Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 309, 2004 г.

С. Н. Ильин

О БЕСКОНЕЧНЫХ ОГРАНИЧЕННО–ТЕПЛИЦЕВЫХ ПРОДОЛЖЕНИЯХ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ

В настоящей статье исследуются бесконечные ограниченно-теплицевы продолжения наименьшего ранга прямоугольных теплицевых матриц. Получены необходимые и достаточные условия единственности такого продолжения.

В работе используются обозначения и термины, принятые в [1]. Матрица $T = (t_{ij})$ с элементами из поля F называется теплицевой, если $t_{ij} = t_{pq}$ при $i - j = p - q$. Конечная или бесконечная матрица, содержащая матрицу T в качестве подматрицы, совпадающей с левым верхним углом, называется продолжением матрицы T. Среди продолжений теплицевых матриц наиболее изучены теплицевы продолжения наименьшего ранга (см., напр., [2]). Мы же интересуемся бесконечными продолжениями более общего вида.

Пусть

$$T = \begin{pmatrix} t_l & t_{l+1} & \dots & t_{l+m-1} \\ t_{l-1} & t_l & \dots & t_{l+m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{pmatrix}$$

— теплицева $l \times m$-матрица. Бесконечное продолжение $T_{\mathbb{N}}$, строки и столбцы которого занумерованы натуральными числами, называется ограниченно-теплицевым, если свойство теплицевости ($i - j = p - q \Rightarrow t_{ij} = t_{pq}$) справедливо при $1 - l \leqslant i - j \leqslant m - 1$; таким образом, $T_{\mathbb{N}}$ содержит теплицеву диагональную "полосу", включающую в себя исходную матрицу T. Ограниченно-теплицевы продолжения обладают следующим свойством [1, теорема 2]: наименьший из рангов бесконечных ограниченно-теплицевых продолжений теплицевой матрицы T совпадает с наименьшим из рангов ее бесконечных теплицевых продолжений. Другими словами, среди бесконечных ограниченно-теплицевых продолжений наименьшего ранга всегда есть теплицево продолжение. Это дополняет результаты из [2] в том отношении, что невозможно уменьшить ранг продолжения за счет отказа от теплицевости вне содержащей исходную матрицу диагональной полосы. Основная цель данной работы заключается в том, чтобы выяснить, в какой степени расширение множества допустимых продолжений до ограниченно-теплицевых влияет на множество продолжений наименьшего ранга.

Обозначив через $\mathrm{rt}(T)$ и $\mathrm{rlt}(T)$ наименьшие из рангов бесконечных теплицевых и, соответственно, ограниченно-теплицевых продолжений матрицы T, выразим приведенное выше утверждение равенством

$$\mathrm{rt}(T) = \mathrm{rlt}(T). \tag{1}$$

По аналогии с продолжениями вида $T_{\mathbb{N}}$ введем в рассмотрение ограниченно-теплицевы продолжения вида $T_{\mathbb{Z}}$ — бесконечные матрицы, строки и столбцы которых занумерованы целыми числами. Каждое теплицево (ограниченно-теплицево) продолжение $T_{\mathbb{Z}}$ содержит соответствующее теплицево (ограниченно-теплицево) продолжение $T_{\mathbb{N}}$ в качестве подматрицы, совпадающей с правым нижним углом. Легко видеть, что в силу свойства теплицевости величина $\mathrm{rt}(T)$ не зависит от того, определяем ли мы ее относительно продолжений вида $T_{\mathbb{N}}$ или относительно продолжений вида $T_{\mathbb{Z}}$. Ввиду (1) и очевидных неравенств

$$\mathrm{rlt}(T) \leqslant \min_{T_{\mathbb{Z}} \in \mathcal{L}} \mathrm{rank}(T_{\mathbb{Z}}) \leqslant \min_{T_{\mathbb{Z}} \in \mathcal{T}} \mathrm{rank}(T_{\mathbb{Z}}) = \mathrm{rt}(T),$$

где $\mathcal{T}$ и $\mathcal{L}$ — множества теплицевых и, соответственно, ограниченно-теплицевых продолжений матрицы T, аналогичное утверждение справедливо и для величины $\mathrm{rlt}(T)$. В дальнейшем мы рассматриваем только продолжения вида $T_{\mathbb{Z}}$, поэтому именно к ним и будем относить величины $\mathrm{rt}(T)$ и $\mathrm{rlt}(T)$.

