}\right),$$

$$\mathrm{ad}^2_{\mathcal{R}_n^{(1)},\, \mathcal{R}_{n-1}^{(1)}} x = 0.$$

Пример 2. Пусть $N = 3$. В качестве $\mathcal{R}_n$ рассмотрим следующий оператор из [12]:

$$\mathcal{R}_n^{(2)} = a_3\, d^3 + a_2\, d^2 + \left(a_1 - \frac{3n(n+1)}{x^2}\, a_3\right) \circ d + \\ + \left(a_0 + \frac{2n(n+1)(n+2)}{x^3}\, a_3 - \frac{n(n+1)}{x^2}\, a_2\right).$$

Его AD^n-матрица $\mathrm{AD}_2^n(x)$ имеет следующие элементы:

$$r_{00}^n = r_{11}^n = r_{22}^n = r_{33}^n = 0,$$

$$r_{01}^n = -r_{10}^n = \frac{3n(n+1)(n+2)(n+3)}{x^4}\, a_3^2 - \frac{4n(n+1)(n+2)}{x^3}\, a_3a_2 \\ + \frac{2n(n+1)}{x^2}\, a_2^2 - \frac{2n}{x}\, a_2a_1 + \frac{6n}{x}\, a_3a_0 + a_1^2 - 2a_2a_0,$$

$$r_{20}^n = -r_{02}^n = \frac{6n(n+1)(n+2)}{x^3}\, a_3^2 - \frac{6n(n+1)}{x^2}\, a_3a_2 + \\ + \frac{2n}{x}\, a_2^2 - a_2a_1 + 3a_3a_0,$$

$$r_{03}^n = -r_{30}^n = \frac{3n(n+1)}{x^2}\, a_3^2 - \frac{2n}{x}\, a_3a_2 - a_3a_1,$$

$$r_{12}^n = -r_{21}^n = \frac{9n(n+1)}{x^2}\, a_3^2 - \frac{6n}{x}\, a_3a_2 + 2a_2^2 - 3a_3a_1,$$

$$r_{31}^n = -r_{13}^n = \frac{6n}{x}\, a_3^2 - 2a_3a_2,$$

$$r_{23}^n = -r_{32}^n = 3a_3^2.$$

Из кососимметричности матрицы $\mathrm{AD}_2^n(x)$, по теореме 2 следует, что

$$\mathrm{ad}\,^2_{\mathcal{R}_n^{(2)},\,\mathcal{R}_{n-1}^{(2)}}\, x = 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Лемма 3.1. *Имеет место равенство*

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{R}_n,\,\mathcal{R}_{n-1}}\, f = \sum_{k=0}^{N} g_k^n \circ d^k,$$

где g_k^n *определяется формулой* (7).

Доказательство. По определению имеем

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{R}_n,\,\mathcal{R}_{n-1}}\, f = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k^n \circ d^k \circ f - f \circ \sum_{k=0}^{N} \varphi_k^{n-1} \circ d^k.$$

Применив правило Лейбница

$$d^k \circ f = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} f^{(k-s)} \circ d^s,$$

получим

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{\mathcal{R}_n,\,\mathcal{R}_{n-1}}\, f &= \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \varphi_k^n \circ f^{(k-s)} \circ d^s \right) - \sum_{k=0}^{N} f \circ \varphi_k^{n-1} \circ d^k \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{s=k}^{N} \binom{s}{k} \varphi_s^n \circ f^{(s-k)} - f \circ \varphi_k^{n-1} \right) \circ d^k \\
&= \sum_{k=0}^{N} g_k^n \circ d^k.
\end{aligned}$$

□

Замечание. В случае, когда $f \neq \mathrm{const}$, оператор $\mathrm{ad}_{\mathcal{R}_n,\,\mathcal{R}_{n-1}}\, f$ имеет порядок $N-1$, так как в силу равенств (3) и (4) имеют место равенства

