Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 309, 2004 г.

В. С. Альпина, Ю. А. Альпин

ПЕРМАНЕНТНЫЕ АССОЦИИРОВАННЫЕ МАТРИЦЫ И ТЕОРЕМА ШНЕЙДЕРА

Введение

Матрицы, составленные из миноров данной матрицы (так называемые ассоциированные матрицы) хорошо известны. Менее изучены матрицы, аналогичным образом составленные из перманентных миноров данной матрицы. В §1 статьи устанавливаются связи между элементами ассоциированной и перманентной ассоциированной матриц. При этом результаты Бруалди и Ньюмана [1] о перманентных минорах квадратной субстохастической матрицы обобщаются на прямоугольные матрицы. Доказано, что экстремальное значение спектрального радиуса, равное единице, достигается ассоциированной и перманентной ассоциированной матрицами одновременно. В §2 перманентные ассоциированные матрицы используются для усиления известной теоремы Шнейдера [2, 3] о произведениях собственных значений комплексной матрицы и для вывода нового неравенства для произведений корней комплексного многочлена (эти результаты были анонсированы в [4]).

§1. Перманентные ассоциированные матрицы

Перманент комплексной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times m$, $n \leqslant m$, определяется как число

$$\operatorname{per} A = \sum a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

где суммирование производится по всем последовательностям j_1, $j_2, \dots, j_n$ попарно различных индексов из множества $\{1, 2, \dots, m\}$.

Интерес главным образом представляют перманенты вещественных неотрицательных матриц. Нетрудно видеть, что перманент неотрицательной $n \times m$-матрицы A удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{per} A \leqslant \prod_{i=1}^{n} r_i, \tag{1}$$

где r_i – сумма элементов i-й строки A. Введем полезное для дальнейшего изложения понятие. Назовем матрицу дизъюнктной, если любой ее столбец содержит не более одного ненулевого элемента.

Лемма 1. *Для неотрицательной матрицы A равенство в (1) имеет место в точности тогда, когда A – дизъюнктная матрица.*

Доказательство. Имеет место равенство

$$\prod_{i=1}^{n} r_i = \sum a_{1j_1} \dots a_{nj_n},$$

где суммирование производится по всевозможным последовательностям $j_1, \dots, j_n$ чисел из множества $\{1, \dots, m\}$. Разобьём эту сумму на две: первая состоит из произведений, для которых индексы $j_1, \dots, j_n$ различны – эта сумма равна $\operatorname{per} A$. Вторая сумма включает произведения, в которых встречаются сомножители с одинаковыми вторыми индексами, то есть элементы матрицы, расположенные в одном столбце. Равенство в (1) достигается, если все члены второй суммы равны нулю. Это случается в точности тогда, когда ни один столбец A не содержит двух ненулевых элементов, то есть, когда A дизъюнктна.

Нам потребуется специализация леммы 1 для субстохастических матриц, то есть неотрицательных матриц, строчные суммы которых не больше единицы.

Лемма 2. *Перманент субстохастической матрицы A не превосходит единицы и равен единице тогда и только тогда, когда A – стохастическая дизъюнктная матрица.*

Доказательство. Утверждения леммы 2 следуют из леммы 1 и определений субстохастической и стохастической матриц.

Заметим, что квадратная стохастическая дизъюнктная матрица – это то же, что матрица перестановки (содержащая в каждой строке и каждом столбце ровно одну единицу).

Пусть $C_k(A)$ – k-я ассоциированная матрица для $n \times m$-матрицы A. Перманентная ассоциированная матрица $P_k(A)$ составляется аналогично ассоциированной, но её элементами служат не миноры, а перманентные миноры, то есть перманенты $k \times k$-подматриц A. Таким образом,

$$C_k(A) = \| \det A(\alpha \mid \beta) \|, \quad P_k(A) = \| \operatorname{per} A(\alpha \mid \beta) \|, \quad k = 1, 2, \dots, \min(n, m).$$

Здесь α – элемент множества $Q_{k,n}$ возрастающих последовательностей длины k элементов множества $\{1,\ldots,n\}$ и, аналогично, $\beta \in Q_{k,m}$. Подматрица $A(\alpha\,|\,\beta)$ находится на пересечении строк с номерами из α и столбцов с номерами из β. Ради однозначности составления ассоциированных матриц обычно полагают, что множества $Q_{k,n}$ лексикографически упорядочены. Отметим крайние случаи: $C_1(A) = P_1(A) = A$, а если $k = n = m$, то $C_k(A) = \det A$, $P_k(A) = \operatorname{per} A$.