Сопоставим теплицевой $l \times m$-матрице T набор теплицевых матриц

$$T_1 = (t_1 \ \ldots \ t_n), \quad T_2 = \begin{pmatrix} t_2 & \ldots & t_n \\ t_1 & \ldots & t_{n-1} \end{pmatrix}, \ldots, \quad T_n = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix},$$

где $n = l+m-1$. Легко понять, что l-я матрица набора совпадает с T и что все указанные матрицы имеют одно и то же множество бесконечных ограниченно-теплицевых продолжений, точнее говоря, каждое бесконечное продолжение одной матрицы получается из соответствующего продолжения другой матрицы сдвигом на некоторое число позиций влево или вправо. Поэтому без потери общности можно считать, что $T = T_1$. Ясно, что каждое теплицево продолжение $T_{\mathbb{Z}}$ однозначно определяется любой своей строкой $(\ldots, t_0, t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots)$. Элементы строк ограниченно-теплицевых продолжений матрицы T будем обозначать через $t_j^{(i)}$, опуская номер i строки для элементов, попадающих в полосу теплицевости.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{rt}(T) = r < (n+1)/2$. *Тогда существует единственное бесконечное ограниченно-теплицево продолжение ранга* r, *причем оно теплицево.*

Доказательство. С учетом (1) достаточно доказать только единственность. Нам понадобятся две леммы из [1]:

Лемма 1. *Пусть* $\mathrm{rt}(T) = r$. *Тогда* $\mathrm{rank}(T_r) = \min\{r, n-r+1\}$.

Лемма 2. *Пусть* $\mathrm{rt}(T) = r$ *и* $1 \leqslant k \leqslant n-r+1$. *Тогда ранг матрицы* T_k *совпадает с рангом ее подматрицы, образованной* r *первыми или* r *последними столбцами.*

Пусть $T_{\mathbb{Z}}$ — ограниченно-теплицево продолжение ранга r матрицы T. Согласно условию теоремы имеем $r < n-r+1$, что в силу леммы 1 влечет $\mathrm{rank}(T_r) = r$. Тогда ввиду леммы 2 миноры

$$M = \begin{vmatrix} t_r & \ldots & t_{2r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1 & \ldots & t_r \end{vmatrix} \text{ и } M' = \begin{vmatrix} t_{n-r+1} & \ldots & t_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n-2r+2} & \ldots & t_{n-r+1} \end{vmatrix}$$

отличны от нуля. Поскольку все миноры порядка $r+1$ в матрице $T_{\mathbb{Z}}$ равны 0, то элемент $t_{n+1}^{(i)}$ строки с номером i, следующий за элементом t_n, должен удовлетворять условию

$$\begin{vmatrix} t_{r+1} & \ldots & t_{2r} & t_{n+1}^{(i)} \\ t_r & \ldots & t_{2r-1} & t_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1 & \ldots & t_r & t_{n-r+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив этот минор по первой строке, придем к равенству вида $Mt_{n+1}^{(i)} + C = 0$, где $M \neq 0$, откуда $t_{n+1}^{(i)} = -C/M$ для всех i. Вообще, если уже доказано, что элементы $t_m^{(i)}$ не зависят от i при $m = n+1, \ldots, n+k$, то аналогичное утверждение для элементов

$t^{(i)}_{n+k+1}$ получается применением приведенных выше рассуждений к условию

$$\begin{vmatrix} t_{r+1} & \dots & t_{2r} & t^{(i)}_{n+k+1} \\ t_r & \dots & t_{2r-1} & t_{n+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & \dots & t_r & t_{n-r+k+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Подобным образом, используя отличный от нуля минор M', устанавливается независимость от i элементов $t^{(i)}_m$ при $m \leqslant 0$. □

Теорема 2. *Пусть $r = \mathrm{rt}(T) \geqslant (n+1)/2$ и поле F содержит более двух элементов. Тогда для T*

