Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 309, 2004 г.

Л. Ю. Колотилина

ПРОБЛЕМА ВЫРОЖДЕННОСТИ/НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ДЛЯ МАТРИЦ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ ДИАГОНАЛЬНОГО ПРЕОБЛАДАНИЯ, ФОРМУЛИРУЕМЫМ В ТЕРМИНАХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

§1. Введение

В этой работе мы рассматриваем проблему вырожденности/невырожденности для матриц, обладающих некоторыми свойствами типа диагонального преобладания. Точнее, кроме матриц, удовлетворяющих стандартным условиям обобщенного диагонального преобладания (по строкам или по столбцам) мы рассматриваем матрицы, обладающие диагональным преобладанием порядка k ($k \geqslant 0$) с весом α ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$) (см. определение в §4), а также матрицы с контурным диагональным преобладанием (см. §6). Оба этих типа диагонального преобладания определяются с использованием ориентированного графа (орграфа) рассматриваемой матрицы и могут формулироваться как в терминах строчных сумм, так и в терминах столбцовых сумм. Более того, как будет показано, от этих "чистых" типов условий диагонального преобладания можно перейти к еще более общим "смешанным" условиям, в которых одновременно задействованы строчные и/или столбцовые суммы нескольких матриц вида $D_s^{-1}AD_s$, $s = 1, \dots, r$, $r \geqslant 1$, где D_s – это невырожденные диагональные матрицы.

В работе представлены результаты следующих двух типов. Во-первых, мы показываем, что квазинеприводимая матрица, удовлетворяющая некоторым строгим ("чистым" или "смешанным") условиям диагонального преобладания порядка k или контурным условиям диагонального преобладания, невырождена.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, 03-01-00349 и гранта НШ-2268.2003.1.

Заметим, что квазинеприводимость матрицы A, определяемая в §4, требуется лишь для обеспечения невырожденности ее диагональной части D_A. Во-вторых, для неприводимой матрицы A, удовлетворяющей нестрогим (т.е. слабым) "чистым" условиям диагонального преобладания порядка k или контурного диагонального преобладания, мы формулируем условия, необходимые и достаточные как для ее невырожденности, так и для ее вырожденности. Другими словами, для таких матриц проблема вырожденности/невырожденности решается полностью.

Подчеркнем, что все результаты, касающиеся проблемы вырожденности/невырожденности для матриц с тем или иным диагональным преобладанием, получены с использованием одного и того же подхода. С одной стороны, этот подход базируется на лемме Виланда, из которой следует, что

$$\rho(D_A^{-1}B) \leqslant \rho\big(|D_A^{-1}B|\big),$$

где $A = D_A - B$, а ρ обозначает спектральный радиус. С другой стороны, предлагаемый подход основывается на использовании различных верхних оценок для спектрального радиуса (т.е. перроновского корня) неотрицательной матрицы, полученных в [4, 5]. В этой связи уместно заметить, что все используемые оценки перроновского корня из [4] выведены на основе его свойства монотонности, а контурные оценки из [5] получены из контурного обобщения этого свойства. Поскольку лемма Виландта также может рассматриваться как обобщение свойства монотонности перроновского корня, можно утверждать, что все результаты по проблеме вырожденности/невырожденности, представленные в данной статье, являются более или менее прямыми следствиями указанного свойства монотонности.

Использование единого подхода естественным образом привело нас не только к новым результатам, но также и к новым доказательствам уже известных результатов, а также к их более сильным формулировкам. С этой точки зрения настоящую работу можно рассматривать как обзор результатов по проблеме вырожденности/невырожденности для матриц, обладающих тем или иным типом диагонального преобладания.

Кроме того, использование единого подхода при выводе результатов способствует отчетливому пониманию их взаимосвязей.

Важно также отметить, что все доказательства невырожденности матрицы A в различных предположениях в действительности устанавливают более сильный результат, а именно, неравенство

$$\rho(D_A^{-1}B) < 1,$$

означающее, что расщепление Якоби $A = D_A - B$ для матрицы A является сходящимся.

Очень хорошо осознан тот факт, что из невырожденности матрицы, обладающей строгим диагональным преобладанием в том или ином смысле, вытекает, что вырожденная матрица $A - \lambda I_n$, где λ – собственное значение A, не может иметь диагонального преобладания того же типа. Таким образом можно получить совокупность областей, содержащих все собственные значения A и соответствующих рассматриваемому диагональному преобладанию. Поскольку проблема описания областей, содержащих все собственные значения, сама является классической и важной, мы специально рассматриваем ее в конце работы. В частности, мы приводим решение давно поставленной задачи о возможности прямого обобщения теорем о кругах Гершгорина и овалах Кассини на случай $r \geqslant 3$, которая считается не имеющей решения.

Статья построена следующим образом.

В §2 представлены базовые результаты, с помощью которых проблема вырожденности/невырожденности для матрицы $A = D_A - B$ с невырожденной главной диагональю, удовлетворяющей некоторым условиям диагонального преобладания, может быть переформулирована в терминах перроновского корня $\rho\big(|D_A^{-1}B|\big)$. Ключевым результатом этого параграфа является лемма Виландта (см. лемму 2.1).

В §3 рассматривается проблема вырожденности/невырожденности для матриц, удовлетворяющих чистым и смешанным условиям стандартного обобщенного диагонального преобладания. Приводится полное описание вырожденных и невырожденных неприводимых матриц со слабым обобщенным диагональным преобладанием. Также доказывается, что любая матрица, удовлетворяющая некоторым строгим смешанным условиям диагонального преобладания (и, в частности, условиям Островского

$$|a_{ii}| > \big[r_i'(A)\big]^{\alpha}\big[c_i'(A)\big]^{1-\alpha}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$), является невырожденной.

В §4 мы обобщаем классическое понятие диагонального преобладания ($k = 0$), вводя в рассмотрение понятие диагонального преобладания порядка k ($k \geqslant 0$) с весом α ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$), использующее пути длины k в орграфе матрицы. Также мы вводим новый класс квазинеприводимых матриц, содержащий класс слабо неприводимых матриц в качестве подкласса. Результаты §3 распространяются на матрицы, обладающие диагональным преобладанием порядка k. В частности, устанавливается, что любая квазинеприводимая матрица со строгим диагональным преобладанием порядка k с весом α невырождена. Этот результат обобщается на случай матриц, удовлетворяющих строгим смешанным условиям диагонального преобладания порядка k. Представлено полное решение проблемы вырожденности/невырожденности для неприводимых матриц со слабым диагональным преобладанием порядка k.

В §5 мы специализируем результаты §4 на случай $k = 1$ и рассматриваем матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\left[r_i'(A)\right]^{\alpha}\left[r_j'(A)\right]^{1-\alpha} \leqslant |a_{ii}|^{\alpha}|a_{jj}|^{1-\alpha} \quad \text{для всех} \quad i \neq j \quad \text{таких,}$$
$$\text{что} \quad a_{ij} \neq 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Заметим, что при $\alpha = 1/2$ эти условия совпадают с условиями теоремы Островского–Брауэра в тех случаях, когда A не имеет симметрично расположенных нулевых внедиагональных элементов. Приведено полное описание вырожденных и невырожденных неприводимых матриц, удовлетворяющих этим условиям. В частности, показано, что вырожденные неприводимые матрицы из рассматриваемого класса необходимо являются 2-циклическими. Также представлены некоторые смешанные условия диагонального преобладания порядка 1, достаточные для невырожденности удовлетворяющей им матрицы.

§6 посвящен матрицам с контурным диагональным преобладанием. Знаменитый результат Бруальди о невырожденности слабо неприводимых матриц, удовлетворяющих строгим условиям контурного диагонального преобладания [8], обобщается на случай квазинеприводимых матриц, для которых выполнены строгие смешанные условия контурного диагонального преобладания. Представлены условия, необходимые и достаточные для невырожденности (вырожденности) неприводимой матрицы с обобщенным контурным диагональным преобладанием.

В §7 рассматриваются области, содержащие собственные значения. Некоторые достаточные условия невырожденности матриц переформулируются в терминах областей, содержащих собственные значения, а некоторые из необходимых и достаточных условий вырожденности переформулируются как условия, необходимые и достаточные для того, чтобы граничная точка множества областей, содержащих все собственные значения матрицы, была бы ее собственным значением. В частности, на основе результата о невырожденности квазинеприводимых матриц, удовлетворяющих строгим смешанным условиям диагонального преобладания порядка k, мы показываем, как можно обобщить теорему о кругах Гершгорина ($r = 1$) и теорему Островского-Брауэра об овалах Кассини ($r = 2$) в ее уточненной формулировке на случай $r \geqslant 3$. Ключевым моментом здесь является рассмотрение *всех* (а не только простых) путей фиксированной длины в орграфе матрицы $A - D_A$.

В заключение этого параграфа мы приводим список обозначений, использованных в работе.