$$g_N^n = 0, \quad g_{N-1}^n = N\, a_N\, f' \neq 0.$$

Доказательство теоремы 2. По лемме 3.1 имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}^2_{\mathcal{R}_n,\mathcal{R}_{n-1}} f &= \operatorname{ad}_{\mathcal{R}_n,\mathcal{R}_{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{N} g_k^n \circ d^k\right) = \sum_{k=0}^{N} \operatorname{ad}_{\mathcal{R}_n,\mathcal{R}_{n-1}}\left(g_k^n \circ d^k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{N}\left(\varphi_i^n \circ d^i \circ g_k^n \circ d^k - g_k^n \circ d^k \circ \varphi_i^{n-1} \circ d^i\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{N}\left(\varphi_k^n \circ d^k \circ g_i^n \circ d^i - g_k^n \circ d^k \circ \varphi_i^{n-1} \circ d^i\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{N}\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}\left(\varphi_k^n \circ (g_i^n)^{(k-s)} - g_k^n \circ (\varphi_i^{n-1})^{(k-s)}\right) \circ d^{i+s}\\
&= \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{N}\sum_{s=k}^{N}\binom{s}{k}\left(\varphi_s^n \circ (g_i^n)^{(s-k)} - g_s^n \circ (\varphi_i^{n-1})^{(s-k)}\right) \circ d^{i+k}\\
&= \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{N} r_{ik}^n \circ d^{i+k} = \sum_{k=0}^{2N}\left(\sum_{0\leqslant i,j\leqslant N \,|\, i+j=k} r_{ij}^n\right) \circ d^k = \sum_{k=0}^{2N} R_k^n \circ d^k
\end{aligned}$$

Доказательство завершено. □

Опишем теперь необходимые условия на функцию f, при которых имеет место равенство (5).

Лемма 3.2. *Для того чтобы имело место равенство*

$$\operatorname{ad}^2_{\mathcal{R}_n,\mathcal{R}_{n-1}} f = 0,$$

необходимо, чтобы функция f была линейной.

Доказательство. Следствие теоремы 2 дает равенство

$$R_{2N-2}^n = 0.$$

Таким образом, по свойствам 3.1 и 3.2 AD^n-матрицы, имеем

$$\begin{aligned}
R_{2N-2}^n &= r_{N-2,N}^n + r_{N-1,N-1}^n + r_{N,N-2}^n\\
&= r_{N-1,N-1}^n = N^2\, a_N^2\, f''.
\end{aligned}$$

Поскольку порядок оператора $\mathcal{R}_n$ равен $N\,(a_N \neq 0)$, то имеем $f'' = 0$. Лемма доказана. □

Замечание. В силу свойства 2.1 и условия неэлементарности деформаций будем считать, что

$$f(x) = x. \tag{9}$$

4. Алгебраические тождества. Этот пункт носит вспомогательный характер. В нем будут приведены несколько алгебраических тождеств, используемых при решении системы $R_k^n = 0$, определенной равенствами (8).

Положим для $p, q, s \in \mathbb{Z}_+$, $p \geqslant s$,

$$\alpha_s(p;q) = \sum_{m=0}^{s} \binom{p-m}{s-m} \binom{q+m}{m}.$$

Утверждение 4.1.

$$\alpha_s(p;q) = \binom{p+q+1}{s}.$$

Это свойство, например, сформулировано в качестве упражнения в [12, стр. 258, формула 7]. Дальнейшие свойства нетрудно выводятся из него на основе свойств биномиальных коэффициентов. Поэтому доказательства будут опущены.

Далее, для $q \in \mathbb{Z}_+$ и $p \in \mathbb{Z}$ обозначим через

$$(p, q) = p(p+1) \cdot \ldots \cdot (p+q-1), \quad q \geqslant 1,$$

$$(p, 0) = 1$$

символ Похгаммера и положим

$$A_s(p;q) = \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} (m-1)\,(p-1, s-m)\,(q, m); \tag{10}$$

$$B_s(p;q) = \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} m\,(p, s-m)\,(q, m-1). \tag{11}$$

Утверждение 4.2.

$$A_s(p;q) = \frac{s-1}{s+1}\, B_{s+1}(p-1;q) - (p-1)\, B_s(p;q).$$

Утверждение 4.3.

$$A_s(p;q) = (sq-p-q+1)\,(p+q,s-1);$$

$$B_s(p;q) = s\,(p+q,s-1).$$

Обозначим через

$$\delta^s_{pq} = \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} \left[p\,(m-1)\ \ (p-1,s-m)\,(q,p-1)\,(q,m) \right. \\ \left. -\,(p-1)\,m\,(p,s-m)\,(q-1,p)\,(q,m-1)\right]. \tag{12}$$

Утверждение 4.4.

$$\delta^s_{pq} = (s-p)\,(q,p+s-1);$$

$$\delta^s_{pq} + \delta^p_{sq} = 0;\quad \delta^p_{pq} = 0.$$

5. Решение системы $R^n_k = 0$. В этом пункте будет найдено решение переопределенной системы

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{m} r^n_{i,m-i} = 0, \quad m = 0;1;\ldots;N, \\ \displaystyle\sum_{i=m-N}^{N} r^n_{i,m-i} = 0, \quad m = N+1;\ldots;2N \end{cases} \tag{13}$$

$2N+1$ нелинейных дифференциальных уравнений с N переменными ($\{\varphi^n_k\}_{k=0}^{N-2}$ и f) и одним параметром ($n \in \mathbb{N}$). Здесь элементы r^n_{ij} определяются равенствами (6) и (7).