1) *существует бесконечное ограниченно-теплицево продолжение ранга r, не являющееся теплицевым;*

2) *существуют по крайней мере два бесконечных теплицевых продолжения ранга r.*

Доказательство. Построим продолжения с указанными свойствами. Достаточно рассмотреть случай $r = (n+1)/2$. В самом деле, если $r > (n+1)/2$, то увеличим длину строки T, приписав к ней справа нужное количество элементов $t_{n+1}, \dots ,t_{n+k}$ бесконечного теплицева продолжения ранга r так, чтобы длина n' новой строки удовлетворяла равенству $r = (n'+1)/2$. Теперь достаточно построить требуемые продолжения строки длины n'.

Итак, пусть $r = (n+1)/2$. Докажем три вспомогательные леммы.

Лемма 3. *Если в матрице A любые r подряд идущих строк линейно независимы, а любые $r+1$ подряд идущих строк линейно зависимы, то $\mathrm{rank}(A) = r$.*

Доказательство. Фиксируем r идущих подряд строк $a_1, \dots, a_r$ матрицы A. Поскольку система $\{a_1, \dots, a_r\}$ линейно независима, а система $\{a_1, \dots, a_r, a_{r+1}\}$ линейно зависима, то строка a_{r+1} линейно выражается через $a_1, \dots, a_r$. Аналогично, система $\{a_2, \dots, a_{r+1}\}$ линейно независима, а система $\{a_2, \dots, a_{r+1}, a_{r+2}\}$ линейно зависима, поэтому строка a_{r+2} линейно выражается через $a_2, \dots, a_{r+1}$ и, следовательно, выражается через $a_1, \dots, a_r$, и так далее. Таким образом, все строки матрицы A являются линейными комбинациями ее r линейно независимых строк, откуда $\mathrm{rank}(A) = r$. □

Положим
$$K(x)=\begin{vmatrix} t_{r-1} & t_r & \dots & t_{n-1} \\ t_{r-2} & t_{r-1} & \dots & t_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_r \\ x & t_1 & \dots & t_{r-1} \end{vmatrix}.$$

Лемма 4. *Пусть* $\mathrm{rt}(T)=r=(n+1)/2$. *Тогда уравнение* $K(x)=0$ *имеет не более одного корня.*

Доказательство. Так как $r=(n+1)/2$, то $r=n-r+1$, поэтому в силу леммы 1 имеем $\mathrm{rank}(T_r)=r$ и $M=\begin{vmatrix} t_r & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots \\ t_1 & \dots & t_r \end{vmatrix}\neq 0$. Очевидно, уравнение $K(x)=0$ можно преобразовать к виду $Ax+B=0$, где $A,B\in F$, $A=\begin{vmatrix} t_r & \dots & t_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_2 & \dots & t_r \end{vmatrix}$. Предположив, от противного, существование, по крайней мере, двух корней данного уравнения, приходим в силу его линейности к тому, что его корнями являются все элементы поля F, то есть $K(a)=0$ для всех $a\in F$. Очевидно, это возможно только при $A=0$, так что $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} t_r & \dots & t_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_2 & \dots & t_r \end{pmatrix}<r-1$. Столбцы $(t_r,\dots,t_2,t_1)^t$, ... , $(t_{n-1},\dots,t_r,t_{r-1})^t$ входят в отличный от нуля минор M, следовательно, они линейно независимы, поэтому равенство $K(a)=0$ означает, что столбец $(t_{r-1},\dots,t_1,a)^t$ является линейной комбинацией столбцов $(t_r,\dots,t_2,t_1)^t$, ... , $(t_{n-1},\dots,t_r,t_{r-1})^t$. Но тогда укороченный столбец $(t_{r-1},\dots,t_1)^t$ линейно выражается через столбцы $(t_r,\dots,t_2)^t$, ... , $(t_{n-1},\dots,t_r)^t$, откуда
$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} t_{r-1} & t_r & \dots & t_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_r \end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} t_r & \dots & t_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_2 & \dots & t_r \end{pmatrix}<r-1,$$
что противоречит линейной независимости строк $(t_{r-1},\dots,t_{n-1})$, ... , $(t_1,\dots,t_r)$, входящих в отличный от нуля минор M. $\square$

