Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 309, 2004 г.

А. Джордж, Х. Д. Икрамов

ЗАМЕЧАНИЕ О КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ПАРЫ ОРТОПРОЕКТОРОВ

§1. Введение

Если выбрать случайным образом комплексные $n \times n$-матрицы A и B, то с вероятностью единица A и B не имеют нетривиального общего инвариантного подпространства. Однако ситуация может измениться, если выбор A и B тем или иным способом ограничен. В этом отношении большой интерес представляют приводимая ниже теорема и ее следствие.

Теорема 1. *Пусть A и B — диагонализуемые $n \times n$-матрицы и каждая имеет ровно два различных собственных значения. Тогда A и B имеют общее инвариантное подпространство размерности* 1 *или* 2.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *существует унитарное подобие, приводящее обе матрицы A и B к верхней блочно-треугольной форме с диагональными блоками порядков* 1 *и* 2.

Эта простая и элегантная матричная теорема не очень хорошо известна специалистам по теории матриц. Авторы настоящей заметки узнали о ней из обзорной статьи [1, §7], где она связывается с именем Блихфельдта (H. F. Blichfeldt [2, с. 143]).

Ниже, в §2, мы доказываем утверждение, несколько усиливающее теорему 1.

Теорема 2. *Пусть каждая из $n \times n$-матриц A и B имеет квадратичный минимальный многочлен. Тогда A и B имеют общее инвариантное подпространство размерности* 1 *или* 2.

В §3 мы применяем теорему 1 к выводу канонической формы для пары ортопроекторов P и Q. Затем мы обсуждаем смысл

Работа поддержана грантом OGP0008111 канадского совета по исследованиям в области естественных и технических наук.

нетривиальных элементов в матрицах, составляющих эту форму. Вполне естественно, что эти элементы оказываются тесно связанными с каноническими углами между подпространствами $\operatorname{im} P$ и $\operatorname{im} Q$.

§2. Доказательство теоремы 2

Без ограничения общности матрицы A и B можно считать невырожденными. В самом деле, для любых комплексных чисел z и w матрицы $A - zI$ и $B - wI$ имеют нетривиальное общее инвариантное подпространство тогда и только тогда, когда это верно для A и B.

Поскольку A и B имеют квадратичные минимальные многочлены, можно написать, что

$$A^2 = \alpha_1 A + \alpha_2 I \tag{1}$$

и

$$B^2 = \beta_1 B + \beta_2 I \tag{2}$$

для соответствующих чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и β_2, где $\alpha_2\beta_2 \neq 0$.

Теперь мы адаптируем к рассматриваемому случаю рассуждение из [3], где Д. Джокович (D.Ž. Djoković) получил каноническую форму для косого проектора. Если у A и B есть общий собственный вектор, то утверждение теоремы выполняется. В противном случае, пусть x есть собственный вектор матрицы AB:

$$ABx = \lambda x. \tag{3}$$

Умножая обе части слева на матрицу A, получаем

$$\lambda Ax = A^2Bx = (\alpha_1 A + \alpha_2 I)Bx = \alpha_1 ABx + \alpha_2 Bx = \alpha_1 \lambda x + \alpha_2 Bx. \tag{4}$$

Таким образом, вектор Ax принадлежит подпространству

$$\mathcal{L}_2 = \operatorname{span}\{x, Bx\}.$$

Теперь, опираясь на (2)–(4), легко показать, что $\mathcal{L}_2$ есть общее инвариантное подпространство матриц A и B.

3. Каноническая форма пары ортопроекторов

Пусть ортопроекторы P и Q отображают $\mathbf{C}^n$ соответственно на подпространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$. Применяя следствие 1, можно считать, что P и Q приведены к общей блочно-треугольной форме с диагональными блоками порядков 1 и 2. Поскольку P и Q — эрмитовы матрицы, эта блочно-треугольная форма является в действительности блочно-диагональной. Ее диагональные 1×1-блоки соответствуют общим собственным векторам матриц A и B и могут составлять одну из следующих четырех пар:

$$1 \qquad 1,$$

$$1 \qquad 0,$$

$$0 \qquad 1$$

или

$$0 \qquad 0.$$

Теперь мы исследуем диагональные 2×2-блоки. Пусть P_2 и Q_2 есть пара таких блоков. Тогда P_2 и Q_2 должны быть нетривиальными (т.е. отличными от нулевой и единичной матриц) ортопроекторами в $\mathbf{C}^2$.