- I_n – единичная матрица порядка n.
- $\langle n \rangle = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- $e = [1, \ldots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор.
- Если $v = (v_i)_{i=1}^n$ – вектор, то $D_v = \mathrm{diag}(v_1, \ldots, v_n)$.
- Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, то $D_A = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ – это диагональная часть A.
- Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, то
$$r_i(A) = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \qquad c_i(A) = \sum_{j=1}^n |a_{ji}|, \qquad i = 1, \ldots, n;$$
$$r'_i(A) = r_i(A) - |a_{ii}|, \qquad c'_i(A) = c_i(A) - |a_{ii}|, \qquad i = 1, \ldots, n,$$
а векторы $r(A)$, $c(A)$, $r'(A)$ и $c'(A)$ определяются следующим образом:
$$r(A) = \big(r_i(A)\big)_{i=1}^n, \qquad c(A) = \big(c_i(A)\big)_{i=1}^n,$$
$$r'(A) = \big(r'_i(A)\big)_{i=1}^n, \qquad c'(A) = \big(c'_i(A)\big)_{i=1}^n.$$
- Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, то $|A| = (|a_{ij}|)$, а матрица сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$ определяется формулой
$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}$$

- Неравенство $X \geqslant Y$, где $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, означает, что $X - Y$ – неотрицательная матрица.
- Для $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ через $\operatorname{Spec}(A)$ обозначен спектр матрицы A, а $\rho(A) = \max\limits_{\lambda\in\operatorname{Spec}(A)} |\lambda|$ – это спектральный радиус A.
- Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и $S \subseteq \langle\, n\,\rangle$, то $A[S] = (a_{ij})_{i,j\in S}$ – главная подматрица A, определяемая индексным подмножеством S.
- Для $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ через $G(A)$ обозначается орграф матрицы A, а $\mathcal{C}(A)$ – множество всех простых контуров в $G(A)$. Напомним, что $\gamma = (i_1, \dots, i_k, i_{k+1})$, где $k \geqslant 1$, – простой контур в $G(A)$, если $i_1, \dots, i_k \in \langle\, n\,\rangle$ все различны, $i_{k+1} = i_1$, и для всех $j = 1, \dots, k$ в $G(A)$ имеются дуги из i_j в i_{j+1}. Множество $\{i_1, \dots, i_k\}$ называется носителем γ и обозначается через $\overline{\gamma}$; длина γ обозначается через $|\gamma|$ (по определению, $|\gamma| = k$). Наконец, если $\gamma = (i_1, \dots, i_k, i_{k+1}) \in \mathcal{C}(A)$, то контурное произведение $\Pi_\gamma(A)$ определяется по формуле

$$\Pi_\gamma(A) = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_{k+1}} = \prod_{j=1}^{|\gamma|} a_{i_j i_{j+1}}.$$

§2. Базовые результаты

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – комплексная матрица. Предположим, что $D_A = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ невырождена и представим A в виде

$$A = D_A - B. \tag{2.1}$$

Поскольку

$$D_A^{-1} A = I - D_A^{-1} B,$$

мы заключаем, что матрица A невырождена тогда и только тогда, когда

$$1 \notin \operatorname{Spec}(D_A^{-1} B). \tag{2.2}$$

В частности, условие

$$\rho(D_A^{-1} B) < 1,$$

очевидно, достаточно для того, чтобы A была невырожденной.

Ниже на матрицу A будут накладываться различные условия, обеспечивающие выполнение неравенства

$$\rho(D_A^{-1} B) \leqslant 1, \tag{2.3}$$

а в том случае, когда A неприводима, будут описаны условия, при которых $1 \in \mathrm{Spec}(A)$, т.е. A вырождена. Для этого нам понадобится ограничить $\rho(D_A^{-1}B)$ сверху с использованием приводимой ниже леммы Виландта (см., например, [2, с. 327]) или [12, лемма 2.1]).

Лемма 2.1. *Пусть X и P – матрицы порядка n, $n \geqslant 1$, и пусть*

$$|X| \leqslant P.$$

Тогда для любого $\lambda(X) \in \mathrm{Spec}(X)$ справедливо неравенство

$$|\lambda(X)| \leqslant \rho(P), \tag{2.4}$$

причем если матрица P неприводима, то неравенство (2.4) является равенством в том и только том случае, когда существует унитарная диагональная матрица D такая, что

$$X = \varepsilon D^* P D, \tag{2.5}$$

где $\varepsilon = \lambda(X)/\rho(P)$.

Замечание 2.1. Заметим, что лемму Виландта можно рассматривать как обобщение свойства монотонности перроновского корня (см., например, [4, теорема 1.1]), на котором основывался вывод большинства результатов из [4]. Действительно, если $0 \leqslant X \leqslant Y$, то в силу (2.4) $\rho(X) \leqslant \rho(Y)$. Далее, если матрица Y неприводима и $\rho(X) = \rho(Y)$, то $\varepsilon = 1$, а из (2.5) вытекает, что $X = D^*YD$, где $|D| = I_n$. Поскольку Y – неприводимая неотрицательная матрица, по теореме Перрона–Фробениуса она имеет положительный перроновский вектор v. С другой стороны, вектор D^*v является собственным вектором матрицы $X = D^*YD$ и соответствует собственному значению $\rho(X) = \rho(Y)$. Следовательно, вектор D^*v является перроновским вектором для неприводимой и неотрицательной матрицы X, а поэтому он положителен. Но тогда матрица D^* имеет положительные диагональные элементы. Поскольку при этом $|D| = I_n$, мы заключаем, что $D = I_n$, а тогда $X = Y$.

Из леммы 2.1 в частности следует, что для любой неприводимой матрицы X такой, что $\rho(|X|) = 1$, $1 \in \mathrm{Spec}(X)$ тогда и только тогда, когда существует унитарная диагональная матрица D, для которой выполнено соотношение

$$X = D^*|X|D.$$

Взяв в качестве X матрицу $D_A^{-1}B$, мы немедленно получаем следующий результат.

Следствие 2.1. *Пусть $A = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, где D_A невырождена, и пусть $\rho(|D_A^{-1}B|) = 1$. Тогда матрица A вырождена в том и только том случае, когда найдется такая унитарная диагональная матрица D, что*

$$D_A^{-1}B = D^*|D_A^{-1}B|D.$$

Из леммы 2.1 и следствия 2.1 легко выводится приводимая ниже лемма 2.2, которая лежит в основании последующих результатов.

Лемма 2.2. *Пусть $A = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, и пусть D_A невырождена. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если $\rho(|D_A^{-1}B|) < 1$, то A невырождена;*

(ii) *если $\rho(|D_A^{-1}B|) \leqslant 1$, а матрица A неприводима, то A вырождена тогда и только тогда, когда*

$$\rho(|D_A^{-1}B|) = 1 \tag{2.6}$$

и существует такая унитарная диагональная матрица D, что

$$D_A^{-1}B = D^*|D_A^{-1}B|D. \tag{2.7}$$

Заметим, что в неприводимом случае существование унитарной диагональной матрицы D, для которой справедливо равенство (2.7), равносильно конечному набору равенств, соответствующих контурам из $\mathcal{C}(B)$. Точнее, известен следующий результат.

Лемма 2.3 [9, лемма (3,4)]. *Для неприводимой матрицы $X = (x_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, следующие утверждения равносильны:*

(i) *$X = D^*|X|D$, где $|D| = I_n$;*

(ii) *для любого простого контура $\gamma \in \mathcal{C}(X)$*

$$\Pi_\gamma(X) > 0.$$

Замечание 2.2. Если $A = D_A - B$ – неприводимая матрица, D_A невырождена и $\rho(|D_A^{-1}B|) < 1$, то A является H-матрицей. Действительно, для некоторого положительного вектора v мы имеем

$$|D_A^{-1}B|v = \rho(|D_A^{-1}B|)v < v,$$

откуда следует, что

$$|D_A|v > |B|v,$$

так что

$$\mathcal{M}(A)v = (|D_A| - |B|)v > 0,$$

т.е. матрица A имеет строгое обобщенное диагональное преобладание.

В последующих параграфах, основываясь на леммах 2.2 и 2.3, а также на некоторых из верхних оценок для перроновского корня неотрицательной матрицы, представленных в [4, 5], мы покажем, что матрицы, удовлетворяющие ряду условий типа диагонального преобладания, являются невырожденными. В неприводимом случае мы также получим критерии вырожденности/невырожденности для таких матриц.

§3. Проблема вырожденности/невырожденности для матриц, удовлетворяющих стандартным и смешанным условиям обобщенного диагонального преобладания

Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, имеет слабое обобщенное диагональное преобладание (по строкам), т.е. для некоторого положительного вектора $v = (v_i) \in \mathbb{R}^n$ справедливы нестрогие неравенства

$$|a_{ii}|v_i \geqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|v_j, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. Если матрица A неприводима или все неравенства в (3.1) строгие, то, как легко видеть,

$$a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Как хорошо известно (см., например, [4, следствие 3.1]), перроновский корень $\rho(|D_A^{-1}B|)$ удовлетворяет верхней оценке Фробениуса

$$\rho(|D_A^{-1}B|) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D_v^{-1}|D_A^{-1}B|D_v), \tag{3.2}$$

причем если матрица A неприводима, то неравенство (3.2) обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$r_i(D_v^{-1}|D_A^{-1}B|D_v) = \rho(|D_A^{-1}B|), \quad i = 1, \dots, n.$$

Поскольку, в силу (3.1),

$$r_i(D_v^{-1}|D_A^{-1}B|D_v) = \Big(\sum_{j\neq i}|a_{ij}|v_j\Big)/(|a_{ii}|v_i) \leqslant 1, \quad i = 1,\ldots,n,$$

то из (3.2) следует, что

$$\rho(|D_A^{-1}B|) \leqslant 1.$$

Кроме того, если все неравенства в (3.1) являются строгими, то $\rho(|D_A^{-1}B|) < 1$, а если матрица A неприводима, то $\rho(|D_A^{-1}B|) = 1$ в том и только том случае, когда все неравенства в (3.1) являются равенствами.

Комбинируя вышесказанное с замечанием 3.1 и леммами 2.2 и 2.3, мы немедленно приходим к следующему результату.

Теорема 3.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, удовлетворяет условиям* (3.1) *для некоторого положительного вектора $v = (v_i)$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если все неравенства в* (3.1) *строгие, то A невырождена;*

(ii) *если A неприводима, то она вырождена тогда и только тогда, когда все неравенства в* (3.1) *являются равенствами и для любого простого контура $\gamma \in \mathcal{C}(A)$ длины $|\gamma| \geqslant 2$ выполнено неравенство*

$$(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A)/\prod_{i\in\overline{\gamma}} a_{ii} > 0. \qquad (3.3)$$

Очевидно, утверждение (i) теоремы 3.1 при $v = e$ в точности совпадает с классической теоремой Леви–Депланка, а утверждение (ii) совпадает с теоремой 2.4 в [12] и дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы неприводимая матрица со слабым обобщенным диагональным преобладанием была вырожденной.

Как легко понять, утверждение (ii) теоремы 3.1 может быть переформулировано как критерий невырожденности, что приводит нас к следующей полной версии теоремы, впервые доказанной Ю. А. Альпиным и опубликованной в [12].