Напомним, что:

1). Два из этих уравнений являются тождествами, а именно

$$r^n_{NN} = 0,$$

$$r^n_{N-1,N} + r^n_{N,N-1} = 0.$$

2). Существенным является уравнение

$$r^n_{N-2,N} + r^n_{N-1,N-1} + r^n_{N,N-2} = 0$$

с решением $f = x$ (с точностью до преобразований $x \to ax+b$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{R}_0$ – линейный дифференциальный оператор порядка N с постоянными коэффициентами*

$$\mathcal{R}_0 = \sum_{k=0}^{N} a_k\, d^k.$$

Тогда дифференциальный оператор

$$\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_0 + \sum_{k=0}^{N-2} \left(\sum_{p=2}^{N-k} (-1)^{p-1}\,(p-1) \binom{p+k}{k} \frac{(n,p)}{x^p}\, a_{p+k} \right) \circ d^k$$

порядка N с переменными коэффициентами имеет AD^n*-матрицу* $\mathrm{AD}^n(x)$ *со следующими элементами*

$$r^n_{ik} = \sum_{p=0}^{N-i} \sum_{s=0}^{N-k} (-1)^{p+s}\,(s-p) \binom{p+i}{i} \binom{s+k}{k} \frac{(n,p+s-1)}{x^{p+s-1}}\, a_{p+i}\, a_{s+k}.$$

Здесь, как и ранее, $(n,p) = n\,(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+p-1)$, $(n,0) = 1$ – символ Похгаммера.

Доказательство. Положим для $k = 0; 1; \ldots; N$

$$\varphi^n_k = \sum_{p=0}^{N-k} \frac{c^n_{pk}}{x^p}, \quad c^n_{pk} = (-1)^{p-1}\,(p-1) \binom{p+k}{k} (n,p)\, a_{p+k}.$$

Очевидно, что φ^n_k являются коэффициентами оператора $\mathcal{R}_n$. Подсчитаем g^n_k.

$$\begin{aligned} g^n_k &= \sum_{p=0}^{N-k} \frac{c^n_{pk} - c^{n-1}_{pk}}{x^{p-1}} + (k+1) \sum_{p=0}^{N-k-1} \frac{c^n_{p,k+1}}{x^p} \\ &= (c^n_{0k} - c^{n-1}_{0k})\, x + \sum_{p=0}^{N-k-1} \frac{c^n_{p+1,k} - c^{n-1}_{p+1,k} + (k+1)\, c^n_{p,k+1}}{x^p} \\ &= \sum_{p=0}^{N-k-1} \frac{c^n_{p+1,k} - c^{n-1}_{p+1,k} + (k+1)\, c^n_{p,k+1}}{x^p}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$g^n_k = \sum_{p=0}^{N-k} \frac{b^n_{pk}}{x^{p-1}}, \quad b^n_{pk} = (-1)^{p-1}\, p \binom{p+k}{k} (n,p-1)\, a_{p+k}.$$

Далее,

$$\varphi^n_{s+k}(g^n_i)^{(s)} = (-1)^s \sum_{p=0}^{N-i} \sum_{m=0}^{N-k-s} \frac{(p-1,s)\, b^n_{pi}\, c^n_{m,k+s}}{x^{p+m+s-1}},$$

$$g^n_{s+k}(\varphi^{n-1}_i)^{(s)} = (-1)^s \sum_{p=0}^{N-i} \sum_{m=0}^{N-k-s} \frac{(p,s)\, c^{n-1}_{pi}\, b^n_{m,k+s}}{x^{p+m+s-1}}.$$

Обозначим через

$$\gamma^n_{pm}(s) = p\,(m-1)\,(p-1,s)\,(n,p-1)\,(n,m) - \\ -(p-1)\,m\,(p,s)\,(n-1,p)\,(n,m-1),$$