Применим к P_2 и Q_2 унитарное подобие, которое приводит P_2 к диагональному виду

$$\tilde{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица, полученная из Q_2, принимает вид

$$\tilde{Q}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{pmatrix},$$

где $\beta \neq 0$. Поскольку $\tilde{Q}_2$ — нетривиальный проектор, должны выполняться соотношения

$$0 < \alpha < 1, \qquad 0 < \gamma < 1, \tag{5}$$

$$\alpha + \gamma = 1, \qquad \alpha\gamma = |\beta|^2. \tag{6}$$

Используя вспомогательное унитарное подобие с подходящей диагональной трансформирующей матрицей

$$D = (1,\ d),$$

можно заменить $\tilde{Q}_2$ матрицей

$$\hat{Q}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & |\beta| \\ |\beta| & 1-\alpha \end{pmatrix}, \tag{7}$$

сохранив при этом форму матрицы $\tilde{P}_2$:

$$\hat{P}_2 = \tilde{P}_2.$$

Теперь мы выясним смысл чисел α и $|\beta|$ в формуле (7). Переписывая второе соотношение в (6) как

$$\alpha(1-\alpha) = |\beta|^2,$$

или

$$(\alpha - \frac{1}{2})^2 + |\beta|^2 = \frac{1}{4},$$

можно считать, что

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t, \qquad |\beta| = \frac{1}{2}\sin 2t$$

для подходящего числа t в интервале

$$0 < t < \frac{\pi}{2}$$

(см. (5)). Отсюда следует, что матрицу $\hat{Q}_2$ можно записать в виде

$$\hat{Q}_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \cos t \sin t \\ \cos t \sin t & \sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} (\, \cos t \quad \sin t \,).$$

Предположим, что описанные выше преобразования проделаны для всех диагональных 2×2-блоков в общей блочно-диагональной форме матриц P и Q. В результате будут получены пары блоков

$$P_2^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Q_2^{(k)} = \begin{pmatrix} \cos^2 t_k & \cos t_k \sin t_k \\ \cos t_k \sin t_k & \sin^2 t_k \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

Вычислим, наконец, произведение PQ, используя базис, отвечающий преобразованной блочно-диагональной форме. Это произведение является блочно-диагональной матрицей; ее диагональные 1×1-элементы суть единицы либо нули, причем единицы соответствуют комбинации

1 1

в общей блочно-диагональной форме матриц P и Q. Диагональные 2×2-блоки матрицы PQ имеют вид

$$P_2^{(k)} Q_2^{(k)} = \begin{pmatrix} \cos^2 t_k & \cos t_k \sin t_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, \dots, m. \tag{9}$$

Сингулярные числа блока в этой формуле суть $\cos t_k$ и 0.

Положим

$$r = \min\{\mathrm{rank}\ P,\ \mathrm{rank}\ Q\}.$$

Напомним (см. [4] или [5]), что канонические углы между подпространствами

$$\mathcal{L} = \mathrm{im}\ P \qquad \text{и} \qquad \mathcal{M} = \mathrm{im}\ Q \tag{10}$$

определяются соотношениями

$$0 \leqslant \phi_1(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \leqslant \dots \leqslant \phi_r(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \leqslant \frac{\pi}{2},$$
$$\cos \phi_i(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \sigma_i(PQ), \qquad i = 1, \dots, r,$$

где $\sigma_i(PQ)$ суть сингулярные числа матрицы PQ, расположенные в порядке невозрастания.

Если назвать канонической формой ортопроекторов P и Q построенную выше общую блочно-диагональную форму, то результаты нашего исследования можно суммировать следующим образом.

Теорема 3. *Углы $t_1, \dots, t_m$ в матрицах* (8) *суть нетривиальные (т.е., отличные от нуля) канонические углы между подпространствами, указанными в* (10).

Отсюда следует, что если вместо блоков P_2 приводить к диагональному виду блоки Q_2, то полученные в результате блоки $\hat{P}_2$ будут иметь ту же форму (7), какую прежде имели блоки $\hat{Q}_2$. Тем самым, как и следовало ожидать, P и Q играют симметричную роль по отношению к своей общей канонической форме.

Литература

1. D. B. Wales, *Connections between finite linear groups and linear algebra.* — Linear Multilinear Algebra, **7** (1979), 267–279.
2. H. F. Blichfeldt, *Finite Collineation Groups.* University of Chicago Press (1917).
3. D. Ž. Djoković, *Unitary similarity of projectors.* — Aeq. Math., **42** (1991), 220–224.

4. G. W. Stewart, J. Sun, *Matrix Perturbation Theory*. Academic Press (1990).
5. H. K. Wimmer, *Canonical angles of unitary spaces and perturbations of direct complements*. — Linear Algebra Appl., **287** (1999), 373–379.

George A., Ikramov Kh. D. A note on the canonical form for a pair of orthoprojectors.

Let P and Q be orthoprojectors in $\mathbf{C}^n$. The canonical form for P and Q is constracted as their common block diagonal form with diagonal blocks of order one or two. The entries in the 2×2 blocks of the canonical form are then interpreted in terms of the canonical angles between the subspaces $\mathcal{L} = \operatorname{im} P$ and $\mathcal{M} = \operatorname{im} Q$.

School of Computer Science,
University of Waterloo,
Waterloo, Ontario, Canada
Московский
государственный университет

Поступило 2 февраля 2004 г.