Следствие 3.1. *Неприводимая матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, удовлетворяющая неравенствам* (3.1), *невырождена тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух условий:*

(i) *(обобщенное условие Таусски) хотя бы одно из неравенств в* (3.1) *является строгим;*

(ii) *в* $\mathcal{C}(A)$ *содержится простой контур* γ *длины* $|\gamma| \geqslant 2$ *такой, что*
$$(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A)/\prod_{i\in\overline{\gamma}}a_{ii} \neq \left|\Pi_\gamma(A)/\prod_{i\in\overline{\gamma}}a_{ii}\right|. \tag{3.4}$$

Очевидно, неравенства (3.1) могут быть записаны в виде
$$|a_{ii}| \geqslant r_i'(D^{-1}AD), \quad i=1,\ldots,n, \tag{3.5}$$
где $D = D_v$ – произвольная невырожденная диагональная матрица. Если матрица $B = D_A - A$ не имеет нулевых строк, то, как легко убедиться, для любого $s \geqslant 0$ матрица $|B|^s$ также не имеет нулевых строк. Следовательно, в (3.5) можно положить $D = D_{r(|B|^s)}$, $s \geqslant 0$. Поскольку
$$\begin{aligned} r_i'\left(D^{-1}_{r(|B|^s)}AD_{r(|B|^s)}\right) &= r_i\left(D^{-1}_{r(|B|^s)}|B|D_{r(|B|^s)}\right) \\ &= r_i\left(|B|^{s+1}\right)/r_i\left(|B|^s\right), \quad i=1,\ldots,n, \quad s\geqslant 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$
при таком выборе D неравенства (3.5) принимают вид
$$|a_{ii}| \geqslant r_i\left(|B|^{s+1}\right)/r_i\left(|B|^s\right), \quad i=1,\ldots,n. \tag{3.7}$$

Заметим также, что при $s=0$ условия (3.7) сводятся к стандартным условиям слабого диагонального преобладания и могут быть получены из (3.5) подстановкой $D = I_n$, так что в этом случае отсутствие в B нулевых строк не требуется.

Таким образом, из теоремы 3.1 и следствия 3.1 вытекает, в частности, следующий результат.

Следствие 3.2. *Пусть матрица* $A=(a_{ij})=D_A-B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 1$, *удовлетворяет условиям* (3.7), *причем мы предполагаем, что либо* $s=0$, *либо* $s\geqslant 1$ *и матрица* B *не имеет нулевых строк. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если все неравенства в* (3.7) *являются строгими, то* A *невырождена;*

(ii) *если* A *неприводима, то она вырождена тогда и только тогда, когда все неравенства в* (3.7) *являются равенствами и для любого* $\gamma\in\mathcal{C}(A)$, $|\gamma|\geqslant 2$, *выполнено условие* (3.3);

(iii) *если A неприводима, то она невырождена в том и только том случае, когда либо одно из неравенств (3.7) строгое, либо условие (3.4) выполнено для некоторого $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$.*

Конечно же, соответствующие аналоги теоремы 3.1 и следствий 3.1 и 3.2 справедливы и для матриц, имеющих слабое обобщенное диагональное преобладание по столбцам. Более того, основываясь на верхней оценке для перроновского корня, приводимой ниже, можно сформулировать ряд смешанных условий, зависящих от $|a_{ii}|$, $r'_i(D_s^{-1}AD_s)$ и $c'_i(D_s^{-1}AD_s)$, где D_s – невырожденные диагональные матрицы, $s = 1, \dots, r$, $i = 1, \dots, n$, достаточных для невырожденности A.

Лемма 3.1 [4, следствие 4.2]. *Пусть X – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Для произвольных $\beta_s \geqslant 0$, $s = 1, \dots, r$, $r \geqslant 1$, таких, что $\sum_{s=1}^{r} \beta_s = 1$, произвольного целого p, $0 \leqslant p \leqslant r$, и произвольных диагональных матриц D_s, $s = 1, \dots, r$, с положительными диагональными элементами справедлива следующая верхняя оценка для перроновского корня X:*

$$\rho(X) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \prod_{s=1}^{r-p} \Big[r_i(D_s^{-1} X D_s) \Big]^{\beta_s} \prod_{s=r-p+1}^{r} \Big[c_i(D_s^{-1} X D_s) \Big]^{\beta_s} \right\}. \quad (3.8)$$

Теорема 3.2. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, удовлетворяет следующим строгим смешанным условиям обобщенного диагонального преобладания:*

$$|a_{ii}| > \prod_{s=1}^{r-p} \Big[r'_i\big(D_s^{-1} A D_s\big) \Big]^{\beta_s} \prod_{s=r-p+1}^{r} \Big[c'_i\big(D_s^{-1} A D_s\big) \Big]^{\beta_s}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

где $r \geqslant 1$, $0 \leqslant p \leqslant r$, $\sum_{s=1}^{r} \beta_s = 1$, $\beta_s > 0$, а D_s – невырожденные диагональные матрицы, $s = 1, \dots, r$. Тогда A невырождена.

Доказательство. Заметим сперва, что в условиях (3.9) все диагональные элементы a_{ii}, $i = 1, \dots, n$, отличны от нуля. Далее, поскольку, очевидно,

$$r'_i\big(D_s^{-1} A D_s\big) = |a_{ii}| r_i\big(D_s^{-1} |D_A^{-1} B| D_s\big), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.10)$$

$$c_i'\big(D_s^{-1}AD_s\big) = |a_{ii}|c_i\Big[\big(D_A^{-1}D_s\big)^{-1}|D_A^{-1}B|\big(D_A^{-1}D_s\big)\Big], \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.11}$$

и $\sum\limits_{s=1}^{r} \beta_s = 1$, неравенства (3.9) равносильны строгим неравенствам

$$\prod_{s=1}^{r-p} \Big[r_i\big(D_s^{-1}|D_A^{-1}B|D_s\big)\Big]^{\beta_s} \prod_{s=r-p+1}^{r} \Big\{c_i\Big[\big(D_A^{-1}D_s\big)^{-1}|D_A^{-1}B|\big(D_A^{-1}D_s\big)\Big]\Big\}^{\beta_s} < 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ввиду леммы 3.1, из последних неравенств следует, что

$$\rho\big(|D_A^{-1}B|\big) < 1,$$

а тогда матрица A невырождена в силу леммы 2.2. □

Рассмотрим некоторые следствия из теоремы 3.2. Прежде всего, мы выведем достаточные условия, предложенные А. Островским в [16].

Следствие 3.3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, и пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Если*

$$|a_{ii}| > \Big[r_i'(A)\Big]^{\alpha}\Big[c_i'(A)\Big]^{1-\alpha}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.12}$$

то матрица A невырождена.

Доказательство. Применим теорему 3.2, взяв $r = 2$, $p = 1$, $D_1 = D_2 = I_n$ и $\beta_1 = \alpha$. □

Следствие 3.4. *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. Если матрица B не имеет ни нулевых строк, ни нулевых столбцов и справедливы неравенства*

$$|a_{ii}| > \left[\frac{r_i(|B|^{s+1})}{r_i(|B|^s)}\right]^{\alpha}\left[\frac{c_i(|B|^{q+1})}{c_i(|B|^q)}\right]^{1-\alpha}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.13}$$

или же матрица B не имеет нулевых строк и справедливы неравенства

$$|a_{ii}| > \left[\frac{r_i(|B|^{s+1})}{r_i(|B|^s)}\right]^{\alpha}\left[\frac{r_i(|B|^{q+1})}{r_i(|B|^q)}\right]^{1-\alpha}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.14}$$

где s, $q \geqslant 0$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то A невырождена.

Доказательство. Для доказательства невырожденности матрицы A положим в теореме 3.2 $r = 2$, $p = 1$, $D_1 = D_{r(|B|^s)}$, $D_2 = D^{-1}_{c(|B|^q)}$, $\beta_1 = \alpha$ в случае неравенств (3.13) и $r = 2$, $p = 0$, $D_1 = D_{r(|B|^s)}$, $D_2 = D_{r(|B|^q)}$, $\beta_1 = \alpha$ в случае неравенств (3.14) и воспользуемся равенствами (3.6) и их столбцовыми аналогами, которые имеют следующий вид:

$$c'_i\Big(D_{c(|B|^q)} A D^{-1}_{c(|B|^q)}\Big) = c_i\big(|B|^{q+1}\big)/c_i\big(|B|^q\big),\quad i = 1, \dots, n, \quad q \geqslant 0. \tag{3.15}$$

□

§4. Проблема вырожденности/невырожденности для матриц с диагональным преобладанием порядка k

Пусть $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, и пусть

$$\mathcal{P}_k(X) = \big\{(i_1, \dots, i_{k+1}),\ i_j \in \langle\, n\,\rangle, i_j \to i_{j+1} \in E_X,\ j = 1, \dots, k\big\}, \quad k \geqslant 1,$$

– множество всех путей длины k в орграфе $G(X) = \{\langle\, n\,\rangle, E_X\}$ матрицы X. Для удобства мы дополнительно полагаем

$$\mathcal{P}_0(X) = \langle\, n\,\rangle,$$

т.е. мы естественным образом отождествляем множество путей нулевой длины с множеством вершин графа $G(X)$.

Замечание 4.1. Если для некоторого $k \geqslant 1$ множество путей $\mathcal{P}_k(X)$ пусто, то $X^k = 0$, так что все собственные значения матрицы X нулевые. Действительно, мы имеем

$$(X^k)_{ij} = \sum_{i_2,\dots,i_k \in \langle\, n\,\rangle} x_{ii_2}x_{i_2i_3}\cdots x_{i_kj}, \quad i, j \in \langle\, n\,\rangle,$$

а произведение $x_{ii_2}x_{i_2i_3}\cdots x_{i_kj}$ отлично от нуля в том и только том случае, когда $(i, i_2, \dots, i_k, j) \in \mathcal{P}_k(X)$.

Классическое понятие диагонального преобладания (по строкам) можно обобщить следующим образом.

Определение 4.1. *Будем говорить, что матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *имеет слабое диагональное преобладание порядка* k ($k \geqslant 0$) *с весом* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *если либо* $\mathcal{P}_k(A - D_A) = \varnothing$, *либо*

$$\begin{aligned} &\Big[r'_{i_1}(A)\Big]^{\alpha} r'_{i_2}(A)\cdots r'_{i_k}(A)\Big[r'_{i_{k+1}}(A)\Big]^{1-\alpha} \\ &\leqslant \big|a_{i_1 i_1}\big|^{\alpha}\big|a_{i_2 i_2}\big|\cdots\big|a_{i_k i_k}\big|\,\big|a_{i_{k+1} i_{k+1}}\big|^{1-\alpha} \\ &\textit{для всех}\quad (i_1,\dots,i_{k+1}) \in \mathcal{P}_k(A - D_A), \end{aligned} \tag{4.1}$$

а если все неравенства в (4.1) *являются строгими, то* A *имеет строгое диагональное преобладание порядка* k *с весом* α.