тогда

$$\varphi^n_{s+k}(g^n_i)^{(s)} - g^n_{s+k}(\varphi^{n-1}_i)^{(s)}$$

$$= (-1)^s \sum_{p=0}^{N-i} \sum_{m=0}^{N-k-s} (-1)^{p+m} \binom{p+i}{i} \binom{m+k+s}{k+s} \gamma^n_{pm}(s)\, \frac{a_{p+i}\, a_{m+k+s}}{x^{p+m+s-1}}.$$

$$r^n_{ik} = \sum_{s=0}^{N-k} \binom{k+s}{k} \left[\varphi^n_{s+k}(g^n_i)^{(s)} - g^n_{s+k}(\varphi^{n-1}_i)^{(s)}\right]$$

$$= \sum_{p=0}^{N-i} \sum_{s=0}^{N-k} \sum_{m=0}^{N-k-s} (-1)^{p+m+s} \binom{p+i}{i} \binom{k+s}{k} \binom{m+k+s}{k+s} \gamma^n_{pm}(s)\, \frac{a_{p+i}\, a_{m+k+s}}{x^{p+m+s-1}}$$

$$= \sum_{p=0}^{N-i} \sum_{s=0}^{N-k} \sum_{m=0}^{s} (-1)^{p+s} \binom{p+i}{i} \binom{k+m}{k} \binom{k+s}{k+m} \gamma^n_{p,s-m}(m)\, \frac{a_{p+i}\, a_{k+s}}{x^{p+s-1}}.$$

$$= \sum_{p=0}^{N-i} \sum_{s=0}^{N-k} (-1)^{p+s} \binom{p+i}{i} \binom{k+s}{k} \left(\sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} \gamma^n_{p,s-m}(m)\right) \frac{a_{p+i}\, a_{k+s}}{x^{p+s-1}}.$$

Далее

$$\sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} \gamma^n_{p,s-m}(m)$$

$$= \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} [p\,(s-m-1)\,(p-1,m)\,(n,p-1)\,(n,s-m) \\ -(p-1)\,(s-m)\,(p,m)\,(n-1,p)\,(n,s-m-1)]$$

$$= \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} \left[p\,(m-1)\,(p-1, s-m)\,(n, p-1)\,(n, m) \right.$$

$$\left. -(p-1)\, m\,(p, s-m)\,(n-1, p)\,(n, m-1) \right].$$

Тогда согласно обозначениям (10) и (11) имеем

$$\sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} \gamma^n_{p,s-m}(m) = p\,(n, p-1)\, A_s(p; n) - (p-1)\,(n-1, p)\, B_s(p; n).$$

Применив (12), по утверждению 4.4, получаем

$$\sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} \gamma^n_{p,s-m}(m) = \delta^s_{pn} = (s-p)\,(n, p+s-1).$$

Таким образом,

$$r^n_{ik} = \sum_{p=0}^{N-i} \sum_{s=0}^{N-k} (-1)^{p+s}\,(s-p) \binom{p+i}{i} \binom{s+k}{k} \frac{(n, p+s-1)}{x^{p+s-1}}\, a_{p+i}\, a_{s+k}.$$

Доказательство завершено. □

Следствие 5.1. AD^n-*матрица* $\mathrm{AD}^n(x)$ *оператора* $\mathcal{R}_n$ *является кососимметрической:*

$$r^n_{ii} = 0, \;\; i = 0; 1; \ldots; N,$$

$$r^n_{ik} + r^n_{ki} = 0, \;\; i, k = 0; 1; \ldots; N.$$

Следствие 5.2. *Система* (13) *имеет решением множество*

$$\left\{ \left(f(x),\, \{\varphi^n_k(x)\}^N_{k=0} \right) \;\; \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

где функции f *и* φ^n_k *задаются равенствами*

$$f(x) = x,$$

$$\varphi^n_k(x) = \sum_{p=0}^{N-k} (-1)^{p-1}\,(p-1) \binom{p+k}{k} \frac{(n, p)}{x^p}\, a_{p+k}, \;\; k = 0; 1; \ldots; N.$$

Замечание 5.1. Теорема 3 есть обобщение примеров 1 и 2.

Замечание 5.2. Наборы

$$\left\{\left(f(ax+b),\ \left\{\varphi_k^n\left(x+\frac{b}{a}\right)\right\}_{k=0}^{N}\right)\quad |\, a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0\quad n\in\mathbb{N}\right\},$$

(где функции f и φ_k^n определены следствием 5.2), повидимому, исчерпывают все множество решений системы (13).