Лемма 5. *Пусть* $\mathrm{rt}(T)=r=(n+1)/2$. *Если в поле* F *есть, по крайней мере, два элемента, не являющиеся корнями уравнения* $K(x)=0$, *то для матрицы* T

1) *существует бесконечное ограниченно-теплицево продолжение ранга r, не являющееся теплицевым;*

2) *существуют, по крайней мере, два бесконечных теплицевых продолжения ранга r.*

Доказательство. 1) Построим искомое продолжение $T_{\mathbb{Z}}$. Как и в доказательстве леммы 4, из равенства $r = (n+1)/2$ выводим $M = \begin{vmatrix} t_r & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots \\ t_1 & \dots & t_r \end{vmatrix} \neq 0$. Согласно условию леммы найдутся два различных элемента $a_1, a_2 \in F$ такие, что $K(a_i) \neq 0$ $(i = 1, 2)$. Положим

$$t_0^{(i)} = \begin{cases} a_1, & \text{если } i \text{ нечетно} \\ a_2, & \text{если } i \text{ четно.} \end{cases}$$

Элементы $t_{-(k+1)}^{(i)}$ при уже найденных для всех i элементах $t_0^{(i)}$, $\dots$, $t_{-k}^{(i)}$ будем находить из рекуррентных соотношений, определяемых равенствами

$$\begin{vmatrix} t_{-(k-r+1)}^{(i-r)} & t_r & \dots & t_n \\ t_{-(k-r+2)}^{(i-r+1)} & t_{r-1} & \dots & t_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-k}^{(i-1)} & t_1 & \dots & t_r \\ t_{-(k+1)}^{(i)} & t_0^{(i)} & \dots & t_{r-1} \end{vmatrix} = 0, \qquad k \geqslant 0. \tag{3}$$

Очевидно, равенства (3) можно преобразовать к виду $Mt_{-(k+1)}^{(i)} + C(t_{-k}^{(i-1)}, \dots) = 0$, где $M \neq 0$, так что элементы $t_{-(k+1)}^{(i)}$ при всех i определены корректно. Аналогично, элементы $t_{n+k}^{(i)}$ при уже найденных для всех i элементах $t_{n+1}^{(i)}$, $\dots$, $t_{n+k-1}^{(i)}$ будем находить из рекуррентных соотношений, определяемых условиями

$$\begin{vmatrix} t_r & \dots & t_n & t_{n+k}^{(i)} \\ t_{r-1} & \dots & t_{n-1} & t_{n+k-1}^{(i+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & \dots & t_r & t_{r+k}^{(i+r-1)} \\ t_0^{(i+r)} & \dots & t_{r-1} & t_{r+k-1}^{(i+r)} \end{vmatrix} = 0, \qquad k \geqslant 1. \tag{4}$$

Поскольку равенства (4) приводятся к виду $K(t_0^{(i+r)})t_{n+k}^{(i)} + D(t_{n+k-1}^{(i+1)}, \dots) = 0$, причем коэффициент $K(t_0^{(i+r)})$ по построению равен либо $K(a_1)$, либо $K(a_2)$ и, следовательно, как в том, так и в другом случае отличен от нуля, то элементы $t_{n+k}^{(i)}$ при каждом i также определены корректно. Нетрудно убедиться в том, что построенное ограниченно-теплицево (но не теплицево) продолжение $T_{\mathbb{Z}}$ удовлетворяет условиям леммы 3 и поэтому имеет ранг r.