Замечание 4.2. Понятие диагонального преобладания порядка k с весом допускает дальнейшее обобщение за счет замены в (4.1) строчных сумм $r'_{i_j}(A)$ на суммы $r'_{i_j}(D^{-1}AD)$, $j = 1,\dots,k+1$, где D – произвольная невырожденная диагональная матрица. Поскольку так обобщенное понятие диагонального преобладания порядка k с весом для A равносильно взвешенному диагональному преобладанию порядка k для матрицы $D^{-1}AD$, в дальнейшем для упрощения обозначений все результаты будут приводиться для матриц, обладающих диагональным преобладанием в смысле определения 4.1. Их обобщения на случай $D \neq I_n$ могут быть легко получены заменой A на $D^{-1}AD$.

Замечание 4.3. При $\alpha = 1$ и $k \geqslant 1$ данное выше определение матриц со слабым диагональным преобладанием порядка k сводится к выполнению неравенства

$$\prod_{j=1}^{k} r'_{i_j}(A) \leqslant \prod_{j=1}^{k} \big|a_{i_j i_j}\big| \tag{4.2}$$

для всех тех путей $(i_1,\dots,i_k) \in \mathcal{P}_{k-1}(A - D_A)$, для которых найдется $i_{k+1} \in \langle\, n\,\rangle$, $i_{k+1} \neq i_k$ такое, что $(i_1,\dots,i_k,i_{k+1}) \in \mathcal{P}_k(A-D_A)$. Другими словами, неравенство (4.2) должно выполняться для всех тех $(i_1,\dots,i_k) \in \mathcal{P}_{k-1}(A - D_A)$, для которых $r'_{i_k}(A) > 0$. В частности, если $r'_i(A) > 0$ при $i = 1,\dots,n$, т.е. если матрица $B = D_A - A$ не имеет нулевых строк, то A имеет слабое диагональное преобладание порядка k с весом $\alpha = 1$ тогда и только тогда, когда неравенство (4.2) справедливо для каждого $(i_1,\dots,i_k) \in \mathcal{P}_{k-1}(A - D_A)$. Заметим также, что поскольку $\mathcal{P}_0(A - D_A) = \langle\, n\,\rangle$ по определению, то матрица A имеет слабое диагональное преобладание порядка 1 с весом $\alpha = 1$ в том и только том случае, когда

$$r_i'(A) \leqslant |a_{ii}| \quad \text{для всех} \quad i \in \langle\, n \,\rangle \quad \text{таких, что} \quad r_i'(A) > 0.$$

Очевидно, в случае $r_i'(A) = 0$ последнее неравенство выполняется тривиальным образом. Поэтому матрица A имеет слабое диагональное преобладание порядка $k = 1$ с весом $\alpha = 1$ тогда и только тогда, когда она имеет слабое диагональное преобладание в обычном смысле. С другой стороны, A имеет строгое диагональное преобладание порядка 1 с весом $\alpha = 1$ в том и только том случае, когда для всех $i \in \langle\, n \,\rangle$ либо $r_i'(A) = 0$, либо $|a_{ii}| > r_i'(A)$. В частности, такая матрица A может иметь нулевые строки.

Замечание 4.4. Для произвольного α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, понятие диагонального преобладания нулевого порядка с весом α совпадает с обычным понятием диагонального преобладания.

Основным результатом этого параграфа является аналог теоремы 3.1 (при $v = e$) для матриц, обладающих диагональным преобладанием порядка k с весом. Доказательство этого результата будет основываться на следующих верхних оценках для перроновского корня неотрицательной матрицы, зависящих от путей.

Теорема 4.1 [4, следствие 6.1]. *Если $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – неотрицательная матрица, то при любом α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и любом целом $k \geqslant 1$ перроновский корень X удовлетворяет верхней оценке*

$$\rho(X) \leqslant \max_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(X)} \left\{ \Big[r_{i_1}(X)\Big]^{\alpha} r_{i_2}(X)\cdots r_{i_k}(X) \Big[r_{i_{k+1}}(X)\Big]^{1-\alpha} \right\}^{1/k}, \tag{4.3}$$

причем если матрица X неприводима, то неравенство (4.3) *является равенством тогда и только тогда, когда*

$$\Big[r_{i_1}(X)\Big]^{\alpha} r_{i_2}(X)\cdots r_{i_k}(X) \Big[r_{i_{k+1}}(X)\Big]^{1-\alpha} = \Big[\rho(X)\Big]^{k}$$

$$\textit{для всех} \quad (i_1, \dots, i_{k+1}) \in \mathcal{P}_k(X).$$

Для обобщения теоремы 3.1 нам также потребуется следующее понятие.

Определение 4.2. *Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, называется квазинеприводимой, если каждая вершина $G(A)$ принадлежит некоторому простому контуру из $\mathcal{C}(A)$.*

Таким образом, в соответствии с определением 4.2 вершины графа квазинеприводимой матрицы могут принадлежать не только контурам длины не меньшей двух (как в случае слабо неприводимых матриц), но и контурам длины 1, т.е. петлям.

Как хорошо известно, любая приводимая матрица A может быть приведена симметричной перестановкой ее строк и столбцов к верхней блочно треугольной матрице, диагональные блоки которой суть неприводимые компоненты A. Ясно, что квазинеприводимость A означает в точности то, что все ее неприводимые компоненты порядка 1 отличны от нуля, что равносильно невырожденности соответствующей части матрицы D_A. В частности, если D_A невырождена, то A квазинеприводима. С другой стороны, мы приходим к следующему тривиальному критерию невырожденности.

Лемма 4.1. *Квазинеприводимая матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, невырождена тогда и только тогда, когда невырождены все ее неприводимые компоненты порядков больше 1 (или, короче, когда невырождена слабо неприводимая часть A).*

Приводимая ниже лемма дает нам условия, достаточные для того, чтобы главная диагональ квазинеприводимой матрицы была бы невырожденной.

Лемма 4.2. *Если матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, квазинеприводима и имеет слабое диагональное преобладание порядка k ($k \geqslant 0$) с весом α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то D_A невырождена.*

Доказательство. Пусть $i \in \langle n \rangle$ и пусть $i \in \overline{\gamma}$, где $\gamma \in \mathcal{C}(A)$. Если $|\gamma| \geqslant 2$, то при любом $k \geqslant 1$ $\mathcal{P}_k(A - D_A)$ содержит путь $(i_1, \dots, i_{k+1})$, где $i_1 = i$, поскольку контур γ простой. Следовательно, $|a_{ii}| > 0$ в силу (4.1). Если же $|\gamma| = 1$, то $\overline{\gamma} = \{i\}$, так что $a_{ii} \neq 0$. Наконец, если $k = 0$, то из диагонального преобладания порядка 0 в A следует, что

$$|a_{ii}| \geqslant r'_i(A).$$

Следовательно, если $r'_i(A) > 0$, то $|a_{ii}| > 0$, а если $r'_i(A) = 0$, то $|\gamma| = 1$ и $|a_{ii}| > 0$ в силу квазинеприводимости A. $\square$

Ниже приводится основной результат этого параграфа.

Теорема 4.2. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, квазинеприводима и имеет слабое диагональное преобладание порядка k с весом α, где $k \geqslant 0$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если либо $\mathcal{P}_k(A - D_A) = \varnothing$, либо рассматриваемое диагональное преобладание является строгим, то A невырождена;*

(ii) *если матрица A неприводима, то она вырождена в том и только том случае, когда $n \geqslant 2$, все неравенства в (4.1) являются равенствами и для любого контура $\gamma \in \mathcal{C}(A)$ длины $|\gamma| \geqslant 2$ выполнено условие*

$$(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A)/\prod_{i\in\overline{\gamma}} a_{ii} > 0.$$

Доказательство. Ввиду замечания 4.4 при $k = 0$ утверждения (i) и (ii) следуют из соответствующих утверждений теоремы 3.1 с учетом квазинеприводимости матрицы A.

Пусть $k \geqslant 1$. По лемме 4.2 матрица D_A является невырожденной. Если $\mathcal{P}_k(B) = \varnothing$, где $B = D_A - A$, то мы также имеем $\mathcal{P}_k(D_A^{-1}B) = \varnothing$, а тогда $\lambda_i(D_A^{-1}B) = 0$, $i = 1, \dots, n$, в силу замечания 4.1. Следовательно,

$$\lambda_i(D_A^{-1}A) = \lambda_i(I_n - D_A^{-1}B) = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

и обе матрицы $D_A^{-1}A$ и A очевидно невырождены.

Пусть теперь $\mathcal{P}_k(B) \neq \varnothing$. Ввиду соотношений

$$r_i'(A)/|a_{ii}| = r_i\big(|D_A^{-1}B|\big), \quad i = 1, \dots, n,$$

условие (4.1) равносильно условию

$$\Big[r_{i_1}\big(|D_A^{-1}B|\big)\Big]^\alpha r_{i_2}\big(|D_A^{-1}B|\big)\cdots r_{i_k}\big(|D_A^{-1}B|\big)\Big[r_{i_{k+1}}\big(|D_A^{-1}B|\big)\Big]^{1-\alpha} \leqslant 1$$
$$\text{для всех} \quad (i_1, \dots, i_{k+1}) \in \mathcal{P}_k(B). \tag{4.4}$$

Более того, если все неравенства в (4.1) строгие, то и все неравенства в (4.4) также строгие. Применяя теорему 4.1 к матрице $|D_A^{-1}B|$ и используя (4.4), мы приходим к выводу, что

$$\rho\big(|D_A^{-1}B|\big) \leqslant 1,$$

причем это неравенство является строгим, если все неравенства в (4.1) строгие. В этом случае матрица A невырождена по лемме 2.2 (i), что и доказывает утверждение (i).