Поскольку модуль детерминанта неотрицательной матрицы не превосходит её перманента, то модули элементов $C_k(A)$ не больше соответствующих элементов $P_k(A)$. Будем обозначать матрицу, составленную из модулей элементов комплексной матрицы X, символом $|X|$. Тогда последнее свойство может быть записано так:

$$|C_k(A)| \leqslant P_k(A), \qquad k = 1, 2, \ldots, \min(n, m).$$

Здесь и далее неравенства для матриц понимаются поэлементно.

Одно из примечательных свойств перманентной ассоциированной матрицы заключается в том, что её строчные суммы тоже являются перманентами. Чтобы убедиться в этом, примем во внимание следующее элементарное, но полезное замечание.

Лемма 3. *Перманент $k \times m$-матрицы равен сумме ее перманентных миноров порядка k.*

Символом $A(\alpha\mid -)$ ниже обозначается подматрица матрицы A, составленная из строк A с номерами из α. Аналогичный смысл имеет символ $A(-\mid \beta)$.

Рассмотрим строку матрицы $P_k(A)$, соответствующую подмножеству α (α-строку). Её составляют перманенты $k \times k$-матриц вида $A(\alpha\mid\beta)$, $\beta \in Q_{k,m}$. Рассматривая эти матрицы как подматрицы $k \times m$-матрицы $A(\alpha\mid -)$ и применяя к последней лемму 3, получаем следующее утверждение.

Лемма 4. *Сумма элементов α-строки матрицы $P_k(A)$ равна $\operatorname{per} A(\alpha\mid -)$:*

$$\sum_{\beta \in Q_{k,m}} \operatorname{per} A(\alpha\mid\beta) = \operatorname{per} A(\alpha\mid -), \quad k = 1, 2, \ldots, \min(n, m).$$

Теперь мы можем уточнить взаимоотношения ассоциированной и перманентной ассоциированной матриц.

Теорема 1. *Для произвольной неотрицательной $n \times m$-матрицы A и любого k, $1 \leqslant k \leqslant \min(n, m)$, справедливо неравенство*

$$|C_k(A)| \leqslant P_k(A). \tag{2}$$

При этом, если для $\alpha \in Q_{k,n}$ подматрица $A(\alpha \mid -)$ дизъюнктная, то α-строки матриц $|C_k(A)|$ и $P_k(A)$ равны. В частности, если A – дизъюнктная матрица, то матричное неравенство (2) обращается в равенство.

Доказательство. Доказательство требуется лишь для случая равенства строк, поскольку неравенство (2) уже обсуждалось выше. Итак, пусть $A(\alpha \mid -)$ – дизъюнктная матрица. Её квадратные подматрицы $A(\alpha \mid \beta)$, $\beta \in Q_{k,m}$, тоже, очевидно, дизъюнктны. В силу этого свойства развёрнутое выражение детерминанта, как и перманента, каждой из матриц $A(\alpha \mid \beta)$ содержит не более одного ненулевого элемента. Следовательно, $|\det A(\alpha \mid \beta)| = \operatorname{per} A(\alpha \mid \beta)$ для всех $\beta \in Q_{k,m}$, что и означает равенство α-строк в матрицах $|C_k(A)|$ и $P_k(A)$.

Теорема 2. *Пусть A – субстохастическая матрица. Тогда $P_k(A)$ (следовательно, в силу (2) и $|C_k(A)|$) тоже субстохастические матрицы. При этом для $k = 1, 2, \ldots, \min(n, m)$ и $\alpha \in Q_{k,n}$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) *подматрица $A(\alpha \mid -)$ стохастическая и дизъюнктная;*
2) *α-строка $P_k(A)$ стохастическая;*
3) *α-строка $|C_k(A)|$ стохастическая.*

Доказательство. Субстохастичность $P_k(A)$, а также эквивалентность утверждений 1) и 2) непосредственно следуют из лемм 2 и 4. Поскольку 2) влечёт 1), то справедливость импликации 2) $\Rightarrow$ 3) следует из замечания о равенстве α-строк в теореме 1. Наконец, пусть выполнено 3). Тогда, в силу неравенства (2), имеем следующее: стохастическая строка матрицы $|C_k(A)|$ покомпонентно не больше, чем соответствующая субстохастическая строка матрицы $P_k(A)$. Отсюда с необходимостью следует, что последняя строка тоже стохастическая. Таким образом, 3) влечёт 2), чем и завершается доказательство теоремы.