2) Для построения искомых теплицевых продолжений $T'_{\mathbb{Z}}$ и $T''_{\mathbb{Z}}$ достаточно повторить рассуждения п.1), положив $t_0^{'(i)} = a_1$ и $t_0^{''(i)} = a_2$ для всех i. $\square$

Завершим доказательство теоремы 2. Согласно лемме 4 уравнение $K(x) = 0$ имеет не более одного корня. Поэтому в поле F есть по крайней мере два элемента, не являющиеся корнями уравнения $K(x) = 0$, и требуемое утверждение немедленно следует из леммы 5. $\square$

Теорема 3. *Пусть* $\mathrm{rt}(T) = r$ *и* F *— поле из двух элементов. Тогда бесконечное ограниченно-теплицево продолжение ранга* r *матрицы* T, *не являющееся теплицевым,*

1) *при* $r < (n+1)/2$ *не существует;*
2) *при* $r > (n+1)/2$ *существует;*
3) *при* $r = (n+1)/2$ *существует тогда и только тогда, когда* $n > 1$ *и*

$$A = \begin{vmatrix} t_r & \dots & t_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_2 & \dots & t_r \end{vmatrix} = 0.$$

Сформулированное утверждение остается верным, если выражение "ограниченно-теплицево продолжение ранга r *матрицы* T, *не являющееся теплицевым" заменить на "два теплицевых продолжения ранга* r *матрицы* T".

Доказательство. Справедливость утверждения в случае 1) вытекает из теоремы 1.

Рассмотрим случай 3). Начнем с части "тогда, когда". Действительно, в силу леммы 4 и условия $A = 0$ уравнение $K(x) = 0$ не имеет корней, следовательно, в поле F есть два различных элемента — 0 и 1, не являющиеся корнями уравнения $K(x) = 0$. Осталось применить лемму 5.

Перейдем к части "только тогда, когда". Достаточно доказать, что если $n = 1$ или $A \neq 0$, то бесконечное ограниченно-теплицево продолжение ранга r единственно. В самом деле, если

$n=1$, то $r=(n+1)/2=1$, так что единственный элемент матрицы T равен 1. Легко проверяется, что равенство $\begin{vmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$ в поле из двух элементов верно только при $x=y=1$, поэтому единственное возможное ограниченно-теплицево продолжение ранга 1 матрицы T — это продолжение, все элементы которого равны 1.

Пусть теперь $A \neq 0$. Тогда уравнение $K(x)=0$ имеет ровно одно решение $a \in F$. Заметим, что, как и в доказательстве леммы 4, условие $r=(n+1)/2$ влечет $M \neq 0$. Следовательно, входящие в M строки $\bar{c}_1=(t_1,t_2,\ldots,t_r)$, ..., $\bar{c}_{r-1}=(t_{r-1},t_r,\ldots,t_{n-1})$ линейно независимы, поэтому равенство $K(a)=0$ означает, что строка $(a,t_1,\ldots,t_{r-1})$ является их линейной комбинацией:

$$(a,t_1,\ldots,t_{r-1}) = \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k \bar{c}_k. \tag{5}$$

Рассмотрим определитель

$$L(x) = \begin{vmatrix} t_r & t_{r+1} & \ldots & t_n & x \\ t_{r-1} & t_r & \ldots & t_{n-1} & t_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_r & t_{r+1} \\ a & t_1 & \ldots & t_{r-1} & t_r \end{vmatrix}.$$

Ввиду (5) определитель $L(x) = M(t_r - \sum\limits_{k=1}^{r-1} \lambda_k t_{r+k})$ не зависит от x. Нетрудно видеть, что $t_r \neq \sum\limits_{k=1}^{r-1} \lambda_k t_{r+k}$, поскольку иначе строка $(a,t_1,\ldots,t_{r-1},t_r)$ являлась бы линейной комбинацией строк $(t_{r-1},t_r,\ldots,t_{n-1},t_n)$, ...,$(t_1,t_2,\ldots,t_r,t_{r+1})$; в частности, укороченная строка $(t_1,\ldots,t_{r-1},t_r)$ являлась бы линейной комбинацией строк $(t_r,\ldots,t_{n-1},t_n)$, ..., $(t_2,\ldots,t_r,t_{r+1})$, что противоречит условию $M \neq 0$. Таким образом, вне зависимости от выбора x определитель L порядка $r+1$ отличен от нуля. Следовательно, в ограниченно-теплицевом продолжении $T_{\mathbb{Z}}$ ранга r ни один из элементов $t_0^{(i)}$ $(i \in \mathbb{Z})$ не может быть равен a. Но в поле F всего два элемента, поэтому $t_0^{(i)} = t_0$ при любом i, где t_0 — второй элемент поля. Очевидно, $T_{\mathbb{Z}}$ теперь можно рассматривать как бесконечное ограниченно-теплицево продолжение ранга r строки

$\tilde{T} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ длины $\tilde{n} = n + 1$, причем $r = \tilde{n}/2 < (\tilde{n} + 1)/2$, что в силу теоремы 1 влечет единственность продолжения $T_{\mathbb{Z}}$.