Предположим, что матрица A неприводима. Поскольку A одновременно и квазинеприводима, при $n = 1$ она очевидно невырождена. Пусть $n \geqslant 2$. Поскольку для произвольного $k \geqslant 1$ множество $\mathcal{P}_k(B)$ в этом случае непусто и выполнено условие (4.4), из теоремы 4.1 следует, что $\rho\big(|D_A^{-1}B|\big) \leqslant 1$, причем

$$\rho\big(|D_A^{-1}B|\big) = 1$$

тогда и только тогда, когда все неравенства в (4.4) или, что то же самое, в (4.1) являются равенствами. Теперь доказательство (ii) завершается применением лемм 2.2 и 2.3. $\square$

Аналогом завершенной версии теоремы Таусски для матриц со слабым диагональным преобладанием порядка k с весом является следующий результат, непосредственно вытекающий из теоремы 4.2 (ii).

Следствие 4.1. *Неприводимая матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, обладающая слабым диагональным преобладанием порядка k $(k \geqslant 0)$ с весом α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, невырождена тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух условий:*

(i) *хотя бы одно из неравенств в* (4.1) *строгое;*

(ii) *существует контур $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$, такой что*

$$(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A)\Big/\prod_{i\in\overline{\gamma}} a_{ii} \neq \Big|\Pi_\gamma(A)\Big/\prod_{i\in\overline{\gamma}} a_{ii}\Big|. \tag{4.5}$$

Ввиду замечания 4.3, при $\alpha = 1$ и $k \geqslant 1$ из теоремы 4.2 и следствия 4.1 вытекает следующий результат.

Следствие 4.2. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, квазинеприводима и пусть $k \geqslant 1$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если $\mathcal{P}_{k-1}(A - D_A) = \varnothing$ или же*

$$\prod_{j=1}^{k} r'_{i_j}(A) < \prod_{j=1}^{k} |a_{i_j i_j}| \quad \text{для всех} \quad (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{P}_{k-1}(A - D_A), \tag{4.6}$$

то A невырождена;

(ii) *если матрица A неприводима и удовлетворяет условию*

$$\prod_{j=1}^{k} r'_{i_j}(A) \leqslant \prod_{j=1}^{k} |a_{i_j i_j}| \quad \text{для всех} \quad (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{P}_{k-1}(A - D_A), \tag{4.7}$$

то A вырождена в том и только том случае, когда все неравенства в (4.7) являются равенствами и для всех $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$, выполнено условие

$$(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i \in \overline{\gamma}} a_{ii} > 0;$$

(iii) *если матрица A неприводима и удовлетворяет условию (4.7), то A невырождена тогда и только тогда, когда либо хотя бы одно из неравенств в (4.7) строгое, либо неравенство (4.5) справедливо для некоторого $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$.*

Ниже мы покажем, что любая квазинеприводимая матрица, удовлетворяющая некоторым строгим смешанным условиям диагонального преобладания порядка k, невырождена. Для этого мы воспользуемся следующей верхней оценкой перроновского корня неотрицательной матрицы.

Лемма 4.3. *Пусть $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, – неотрицательная матрица и пусть*

$$\Delta_s = \operatorname{diag}\left(\delta_1^{(s)}, \dots, \delta_n^{(s)}\right), \quad s = 1, \dots, r, \quad r \geqslant 1,$$

– диагональные матрицы с положительными диагональными элементами. Предположим, что

$$\rho(\Delta_s^{-1} X) \leqslant 1, \quad s = 1, \dots, r. \tag{4.8}$$

Тогда при любых $k \geqslant 1$ и α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и произвольных $\beta_s > 0$, $s = 1, \dots, r$, таких что $\sum\limits_{s=1}^{r} \beta_s = 1$, справедлива оценка

$$\rho(X) \leqslant \max_{\substack{(i_1, \dots, i_{k+1}) \\ \in \mathcal{P}_k(X)}} \left[\left(\prod_{j=1}^{k} \prod_{s=1}^{r} \left(\delta_{i_j}^{(s)}\right)^{\beta_s} \right)^{\alpha} \left(\prod_{j=2}^{k+1} \prod_{s=1}^{r} \left(\delta_{i_j}^{(s)}\right)^{\beta_s} \right)^{1-\alpha} \right]^{1/k}, \tag{4.9}$$

из которой (при $\alpha = 1$) следует оценка

$$\rho(X) \leqslant \max_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{P}_{k-1}(X)} \Big[\prod_{j=1}^{k}\prod_{s=1}^{r}(\delta_{i_j}^{(s)})^{\beta_s}\Big]^{1/k}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Обозначим

$$\Delta \equiv \operatorname{diag}(\delta_1,\dots,\delta_n) = \prod_{s=1}^{r}\Delta_s^{\beta_s}. \tag{4.11}$$

В силу леммы 4.1 из [4] и условий (4.8) мы имеем

$$\rho(\Delta^{-1}X) \leqslant \prod_{s=1}^{r}\Big[\rho(\Delta^{-1}X)\Big]^{\beta_s} \leqslant 1. \tag{4.12}$$

С другой стороны, по теореме 6.1 из [4]

$$\rho(X) \leqslant \max_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(X)} \left\{\left(\prod_{j=1}^{k}\delta_{i_j}\right)^{\alpha}\left(\prod_{j=2}^{k+1}\delta_{i_j}\right)^{1-\alpha}\right\}^{1/k}\rho(\Delta^{-1}X). \tag{4.13}$$

Ввиду (4.13) и (4.12), мы имеем

$$\rho(X) \leqslant \max_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(X)} \left\{\left(\prod_{j=1}^{k}\delta_{i_j}\right)^{\alpha}\left(\prod_{j=2}^{k+1}\delta_{i_j}\right)^{1-\alpha}\right\}^{1/k},$$

и для доказательства (4.9) остается лишь воспользоваться соотношением (4.11). $\square$

Заметим, что при $k = 1$ и

$$\Delta_s = \begin{cases} D_{r(D_s^{-1}XD_s)}, & s = 1,\dots,r-p,\\ D_{c(D_s^{-1}XD_s)}, & s = r-p+1,\dots,r,\end{cases}$$

оценка (4.10) сводится к верхней оценке (3.8).

Теорема 4.3. *Пусть $k \geqslant 1$ и пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – квазинеприводимая матрица. Если для всех $(i_1,\dots,i_k) \in \mathcal{P}_{k-1}(A - D_A)$ справедливо неравенство*

$$\prod_{j=1}^{k}|a_{i_ji_j}| > \prod_{j=1}^{k}\Big[\prod_{s=1}^{r-p}\Big(r'_{i_j}(D_s^{-1}AD_s)\Big)^{\beta_s}\Big]\Big[\prod_{s=r-p+1}^{r}\Big(c'_{i_j}(D_s^{-1}AD_s)\Big)^{\beta_s}\Big], \tag{4.14}$$

где $\sum\limits_{s=1}^{r} \beta_s = 1$, $\beta_s > 0$, $s = 1, \ldots, r$, $0 \leqslant p \leqslant r$, $r \geqslant 1$, *а* D_s, $s = 1, \ldots, r$, *– невырожденные диагональные матрицы, то* A *невырождена.*

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 4.2, нетрудно убедиться, что D_A невырождена. Если $\mathcal{P}_{k-1}(A - D_A) = \varnothing$, то невырожденность матрицы A устанавливается, как в доказательстве теоремы 4.2. Пусть $\mathcal{P}_{k-1}(A - D_A) \neq \varnothing$. В силу леммы 2.2 для доказательства невырожденности A достаточно показать, что

$$\rho(|D_A^{-1} B|) < 1, \tag{4.15}$$

где $B = D_A - A$.

Ввиду соотношений (3.10) и (3.11), неравенство (4.14) равносильно неравенству

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{k} \left[\prod_{s=1}^{r-p} \Big(r_{i_j}\big(D_s^{-1} |D_A^{-1} B| D_s\big)\Big)^{\beta_s} \right] \\ &\quad \times \left[\prod_{s=r-p+1}^{r} \Big(c_{i_j} \Big\{ (D_A^{-1} D_s)^{-1} |D_A^{-1} B| (D_A^{-1} D_s) \Big\} \Big)^{\beta_s} \right] < 1, \end{aligned} \tag{4.16}$$

причем последнее справедливо для всех $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{P}_{k-1}(A - D_A)$. Заметим, что левая часть неравенства (4.16) совпадает с выражением, стоящим в правой части неравенства (4.10) из леммы 4.3, если положить

$$\delta_i^{(s)} = \begin{cases} r_i\big(D_s^{-1} |D_A^{-1} B| D_s\big), & s = 1, \ldots, r-p, \\ c_i \Big[\big(D_A^{-1} D_s\big)^{-1} |D_A^{-1} B| \big(D_A^{-1} D_s\big) \Big], & s = r-p+1, \ldots, r, \end{cases}$$
$$i = 1, \ldots, n,$$

а диагональные матрицы

$$\Delta_s \equiv \operatorname{diag}\big(\delta_1^{(s)}, \ldots, \delta_n^{(s)}\big), \quad s = 1, \ldots, r,$$

все имеют положительные диагональные элементы при условии, что матрица A неприводима. Далее, в силу леммы 3.1 из [4] мы имеем соотношения

$$\rho\big(\Delta_s^{-1} |D_A^{-1} B|\big) = \rho\Big(D^{-1}_{r(|D_s|^{-1} |D_A^{-1} B|\, |D_s|)} |D_A^{-1} B| \Big) = 1, \quad s = 1, \ldots, r-p,$$

и

$$\rho\big(\Delta_s^{-1}|D_A^{-1}B|\big) = \rho\Big(D^{-1}_{c(|D_A^{-1}D_s|^{-1}|D_A^{-1}B|\,|D_A^{-1}D_s|)}|D_A^{-1}B|\Big) = 1,$$
$$s = r-p+1, \dots, r.$$

Таким образом, если A неприводима, мы можем применить лемму 4.3, а в силу (4.16) верхняя оценка (4.10) дает нам (4.15).

Наконец, если матрица A приводима, то она невырождена тогда и только тогда, когда невырождены все ее неприводимые компоненты. Поскольку каждая из неприводимых компонент A очевидно удовлетворяет всем условиям теоремы, все они невырождены по уже доказанному. Тем самым теорема доказана полностью. □

Ясно, что при $k = 1$ теорема 4.3 сводится к теореме 3.2 (а требование квазинеприводимости излишне) и обобщает последнюю на случай произвольного $k \geqslant 1$. Ниже мы приводим некоторые следствия из теоремы 4.3, обобщающие соответствующие следствия из теоремы 3.2.