Замечание 5.3. Из теоремы 2 вытекает, что если матрица $\mathrm{AD}^n(f)$ является кососимметрической, то оператор $\mathrm{ad}^2_{\mathcal{R}_n,\mathcal{R}_{n-1}} f$ тождественно нулевой. Примеры 1 и 2, лемма 3.2, и теорема 3 позволяют надеяться, что из равенства $\mathrm{ad}^2_{\mathcal{R}_n,\mathcal{R}_{n-1}} f = 0$ вытекает кососимметричность матрицы $\mathrm{AD}^n(f)$. Таким образом, мы предполагаем, что *для того чтобы оператор* $\mathrm{ad}^2_{\mathcal{R}_n,\mathcal{R}_{n-1}} f$ *был тождественно нулевым необходимо и достаточно, чтобы матрица* $\mathrm{AD}^n(f)$ *была кососимметрической.*

В заключении приведем теорему о калибровочной эквивалентности специального линейного дифференциального оператора с переменными коэффициентами.

Теорема 4. *Дифференциальный оператор*

$$\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_0 + \sum_{k=0}^{N-2}\left(\sum_{p=2}^{N-k}(-1)^{p-1}\,(p-1)\binom{p+k}{k}\frac{(n,p)}{x^p}\,a_{p+k}\right)\circ d^k$$

порядка N является n-калибровочно эквивалентным оператору с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{R}_0 = \sum_{k=0}^{N} a_k\, d^k$$

на $\mathbb{R}$ при помощи функции x^n, то есть

$$\mathrm{ad}^{n+1}_{\mathcal{R}_n,\mathcal{R}_0}\, x^n = 0.$$

Доказательство. На основании теорем 3 и 2 для операторов $\mathcal{R}_m$, $m = 1;2;\ldots$, выполнены условия теоремы 1 ($f = x$), что и требовалось. □

Замечание 5.4. Результат теоремы 4, может быть существенно обобщен на случай коэффициентов более общего вида. В случае $N = 2$ это сделано в работах [3, 8, 13].

Замечание 5.5. Теорема 4 может быть легко перенесена на случай деформаций по выделенной переменной линейных дифференциальных операторов в частных производных. В роли коэффициентов a_k будут выступать произвольные линейные дифференциальные операторы по другим переменным с постоянными коэффициентами.

Литература

1. Y. Berest, Y.Molchanov, *Fundamental solution for partial differential equations with reflection group invariance*, — J. Math. Phis. **36**(8) (1995), 4324–4339.
2. Ю. Ю. Берест, А. П. Веселов, *Принцип Гюйгенса и интегрируемость*, — УМН **49**, 6(300) (1994), 8–78.
3. Y. Berest, *Hierarchies of Huygens' Operators and Hadamard's Conjecture*, — Acta Appl. Math. **53** (1998), 125–185.
4. Y. Berest, *Solution of a restricted Hadamard Problem on Minkowski Spaces*, — Comm. Pure. Appl. Math. **50** (1997), 1019–1052.
5. Y. Y. Berest, I. M. Loutsenko, *Huygens' Principle in Minkowski Spaces and Soliton Solutions of the Korteweg-de Vries Equation*, — Commun. Math. Phys. **190** (1997), 1130-132.
6. Y. Berest, *The problem of lacunas and analysis on root systems*, — Trans. Amer. Math. Soc. **352**, No. 8 (2000), 3743–3776.
7. G. Wilson, *Bispectral commutative ordinary differential operators*, — J. reine angew. Math. **442** (1993), 177–204.
8. С. П. Хэкало, *Фундаментальное решение итерированного оператора типа Кэли–Гординга* — УМН **55**, 3 (2000), 191–192.
9. А. И. Комеч, *Линейные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами*, — В кн.: Итоги науки и техники, Совр. пробл. мат., Фундамент. направл. **31** (1988), 127 –261.
10. С. П. Хэкало, *Калибровочная эквивалентность дифференциальных операторов в частных производных*, В кн.: – Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Тезисы докладов, Суздаль (2002), сс. 138–140.
11. K. L. Stellmacher, *Ein Beispeil einer Huygennchen differentialgleichung*, — Nachr. Akad. Wiss., Gottingen Math. Phis. Kl. Pa. **10** (1953), 133–138.
12. S. Khekalo, *The gauge relation of differential operators and Huygens' principle*, — Day on Diffraction, Saint-Petersburg (2002), pp. 32–34.
13. Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко, *Сборник задач по дискретной математике* , — Наука, М. (1977).
14. С. П. Хэкало, *Изогюйгенсовы деформации однородных дифференциальных операторов, связанных со специальным конусом ранга три*, — Матем. заметки **70**, No. 6 (2001), 927–940.

Khekalo S. The gauge related deformations of the ordinary linear differential operators with constant coefficients.

The relations between coefficients of gauge related deformations and solutions of some system of ordinary non-linear differential equations are studied. These coefficients are found in the explicit form.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 14 октября 2003 г.