Как видно из теоремы 2, для всякого $\alpha \in Q_{k,n}$ α-строки в $|C_k(A)|$ и в $P_k(A)$ могут быть стохастическими лишь одновременно, причём, если они стохастические, то они равны. На это сходство матриц $|C_k(A)|$ и $P_k(A)$ будем ссылаться как на равенство их стохастических частей.

Следующая теорема резюмирует результаты теорем 1 и 2 применительно к субстохастическим матрицам.

Теорема 3. *Пусть A – прямоугольная субстохастическая $n \times m$-матрица. Тогда матрицы $|C_k(A)|$ и $P_k(A)$ тоже субстохастические. Они связаны неравенством $|C_k(A)| \leqslant P_k(A)$, причем их стохастические части равны. Матрица $P_k(A)$, где $k = 2, 3, \ldots, n$, является стохастической тогда и только тогда, когда A – стохастическая дизъюнктная матрица. В этом последнем случае имеет место равенство $|C_k(A)| = P_k(A)$.*

В работе [1] для квадратной субстохастической матрицы A порядка n доказано, что матрица $P_k(A)$ субстохастическая, причём при $k = 2, 3, \ldots, n$ она является стохастической тогда и только тогда, когда A – матрица перестановки. Теорема 3, очевидно, содержит это утверждение как частный случай.

Приведём ещё один результат из [1]. Пусть $p_k(A)$ – сумма всех перманентных миноров порядка k матрицы A. Это число изучалось в связи с проблемой Ван-дер-Вардена о перманенте двояко стохастической матрицы [5]. В статье [1] (см. также [5, с. 136]), для субстохастической матрицы A порядка n доказано неравенство

$$p_k(A) \leqslant \binom{n}{k}. \tag{3}$$

При этом для $k = 2, \ldots, n$ равенство имеет место тогда и только тогда, когда A – матрица перестановки.

Из теоремы 3 вытекает следующее обобщение неравенства (3) на прямоугольные матрицы.

Следствие. *Для прямоугольной субстохастической $n \times m$-матрицы A при любом k, $2 \leqslant k \leqslant \min(n, m)$, справедливо неравенство* (3). *Равенство в* (3) *имеет место в точности тогда, когда A – дизъюнктная стохастическая матрица.*

Доказательство. Число $p_k(A)$ равно сумме элементов субстохастической матрицы $P_k(A)$. Эта сумма не больше числа строк в $P_k(A)$, то есть не больше, чем $\binom{n}{k}$. При этом равенство имеет место лишь в том случае, когда $P_k(A)$ – стохастическая матрица, а последнее, согласно теореме 3, имеет место в точности тогда, когда A – дизъюнктная стохастическая матрица.

Ассоциированные матрицы обладают следующим замечательным свойством [2, 6]:

$$C_k(AB) = C_k(A)C_k(B). \tag{4}$$

Для перманентных ассоциированных матриц это равенство, вообще говоря, не выполняется, но в случае неотрицательных матриц ослабленный вариант свойства (4) всё же имеет место. А именно, справедлива

Теорема 4. *Если A и B – неотрицательные матрицы порядка n, то*

$$P_k(A)P_k(B) \leqslant P_k(AB), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

При этом, если для $\alpha \in Q_{k,n}$ матрица $AB(\alpha \mid -)$ дизъюнктная, то α-строки в левой и правой частях неравенства равны.

Доказательство. Рассмотрим (α, β)-элемент матрицы $P_k(AB)$, т.е. элемент, стоящий в α-строке и β-столбце. Он равен перманенту матрицы $AB(\alpha|\beta)$. Запишем желаемое неравенство (5) поэлементно:

$$\sum_{\omega \in Q_{k,n}} \operatorname{per} A(\alpha \mid \omega) \operatorname{per} B(\omega \mid \beta) \leqslant \operatorname{per} AB(\alpha \mid \beta). \tag{6}$$

Заметим, что $AB(\alpha \mid \beta) = A(\alpha \mid -)B(- \mid \beta)$, и применим формулу Бине–Коши для перманента произведения матриц [2, 5]:

$$\operatorname{per} AB(\alpha \mid \beta) = \sum_{\omega \in G_{k,n}} \frac{1}{\mu(\omega)} \operatorname{per} A(\alpha \mid \omega) \operatorname{per} B(\omega \mid \beta). \tag{7}$$