Следствие 4.3. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, квазинеприводима. Если для некоторых $k \geqslant 1$ и α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,*

$$\prod_{j=1}^{k} |a_{i_j i_j}| > \left[\prod_{j=1}^{k} r'_{i_j}(A)\right]^{\alpha} \left[\prod_{j=1}^{k} c'_{i_j}(A)\right]^{1-\alpha} \quad \text{для всех} \quad (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{P}_{k-1}(A - D_A), \tag{4.17}$$

то A невырождена.

Доказательство. Достаточно применить теорему 4.3 при $r = 2$, $p = 1$, $D_1 = D_2 = I_n$ и $\beta_1 = \alpha$. □

Следствие 4.4. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, квазинеприводима. Если матрица B не имеет ни нулевых строк, ни нулевых столбцов и выполнено условие*

$$\prod_{j=1}^{k} |a_{i_j i_j}| > \left[\prod_{j=1}^{k} \frac{r_{i_j}(|B|^{s+1})}{r_{i_j}(|B|^{s})}\right]^{\alpha} \left[\prod_{j=1}^{k} \frac{c_{i_j}(|B|^{q+1})}{c_{i_j}(|B|^{q})}\right]^{1-\alpha} \quad \text{для всех} \quad (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{P}_{k-1}(A - D_A) \tag{4.18}$$

или же B не имеет нулевых строк и выполнено условие

$$\prod_{j=1}^{k}|a_{i_j i_j}| > \left[\prod_{j=1}^{k}\frac{r_{i_j}(|B|^{s+1})}{r_{i_j}(|B|^{s})}\right]^{\alpha}\left[\prod_{j=1}^{k}\frac{r_{i_j}(|B|^{q+1})}{r_{i_j}(|B|^{q})}\right]^{1-\alpha} \tag{4.19}$$
$$\text{для всех}\quad (i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{P}_{k-1}(A-D_A),$$

где $0\leqslant\alpha\leqslant1$ и $s,q\geqslant0$, то матрица A невырождена.

Доказательство. Применим теорему 4.3, положив $r=2$, $p=1$, $D_1=D_{r(|B|^s)}$, $D_2=D^{-1}_{c(|B|^q)}$, $\beta_1=\alpha$ и $r=2$, $p=0$, $D_1=D_{r(|B|^s)}$, $D_2=D_{r(|B|^q)}$, $\beta_1=\alpha$, и воспользуемся соотношениями (3.6) и (3.15). □

§5. Обобщенная теорема Островского–Брауэра

В этом параграфе мы специализируем результаты §4 и рассматриваем проблему вырожденности/невырожденности для матриц, обладающих диагональным преобладанием порядка 1, более подробно. В частности, мы приводим полное описание вырожденных неприводимых матриц, удовлетворяющих условиям диагонального преобладания порядка 1 с весом α, из которого, в частности, следует, что такие матрицы необходимо имеют специфическую структуру разреженности, а именно, они являются 2-циклическими. Далее, полученные результаты сравниваются с классической теоремой Островского–Брауэра, и при этом подчеркивается важность непосредственного учета структуры разреженности матрицы. Наконец, приводятся некоторые смешанные условия, вытекающие из общих результатов §4, которые обеспечивают невырожденность матрицы.

В соответствии с определением 4.1 матрица $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant2$, имеет слабое диагональное преобладание порядка 1 с весом α, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, если

$$\left[r_i'(A)\right]^{\alpha}\left[r_j'(A)\right]^{1-\alpha}\leqslant|a_{ii}|^{\alpha}|a_{jj}|^{1-\alpha}\ \text{для всех}\ i\neq j\ \text{таких, что}\ a_{ij}\neq0. \tag{5.1}$$

При $k=1$ теорема 4.2 и следствие 4.1 дают следующие условия вырожденности/невырожденности.

Теорема 5.1 (Обобщенная теорема Островского–Брауэра). *Пусть матрица $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant1$, квазинеприводима* *и имеет слабое диагональное преобладание порядка 1 с весом* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если A диагональна или все неравенства в* (5.1) *строгие, то A невырождена;*

(ii) *если A неприводима, то она вырождена в том и только том случае, когда $n \geqslant 2$, все неравенства в* (5.1) *являются равенствами, и*

$$(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A)/\prod_{i\in\overline{\gamma}} a_{ii} > 0 \text{ для всех } \gamma \in \mathcal{C}(A), \quad |\gamma| \geqslant 2; \qquad (5.2)$$

(iii) *если A неприводима и $n \geqslant 2$, то A невырождена тогда и только тогда, когда либо хотя бы одно из неравенств в* (5.1) *является строгим, либо для некоторого контура $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$,*

$$(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A)/\prod_{i\in\overline{\gamma}} a_{ii} \neq \Big|\Pi_\gamma(A)/\prod_{i\in\overline{\gamma}} a_{ii}\Big|.$$

Заметив, что все неравенства в (5.1) выполняются с равенством в том и только том случае, когда

$$\big[r_i\big(|D_A^{-1}B|\big)\big]^\alpha \big[r_j\big(|D_A^{-1}B|\big)\big]^{1-\alpha} = 1 \text{ для всех } i \neq j \text{ таких, что } a_{ij} \neq 0,$$

применив следствие 5.1 из [4] к неотрицательной матрице $|D_A^{-1}B|$ и воспользовавшись утверждением (ii) теоремы 5.1, мы приходим к следующему полному описанию вырожденных неприводимых матриц, имеющих слабое диагональное преобладание порядка 1 с весом α.

Следствие 5.1. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, неприводима и удовлетворяет условиям* (5.1). *Матрица A является вырожденной тогда и только тогда, когда выполнены условия* (5.2) *и либо*

$$r_i'(A) = |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n, \qquad (5.3)$$

либо $\alpha = 1/2$,

$$\langle\, n\,\rangle = S_1 \cup S_2, \qquad (5.4)$$

где для некоторого $c > 1$

$$S_1 = \big\{ i \in \langle\, n\,\rangle : r_i'(A) = c|a_{ii}| \big\}, \qquad (5.5)$$

$$S_2 = \big\{ i \in \langle\, n\,\rangle : r_i'(A) = c^{-1}|a_{ii}| \big\}, \qquad (5.6)$$

и обе главные подматрицы

$$A[S_1] \quad \text{\it и} \quad A[S_2] \quad \text{\it диагональны.} \tag{5.7}$$

Замечание 5.1. Для неприводимой матрицы A из условий (5.4)–(5.7) следует, что оба подмножества S_1 и S_2 непусты. Действительно, если, скажем, S_1 было бы пусто, то в силу (5.4) и (5.7) мы бы имели $\langle n \rangle = S_2$, и $A = A[S_2]$ была бы диагональной матрицей, что противоречило бы неприводимости A.

Заметим, что следствие 5.1 обобщает обобщенную теорему Островского–Брауэра, установленную в [13] (см. также [3]) и дающую описание вырожденных неприводимых матриц, которые удовлетворяют условиям

$$r_i'(A)r_j'(A) \leqslant |a_{ii}|\,|a_{jj}| \quad \text{для всех} \quad i \neq j \quad \text{таких, что} \quad a_{ij} \neq 0.$$

Последняя теорема сама усиливает как классическую теорему Островского–Брауэра [16, 6], так и ее прямые обобщения, встречающиеся в литературе (см. [13]).

Теорема Островского–Брауэра утверждает, что матрица A невырождена, если все $n(n-1)/2$ неравенств

$$r_i'(A)r_j'(A) \leqslant |a_{ii}|\,|a_{jj}|, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,\dots,n, \tag{5.8}$$

выполнены и являются строгими. Ясно, что она немедленно следует из теоремы 5.1 (i). Кроме того, теорема 5.1 показывает, что для матрицы A, у которой имеются симметрично расположенные нулевые внедиагональные элементы ($a_{ij} = a_{ji} = 0$, $i \neq j$), соответствующие неравенства в (5.8) могут быть опущены.

По аналогии с теоремой Таусски было высказано предположение, что если матрица A неприводима и удовлетворяет условиям (5.8), причем хотя бы одно из последних выполнено со строгим неравенством, то A невырождена. Однако, это предположение, "доказанное" Брауэром [7], неверно (см., например, [14, 18]). Как следует из следствия 5.2, приводимого ниже, для того, чтобы исправить "теорему" Брауэра, необходимо дополнительно потребовать, чтобы строгое неравенство в (5.8) выполнялось для пары индексов $i \neq j$ таких, что a_{ij} и a_{ji} не обращаются в ноль одновременно, т.е. для некоторых вершин i и j, связанных в орграфе матрицы A дугой. В противном случае неприводимая матрица, имеющая строки с внедиагональным преобладанием, может быть вырождена.

Следующий результат является переформулировкой утверждения (iii) теоремы 5.1 с учетом следствия 5.1 и дает условия, необходимые и достаточные для того, чтобы неприводимая матрица со слабым диагональным преобладанием порядка 1 была невырожденной. Также этот результат обобщает утверждение следствия 3.1 со случая $k = 0$ на случай $k = 1$.

Следствие 5.2. *Пусть матрица $A = (a_{ij})$ удовлетворяет условиям следствия* 5.1. *Определим множества*

$$S_{\mathrm{diag}} = \bigl\{ i \in \langle\, n \,\rangle : r'_i(A) < |a_{ii}| \bigr\},$$
$$S_{\mathrm{off}} = \bigl\{ i \in \langle\, n \,\rangle : r'_i(A) > |a_{ii}| \bigr\}.$$

Матрица A невырождена тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

(i) $\mathcal{C}(A)$ *содержит простой контур γ, $|\gamma| \geqslant 2$, такой, что*

$$(-1)^{|\gamma|}\,\Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i \in \overline{\gamma}} a_{ii} \neq \Bigl|\Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i \in \overline{\gamma}} a_{ii}\Bigr|;$$

(ii) $S_{\mathrm{off}} = \varnothing$ *и* $S_{\mathrm{diag}} \neq \varnothing$, *т.е.*

$$|a_{ii}| \geqslant r'_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \tag{5.9}$$

и по крайней мере одно из неравенств в (5.9) *является строгим;*

(iii) $S_{\mathrm{off}} \neq \varnothing$, $S_{\mathrm{diag}} \neq \varnothing$ *и либо $\alpha \neq 1/2$, либо хотя бы одно из неравенств в* (5.1) *является строгим.*

Для полноты изложения ниже мы приводим некоторые смешанные условия, зависящие от множества дуг в орграфе $G(A)$, которые являются достаточными для невырожденности квазинеприводимой матрицы A. Эти условия вытекают из теоремы 4.3 и следствий 4.3 и 4.4 при $k = 2$.