Рассмотрим оставшийся случай 2). Итак, пусть $r > (n + 1)/2$, следовательно, $r \geqslant (n+2)/2$. Без потери общности можно считать, что $r = (n + 2)/2$, поскольку в противном случае длину строки T можно увеличить до нужной величины, приписав к ней соответствующие элементы бесконечного теплицева продолжения ранга r. Поскольку $n \geqslant 2$ и $n - r + 1 = r - 1$, то матрица T_r имеет вид

$$\begin{pmatrix} t_r & \dots & t_n \\ t_{r-1} & \dots & t_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_2 & \dots & t_r \\ t_1 & \dots & t_{r-1} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определители

$$N_1 = \begin{vmatrix} t_{r-1} & \dots & t_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_1 & \dots & t_{r-1} \end{vmatrix}, \quad N_2 = \begin{vmatrix} t_r & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots \\ t_2 & \dots & t_r \end{vmatrix}$$

и покажем, что хотя бы один из них равен нулю. Воспользуемся замечанием к теореме 1 из [1], согласно которому величина $\mathrm{rt}(T)$ есть наибольшее $k \leqslant n$ такое, что в матрице T_k первая строка не является линейной комбинацией последующих строк или последняя строка не является линейной комбинацией предыдущих строк. Если $N_1 \neq 0$, то входящие в него строки образуют базис в пространстве $(r - 1)$-мерных строк, так что первая строка матрицы T_r является линейной комбинацией последующих строк. Аналогично, если и $N_2 \neq 0$, то последняя строка в T_r является линейной комбинацией предыдущих строк. Но это противоречит упомянутому выше замечанию.

Положим $\bar{T} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$, если $N_1 = 0$, и $\bar{T} = (t_1, \dots, t_n, t_{n+1})$ в противном случае, где t_0, t_{n+1} — элементы бесконечного теплицева продолжения ранга r. Осталось заметить, что новая строка $\bar{T}$ удовлетворяет всем условиям п. 3) настоящей теоремы, гарантирующим для нее существование бесконечного ограниченно-теплицева (но не теплицева) продолжения ранга r и двух различных бесконечных теплицевых продолжений ранга r. $\square$

Суммируя утверждения теорем 1–3, получаем следующие необходимые и достаточные условия единственности бесконечного ограниченно-теплицева продолжения наименьшего ранга.

Теорема 4. *Пусть* $T = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $r = \mathrm{rt}(T)$ *и* $T_{\mathbb{Z}}$ *— ограниченно-теплицево продолжение ранга* r. *Продолжение* $T_{\mathbb{Z}}$ *единственно тогда и только тогда, когда* $T_{\mathbb{Z}}$ *— единственное бесконечное теплицево продолжение ранга* r. *Если поле содержит более двух элементов, то единственность продолжения* $T_{\mathbb{Z}}$ *равносильна условию* $r < (n+1)/2$. *В случае поля из двух элементов продолжение* $T_{\mathbb{Z}}$ *единственно тогда и только тогда, когда* $n = 1$, *или* $r < (n+1)/2$, *или* $r = (n+1)/2$ *и*

$$\begin{vmatrix} t_r & \ldots & t_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_2 & \ldots & t_r \end{vmatrix} \neq 0.$$

Литература

1. Ю. А. Альпин, С. Н. Ильин, *Бесконечные продолжения теплицевых матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **296** (2003), 5–14.
2. И. С. Иохвидов, *Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы.* Наука, М. (1974).

Il'in S. N. Infinite limitedly-Toeplitz extensions of Toeplitz matrices.

Infinite limitedly Toeplitz extensions of a finite rectangular Toeplitz matrix are considered. Conditions necessary and sufficient for such an extension of smallest rank to be unique are given.

Казанский
государственный университет

Поступило 6 мая 2004 г.