Здесь $G_{k,n}$ – множество неубывающих последовательностей длины k элементов из множества $\{1, \ldots, n\}$. Число $\mu(\omega)$ по определению равно $\prod_{i=1}^{n} \omega(i)!$, где $\omega(i)$ – число появлений элемента i в последовательности ω. Ясно, что $\mu(\omega) = 1$ для $\omega \in Q_{k,n}$. В формуле Бине–Коши для перманентов используется расширение понятия подматрицы: через $A(\alpha \mid \beta)$ $(\alpha,\ \beta \in G_{k,n})$ обозначается матрица порядка k с элементами $a_{\alpha_i \beta_j}$, где α_i – номер, стоящий в α на i-м месте, а символ β_j имеет аналогичный смысл.

Поскольку $Q_{k,n} \subset G_{k,n}$, то левая часть доказываемого неравенства (6) не превосходит правой части равенства (7), что и устанавливает справедливость неравенства (6).

Перейдём ко второму утверждению теоремы. Мы достигнем цели, если докажем следующую цепочку соотношений, дополняющую неравенство (5):

$$|C_k(AB)| = |C_k(A)C_k(B)| \leqslant |C_k(A)||C_k(B)| \leqslant P_k(A)P_k(B) \leqslant P_k(AB). \tag{8}$$

Равенство в (8) вытекает из (4), а первое из неравенств – проявление общей закономерности: $|RT| \leqslant |R||T|$ для любых комплексных R и T. Второе неравенство цепочки вытекает из (2) и очевидного свойства неотрицательных матриц:

$$R_1 \leqslant T_1,\ R_2 \leqslant T_2 \Rightarrow R_1T_1 \leqslant R_2T_2.$$

Итак, соотношения (8) верны. Теперь предположим, что $AB(\alpha\,|\,-)$ – дизъюнктная матрица. Согласно теореме 1, в этом случае α-строки матриц $|C_k(AB)|$ и $P_k(AB)$ совпадают. Но тогда, ввиду соотношений (8), совпадают и α-строки матриц $P_k(A)P_k(B)$ и $P_k(AB)$, что и требовалось доказать.

Неравенство (8) легко обобщается на любое число неотрицательных сомножителей:

$$\begin{aligned} &|C_k(A_1\cdots A_s)| \leqslant |C_k(A_1)|\cdots|C_k(A_s)| \\ &\leqslant P_k(A_1)\cdots P_k(A_s) \leqslant P_k(A_1\cdots A_s). \end{aligned} \tag{9}$$

При этом, если подматрица $A_1\cdots A_s(\alpha \mid -)$, где $\alpha \in Q_{k,n}$ дизъюнктная, то α-строки матриц из (9) совпадают.

Как частный случай неравенств (9) для квадратной неотрицательной матрицы A получаем соотношения

$$|C_k(A^s)| \leqslant |C_k(A)|^s \leqslant (P_k(A))^s \leqslant P_k(A^s), \quad k = 1,\dots,n,\ s = 1,2\dots \tag{10}$$

Перейдём к сравнительному изучению спектральных свойств матриц $C_k(A)$ и $P_k(A)$, где A – неотрицательная матрица. Основными инструментами при этом будут лемма Виландта (см. [6, с. 358] и [7, с. 580]):

$$|Q| \leqslant P \Rightarrow \rho(Q) \leqslant \rho(P)$$

и формула Гельфанда (см. [8, с. 233] и [7, с. 362]):

$$\rho(Q) = \lim_{s\to\infty} \|Q^s\|^{1/s}.$$

В приведённых утверждениях Q – комплексная матрица, P – неотрицательная матрица, и $\rho(Q)$ – спектральный радиус матрицы Q. В силу теоремы Перрона–Фробениуса, спектральный радиус $\rho(P)$ неотрицательной матрицы P является её собственным значением. Выше символ $\|Q\|$ обозначает любую кольцевую матричную норму. В дальнейшем изложении это обозначение относится исключительно к строчной норме

$$\|Q\| = \max_i \sum_j |q_{ij}|.$$

Из теоремы 1 и леммы Виландта немедленно следует, что для всякой неотрицательной матрицы A

$$\rho(C_k(A)) \leqslant \rho(P_k(A)). \tag{11}$$

Для субстохастической матрицы мы докажем более точное утверждение.