Следствие 5.3. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, квазинеприводима. Если*

$$\begin{aligned} |a_{ii}|\,|a_{jj}| > {} & \prod_{s=1}^{r-p} \Bigl[r'_i\bigl(D_s^{-1} A D_s\bigr) r'_j\bigl(D_s^{-1} A D_s\bigr) \Bigr]^{\beta_s} \\ & \times \prod_{s=r-p+1}^{r} \Bigl[c'_i\bigl(D_s^{-1} A D_s\bigr) c'_j\bigl(D_s^{-1} A D_s\bigr) \Bigr]^{\beta_s} \\ & \text{для всех} \quad i \neq j \quad \text{таких, что} \quad a_{ij} \neq 0, \end{aligned} \tag{5.10}$$

где $\sum_{s=1}^{r} \beta_s = 1$, $\beta_s > 0$, $s = 1, \ldots, r$, $0 \leqslant p \leqslant r$, $r \geqslant 1$, *а матрицы* D_s, $s = 1, \ldots, r$, *невырождены и диагональны, то* A *невырождена.*

Следствие 5.4. *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *квазинеприводима. Если при некотором* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$\begin{gathered} |a_{ii}|\,|a_{jj}| > \big[r_i'(A) r_j'(A)\big]^{\alpha} \big[c_i'(A) c_j'(A)\big]^{1-\alpha} \\ \text{для всех } \; i \neq j \; \text{ таких, что } \; a_{ij} \neq 0, \end{gathered} \tag{5.11}$$

то A *невырождена.*

Заметим, что условия (5.11) ослабляют достаточные условия Островского [17]

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > \big[r_i'(A) r_j'(A)\big]^{\alpha} \big[c_i'(A) c_j'(A)\big]^{1-\alpha}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{5.12}$$

за счет непосредственного учета разреженности матрицы A. Однако, для обеспечения невырожденности D_A приходится дополнительно требовать, чтобы A была квазинеприводимой.

Следствие 5.5. *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *квазинеприводима. Если* B *не имеет ни нулевых строк, ни нулевых столбцов и*

$$\begin{gathered} |a_{ii}|\,|a_{jj}| > \left[\frac{r_i(|B|^{s+1}) r_j(|B|^{s+1})}{r_i(|B|^{s}) r_j(|B|^{s})}\right]^{\alpha} \left[\frac{c_i(|B|^{q+1}) c_j(|B|^{q+1})}{c_i(|B|^{q}) c_j(|B|^{q})}\right]^{1-\alpha} \\ \text{для всех } \; i \neq j \; \text{ таких, что } \; a_{ij} \neq 0 \end{gathered} \tag{5.13}$$

или же B *не имеет нулевых строк и*

$$\begin{gathered} |a_{ii}|\,|a_{jj}| > \left[\frac{r_i(|B|^{s+1}) r_j(|B|^{s+1})}{r_i(|B|^{s}) r_j(|B|^{s})}\right]^{\alpha} \left[\frac{r_i(|B|^{q+1}) r_j(|B|^{q+1})}{r_i(|B|^{q}) r_j(|B|^{q})}\right]^{1-\alpha} \\ \text{для всех } \; i \neq j \; \text{ таких, что } \; a_{ij} \neq 0, \end{gathered} \tag{5.14}$$

то A *невырождена.*

§6. Матрицы, обладающие контурным диагональным преобладанием

Понятие обобщенного контурного диагонального преобладания вводится следующим определением.

Определение 6.1. *Будем говорить, что матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *обладает слабым обобщенным контурным диагональным преобладанием (по строкам), если для некоторой невырожденной диагональной матрицы* D *выполнено условие*

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii}| \geqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}} r_i'(D^{-1}AD) \quad \text{для любого } \gamma \in \mathcal{C}(A) \text{ длины } |\gamma| \geqslant 2. \quad (6.1)$$

Если же все неравенства в (6.1) *строгие, то будем говорить, что матрица* A *обладает строгим обобщенным контурным диагональным преобладанием. При* $D = I_n$ *в* (6.1) *будем говорить о контурном, слабом или строгом, диагональном преобладании.*

Матрицы с контурным диагональным преобладанием были введены в рассмотрение Р. Бруальди, установившим следующие знаменитые достаточные условия невырожденности матриц.

Теорема 6.1 [8]. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *и предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

(i) *матрица* A *является слабо неприводимой и обладает строгим контурным диагональным преобладанием;*

(ii) *матрица* A *неприводима и обладает слабым контурным диагональным преобладанием, причем хотя бы одно из неравенств в* (6.1), *где* $D = I_n$, *строгое.*

Тогда A *невырождена.*

Неприводимые матрицы, обладающие слабым контурным диагональным преобладанием, исследовались в работе [3], где для них был установлен следующий компактно формулируемый критерий вырожденности.

Теорема 6.2 [3]. *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *неприводима и обладает слабым контурным диагональным преобладанием. Тогда матрица* A *вырождена в том и только том случае, когда равенство*

$$(-1)^{|\gamma|}\frac{\Pi_\gamma(A)}{\Pi_\gamma(|A|)} = \prod_{i\in\overline{\gamma}} \frac{a_{ii}}{r_i'(A)} \quad (6.2)$$

справедливо для всех $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$.

Ниже мы будем исследовать проблему вырожденности/невырожденности для матриц, обладающих обобщенным контурным диагональным преобладанием, применяя общий для этой статьи подход, основанный на оценках $\rho(|D_A^{-1}B|)$ сверху. Нам понадобится следующая верхняя оценка.

Теорема 6.3 [5]. *Пусть $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – неотрицательная матрица без нулевых строк и пусть D – диагональная матрица порядка n с положительными диагональными элементами. Для перроновского корня матрицы X справедлива оценка*

$$\rho(X) \leqslant \max_{\gamma\in\mathcal{C}(X)} \Big[\prod_{i\in\overline{\gamma}} r_i(D^{-1}XD)\Big]^{1/|\gamma|}, \tag{6.3}$$

причем если X неприводима, то неравенство (6.3) является равенством тогда и только тогда, когда

$$\Big[\prod_{i\in\overline{\gamma}} r_i(D^{-1}XD)\Big]^{1/|\gamma|} = \rho(X) \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \mathcal{C}(X).$$

Заметим, что при $D = I_n$ теорема 6.3 впервые была доказана Ю. А. Альпиным [1].

Следующий результат аналогичен лемме 4.2 и почти очевиден.

Лемма 6.1. *Если матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, квазинеприводима и обладает слабым обобщенным контурным диагональным преобладанием, то D_A невырождена.*

Теперь мы готовы доказать контурный аналог теоремы 4.2.

Теорема 6.4. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, квазинеприводима и удовлетворяет условию (6.1). Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если $\mathcal{C}(A)$ не содержит контуров длины большей 1 или же все неравенства в (6.1) являются строгими, то A невырождена;*

(ii) *если A неприводима, то она вырождена тогда и только тогда, когда $n \geqslant 2$, все неравенства в (6.1) являются равенствами и для всех $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$, справедливо неравенство*

$$(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A)\Big/\prod_{i\in\overline{\gamma}} a_{ii} > 0. \tag{6.4}$$

Доказательство. Докажем сперва утверждение (i). Сначала мы рассмотрим случай, когда $\mathcal{C}(A)$ не содержит контуров длины большей 1, т.е. тот случай, когда $\mathcal{C}(B) = \varnothing$, где $B = D_A - A$. Как хорошо известно (см., например, [10, теорема 6.1]), в этом случае матрица B перестановочно подобна верхней треугольной матрице, так что все неприводимые компоненты матриц B и $A = D_A - B$ имеют порядок 1. Поскольку матрица A квазинеприводима, все ее неприводимые компоненты невырождены, так что невырождена и сама A.

Теперь предположим, что $\mathcal{C}(B) \neq \varnothing$, а значит $n \geqslant 2$. В этом случае матрица D_A невырождена в силу леммы 6.1, и мы можем перейти к матрице $D_A^{-1}B$. С другой стороны, ввиду леммы 4.1, матрица A невырождена тогда и только тогда, когда невырождена каждая из её неприводимых компонент порядка большего 1. Пусть $A[S]$, где $S \subseteq \langle\, n\,\rangle$, такая неприводимая компонента. Применяя к матрице $D_A[S]^{-1}B[S]$ (не имеющей нулевых строк) теорему 6.3 и используя (6.1), мы выводим:

$$\begin{aligned}\rho\Big(|D_A[S]^{-1}B[S]|\Big) &\leqslant \max_{\gamma\in\mathcal{C}(B[S])}\Big[\prod_{i\in\overline{\gamma}} r_i\big(D[S]^{-1}D_A[S]^{-1}B[S]D[S]\big)\Big]^{1/|\gamma|}\\ &= \max_{\gamma\in\mathcal{C}(B[S])}\Big[\prod_{i\in\overline{\gamma}} r_i'\big(D[S]^{-1}A[S]D[S]\big)\Big/\prod_{i\in\overline{\gamma}}|a_{ii}|\Big] \leqslant 1, \qquad (6.5)\end{aligned}$$

причем последнее неравенство в (6.5) является строгим, если все неравенства в (6.1) строгие. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\rho\Big(|D_A[S]^{-1}B[S]|\Big) < 1,$$

так что в силу леммы 2.2 (i) каждая неприводимая компонента $A[S]$ порядка $|S| \geqslant 2$ невырождена, что и завершает доказательство (i).