Для этого нам потребуются некоторые элементарные сведения о субстохастических матрицах. Свойство субстохастичности можно выразить в терминах строчной нормы: неотрицательная матрица является субстохастической, если её норма не превышает единицы. Норма субстохастической матрицы равна единице, если матрица содержит стохастическую строку. Легко доказать непосредственно, что произведение субстохастических матриц – снова субстохастическая матрица. Это утверждение следует также из кольцевого свойства нормы: $\|PQ\| \leqslant \|P\|\cdot\|Q\|$. Напомним, что спектральный радиус комплексной матрицы не превосходит ее нормы.

Теперь мы готовы доказать теорему, продолжающую тему теоремы 3 – о взаимоотношениях ассоциированной и перманентной ассоциированной матриц для субстохастической матрицы.

Теорема 5. *Пусть A – субстохастическая матрица порядка n. Тогда для нее справедливы неравенства (10); все матрицы, входящие в неравенства, субстохастические; стохастические части этих матриц совпадают. Для спектральных радиусов матриц $C_k(A)$ и $P_k(A)$ справедливы неравенства*

$$\rho(C_k(A)) \leqslant \rho(P_k(A)) \leqslant 1. \tag{12}$$

Экстремальное значение спектрального радиуса, равное единице, достигается на матрицах $C_k(A)$ и $P_k(A)$ одновременно, то есть

$$\rho(C_k(A)) = 1 \Leftrightarrow \rho(P_k(A)) = 1. \tag{13}$$

Доказательство. Ввиду теоремы 3, доказательства требует лишь последнее утверждение теоремы. Импликация $\Rightarrow$ в утверждении (13) следует из неравенств (12). Теперь предположим, что $\rho(P_k(A)) = 1$. Тогда $\rho((P_k(A))^s) = 1$, $s = 1, 2, \dots$. Из неравенств (10), леммы Виландта и приведенного выше кольцевого свойства нормы следуют неравенства

$$\rho(C_k(A^s)) = \rho((C_k(A))^s) \leqslant \rho((P_k(A))^s) \leqslant \rho(P_k(A^s)) \leqslant \|P_k(A^s)\| \leqslant 1,$$
$$s = 1, 2, \dots.$$

Из нашего предположения, очевидно, вытекает совпадение четырёх последних членов этой цепочки неравенств. Докажем, что на самом деле равны все члены цепочки. Действительно, равенства $\|P_k(A^s)\| = 1$, $s = 1, 2, \dots$, означают, что матрицы $P_k(A^s)$ содержат стохастические строки. Согласно теореме 2, матрицы $|C_k(A^s)|$ тоже содержат стохастические строки, то есть $\|C_k(A^s)\| = 1$, $s = 1, 2, \dots$. Отсюда по формуле Гельфанда следует желаемое равенство $\rho(C_k(A)) = 1$.

§2. О теореме Шнейдера

Будем считать, что собственные значения комплексной матрицы A порядка n занумерованы таким способом, что

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_n|.$$

Обозначим сумму модулей элементов i-й строки матрицы A символом r_i. Пусть $i_1, i_2, \dots, i_n$ – перестановка чисел $1, 2, \dots, n$, при которой

$$r_{i_1} \geqslant r_{i_2} \geqslant \dots \geqslant r_{i_n}. \tag{14}$$

Очевидно, $|\lambda_1| = \rho(A)$, $r_{i_1} = \|A\|$, а уже упомянутое соотношение между спектральным радиусом и нормой может быть записано в виде

$$|\lambda_1| \leqslant r_{i_1}. \tag{15}$$

Более точную информацию о спектре A дает теорема Шнейдера [2, 3]:

$$|\lambda_1 \cdots \lambda_k| \leqslant r_{i_1} \cdots r_{i_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Мы докажем следующее усиление теоремы Шнейдера.

Теорема 6. *Пусть A – комплексная матрица порядка n. Справедливы неравенства*

$$|\lambda_1 \cdots \lambda_k| \leqslant \rho(P_k(|A|)) \leqslant \max_{\alpha \in Q_{k,n}} \operatorname{per}|A|(\alpha \mid -), \quad k = 1, \ldots, n. \qquad (16)$$

Доказательство. Известно [2, 6], что спектр ассоциированной матрицы $C_k(A)$ состоит из всевозможных произведений по k собственных значений матрицы A. Отсюда следует, что число $|\lambda_1 \cdots \lambda_k|$ есть спектральный радиус k-й ассоциированной матрицы: $|\lambda_1 \cdots \lambda_k| = \rho(C_k(A))$. Нетрудно проверить, что для всякой комплексной матрицы Q верно неравенство $|\det Q| \leqslant \operatorname{per}|Q|$. Отсюда следуют поэлементные неравенства матриц:

$$|C_k(A)| \leqslant P_k(|A|), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Применяя неравенство Виландта, получаем, что $\rho(C_k(A)) \leqslant \rho(P_k(|A|))$. Таким образом, первое неравенство в (16) доказано. Докажем второе неравенство. Число $\max \operatorname{per}|A|(\alpha \mid -)$, как следует из леммы 4, равно строчной норме матрицы $P_k(|A|)$. Поэтому желаемое неравенство следует из неравенства (15), примененного к матрице $P_k(A)$. Теорема доказана.

Из неравенства (1) и принятого нами упорядочения (14) следует, что

$$\max_{\alpha \in Q_{k,n}} \operatorname{per}|A|(\alpha \mid -) \leqslant r_{i_1} \cdots r_{i_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (17)$$

Согласно лемме 1, равенство в (17) достигается тогда и только тогда, когда либо матрица $|A|$ содержит k-строчную дизъюнктную подматрицу, у которой набор строчных сумм совпадает с $r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}$, либо обе части (17) равны нулю. Последнее возможно в точности тогда, когда у матрицы A есть не более чем $k-1$ ненулевых строк. Таким образом, теорема 6 действительно уточняет теорему Шнейдера.

В качестве приложения теоремы 6 получим оценку для корней комплексного многочлена $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. Пусть A_f – сопровождающая матрица многочлена $f(x)$, то есть

$$A_f = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Корни нашего многочлена образуют спектр матрицы A. Несложные вычисления показывают, что

$$\operatorname{per}|A_f|(\alpha \mid -) = \sum_{j \in \alpha} |a_j| + 1,$$

если последний элемент последовательности α не равен n, а если равен, то $\operatorname{per}|A_f|(\alpha \mid -) = |a_n|$. Предположим, что $j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$ – такая перестановка чисел $1, 2, \dots, n-1$, что

$$|a_{j_1}| \geqslant |a_{j_2}| \geqslant \cdots \geqslant |a_{j_{n-1}}|. \tag{18}$$

Тогда, очевидно,

$$\max_{\alpha \in Q_{k,n}} \operatorname{per}|A_f|(\alpha \mid -) = \max(|a_{j_1}| + \cdots + |a_{j_k}| + 1, |a_n|).$$

Из последнего равенства и теоремы 6, примененной к матрице A_f, вытекает следующий результат.

Теорема 7. *Для корней комплексного многочлена* $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ *справедливы неравенства*

$$|\lambda_1 \cdots \lambda_k| \leqslant \max(|a_{j_1}| + \cdots + |a_{j_k}| + 1, |a_n|), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Если в упорядочение (18) включить и число $|a_n|$, то, упрощая и несколько огрубляя неравенства теоремы 7, получим неравенства

$$|\lambda_1 \cdots \lambda_k| \leqslant |a_{j_1}| + \cdots + |a_{j_k}| + 1, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В случае $k = 1$ имеем неравенство

$$|\lambda_1| = \max_i |\lambda_i| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| + 1,$$

известное как оценка Коши (см., напр., [7, с. 381]).

Литература

1. R. A. Brualdi, M. Newman, *Inequalities for the permanental minors of non-negative matrices.* — Canad. J. Math., **XVIII**, No. 3 (1966), 608–615.
2. М. Маркус, Х. Минк, *Обзор по теории матриц и матричных неравенств.* Наука, М. (1972).
3. А. Маршалл, И. Олкин, *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения.* Мир, М. (1983).
4. Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, *Перманентные неравенства для собственных значений.* Актуальные проблемы математики и механики. Материалы межд. научн. конф. Казань, 2000.

5. Х. Минк, *Перманенты.* Мир, М. (1982).
6. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Наука, М. (1967).
7. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М. (1989).
8. И. М. Глазман, Ю. И. Любич, *Конечномерный линейный анализ.* Наука, М. (1969).

Al'pina V. S., Al'pin Yu. A. Permanental compound matrices and Schneider's theorem.

Permanental compound matrices are investigated, compared with classical compound matrices, and used for estimating matrix eigenvalue products and root products of a polynomial.

Казанский государственный
технологический университет

Казанский
государственный университет

Поступило 12 мая 2004 г.