Наконец, пусть матрица A квазинеприводима и неприводима. Если $n = 1$, то A очевидно невырождена. Если же $n \geqslant 2$, то, в силу (6.5) с $S = \langle\, n\,\rangle$, мы имеем

$$\rho\big(|D_A^{-1}B|\big) \leqslant 1,$$

а по теореме 6.3 это неравенство является равенством тогда и только тогда, когда

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} r_i\big(D^{-1}D_A^{-1}BD\big) = 1 \quad \text{для всех} \quad \gamma\in\mathcal{C}(B)$$

или, другими словами, тогда и только тогда, когда все неравенства в (6.1) являются равенствами. Теперь утверждение (ii) следует из лемм 2.2 и 2.3. □

Ясно, что оба утверждения теоремы 6.4 улучшают соответствующие утверждения теоремы 6.1 Бруальди. Что же касается теоремы 6.2, то она равносильна утверждению (ii) теоремы 6.4 при $n \geqslant 2$ и $D = I_n$. Действительно, мы должны убедиться, что для любого $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$, равенство (6.2) равносильно системе соотношений

$$\prod_{i \in \overline{\gamma}} |a_{ii}| = \prod_{i \in \overline{\gamma}} r_i'(A), \tag{6.6}$$

$$(-1)^{|\gamma|} \Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i \in \overline{\gamma}} a_{ii} > 0. \tag{6.7}$$

Переходя в (6.2) к модулям, мы получаем равенство (6.6), а неравенство (6.7) легко следует из (6.2) и (6.6). Обратно, из (6.6) вытекает, что

$$\prod_{i \in \overline{\gamma}} \frac{a_{ii}}{r_i'(A)} = \prod_{i \in \overline{\gamma}} \frac{a_{ii}}{|a_{ii}|},$$

так что равенство (6.2) оказывается равносильным соотношению

$$(-1)^{|\gamma|} \frac{\Pi_\gamma(A)}{\prod\limits_{i \in \overline{\gamma}} a_{ii}} = \frac{\Pi_\gamma(|A|)}{\prod\limits_{i \in \overline{\gamma}} |a_{ii}|},$$

которое следует из (6.7).

Двигаясь вперед по той же схеме, что и в предыдущих параграфах, ниже мы приводим критерий невырожденности для неприводимых матриц, обладающих обобщенным контурным диагональным преобладанием, который очевидным образом вытекает из теоремы 6.4 (ii).

Следствие 6.1. *Неприводимая матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, удовлетворяющая условиям* (6.1), *невырождена тогда и только тогда, когда справедливо одно из следующих утверждений:*

(i) *по крайней мере одно из неравенств в* (6.1) *является строгим;*

(ii) *неравенство*

$$(-1)^{|\gamma|} \Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i \in \overline{\gamma}} a_{ii} \neq \left| \Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i \in \overline{\gamma}} a_{ii} \right| \tag{6.8}$$

справедливо для хотя бы одного контура $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$.

Полагая в теореме 6.4 и следствии 6.1 $D = I_n$ и $D = D_{r(|B|^s)}$, используя соотношения (3.6) и учитывая тот факт, что если B не имеет нулевых строк, то A имеет неприводимую компоненту порядка большего 1, мы приходим к следующему контурному аналогу следствия 3.2.

Следствие 6.2. *Пусть* $s \geqslant 0$, *матрица* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *квазинеприводима,* B *не имеет нулевых строк и пусть*

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii}| \geqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}} r_i(|B|^{s+1})/r_i(|B|^s) \quad \text{для всех} \;\; \gamma \in \mathcal{C}(A), \quad |\gamma| \geqslant 2. \tag{6.9}$$

Справедливы следующие утверждения:

(i) *если все неравенства в* (6.9) *строгие, то* A *невырождена;*

(ii) *если матрица* A *неприводима, то она вырождена тогда и только тогда, когда все неравенства в* (6.9) *являются равенствами, а условие* (6.4) *выполнено для всех* $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$;

(iii) *если матрица* A *неприводима, то она невырождена тогда и только тогда, когда либо хотя бы одно из неравенств* (6.9) *является строгим, либо условие* (6.8) *выполнено для некоторого контура* $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$.

Замечание 6.1. При $s = 0$ предположение об отсутствии у матрицы B нулевых строк в следствии 6.2 является излишним.

В оставшейся части этого параграфа мы представим некоторые смешанные контурные условия, достаточные для невырожденности квазинеприводимых матриц. Эти условия будут получены, исходя из следующего контурного аналога леммы 4.3.

Лемма 6.3. *Пусть* $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *– неотрицательная матрица и пусть*

$$\Delta_s = \operatorname{diag}\left(\delta_1^{(s)}, \ldots, \delta_n^{(s)}\right), \quad s = 1, \ldots, r, \quad r \geqslant 1,$$

– диагональные матрицы с положительными диагональными элементами. Предположим, что

$$\rho(\Delta_s^{-1} X) \leqslant 1, \quad s = 1, \ldots, r. \tag{6.10}$$

Тогда для произвольных $\beta_s > 0$, $s = 1, \dots, r$, *таких, что* $\sum_{s=1}^{r} \beta_s = 1$, *справедливо неравенство*

$$\rho(X) \leqslant \max_{\gamma \in \mathcal{C}(X)} \Big[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \prod_{s=1}^{r} (\delta_i^{(s)})^{\beta_s} \Big]^{1/|\gamma|}. \tag{6.11}$$

Доказательство. В силу теоремы 3.1 из [5] и условий (6.10) мы имеем:

$$\begin{aligned} \rho(X) &\leqslant \max_{\gamma \in \mathcal{C}(X)} \Big[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \prod_{s=1}^{r} (\delta_i^{(s)})^{\beta_s} \Big]^{1/|\gamma|} \prod_{s=1}^{r} \big[\rho(\Delta_s^{-1} X)\big]^{\beta_s} \\ &\leqslant \max_{\gamma \in \mathcal{C}(X)} \Big[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \prod_{s=1}^{r} (\delta_i^{(s)})^{\beta_s} \Big]^{1/|\gamma|}. \qquad \square \end{aligned}$$

Следующая теорема обобщает утверждение (i) теоремы 6.4 на случай смешанных условий контурного диагонального преобладания.

Теорема 6.5. *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, *квазинеприводима, и предположим, что либо* $\mathcal{C}(A)$ *не содержит контуров длины большей* 1, *либо для всех* $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$, *справедливы строгие неравенства*

$$\prod_{i \in \overline{\gamma}} |a_{ii}| > \prod_{i \in \overline{\gamma}} \Big\{ \prod_{s=1}^{r-p} \big[r_i'(D_s^{-1} A D_s)\big]^{\beta_s} \prod_{s=r-p+1}^{r} \big[c_i'(D_s^{-1} A D_s)\big]^{\beta_s} \Big\}, \tag{6.12}$$

где $\sum_{s=1}^{r} \beta_s = 1$, $\beta_s > 0$, $s = 1, \dots, r$, $0 \leqslant p \leqslant r$, $r \geqslant 1$, *а* D_s, $s = 1, \dots, r$, *– невырожденные диагональные матрицы. Тогда матрица* A *невырождена.*

Доказательство. Заметим сперва, что в условиях теоремы матрица D_A невырождена. Ввиду леммы 4.1, нам достаточно показать, что невырождены все неприводимые компоненты матрицы A порядка большего 1.

Пусть $A[S]$, где $S \subseteq \langle n \rangle$ и $|S| \geqslant 2$, – неприводимая компонента A. Для $i \in S$ положим

$$\delta_i^{(s)} = \begin{cases} r_i\big(D_s[S]^{-1} D_A[S]^{-1} B[S] D_s[S]\big), & s = 1, \dots, r-p, \\ c_i\Big[\big(D_A[S]^{-1} D_s[S]\big)^{-1} D_A[S]^{-1} B[S] \big(D_A[S]^{-1} D_s[S]\big)\Big], & \\ & s = r-p+1, \dots, r, \end{cases}$$

где $A = D_A - B$, и определим диагональные матрицы порядка $|S|$

$$\Delta_s = \mathrm{diag}\,\bigl(\delta_i^{(s)}\bigr)_{i\in S}, \quad s = 1, \dots, r.$$

Ясно, что все матрицы Δ_s имеют положительные диагональные элементы, и выполнены соотношения (см. лемму 3.1 в [4])

$$\rho\bigl(\Delta_s^{-1}|D_A[S]^{-1}B[S]|\bigr) = 1, \quad s = 1, \dots, r.$$

Применяя лемму 6.3 и используя (6.12), мы выводим:

$$\rho\bigl(|D_A[S]^{-1}B[S]|\bigr) \leqslant \max_{\gamma\in\mathcal{C}(B[S])} \Bigl[\prod_{i\in\overline{\gamma}} \prod_{s=1}^{r} (\delta_i^{(s)})^{\beta_s}\Bigr]^{1/|\gamma|} < 1,$$

откуда невырожденность неприводимой компоненты $A[S]$ следует в силу леммы 2.2 (i). $\square$

Приведем некоторые следствия теоремы 6.5.

Следствие 6.3. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, квазинеприводима, и предположим, что либо $\mathcal{C}(A)$ не содержит контуров длины большей 1, либо для всех $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$,*

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii}| > \Bigl[\prod_{i\in\overline{\gamma}} r_i'(A)\Bigr]^{\alpha} \Bigl[\prod_{i\in\overline{\gamma}} c_i'(A)\Bigr]^{1-\alpha}, \tag{6.13}$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда A невырождена.

Доказательство. В теореме 6.5 следует положить $r = 2$, $p = 1$, $D_1 = D_2 = I_n$, $\beta_1 = \alpha$. $\square$

Замечание 6.2. Для слабо неприводимой матрицы A утверждение следствия 6.3 равносильно следствию 2.13 из [8].

Следствие 6.4. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, квазинеприводима. Если у матрицы B нет ни нулевых строк, ни нулевых столбцов и для всех $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$, справедливы неравенства*

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii}| > \Bigl[\prod_{i\in\overline{\gamma}} \frac{r_i(|B|^{s+1})}{r_i(|B|^s)}\Bigr]^{\alpha} \Bigl[\prod_{i\in\overline{\gamma}} \frac{c_i(|B|^{q+1})}{c_i(|B|^q)}\Bigr]^{1-\alpha}, \tag{6.14}$$

или же у B нет нулевых строк и для всех $\gamma \in \mathcal{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$, справедливы неравенства

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii}| > \left[\prod_{i\in\overline{\gamma}} \frac{r_i(|B|^{s+1})}{r_i(|B|^s)}\right]^{\alpha} \left[\prod_{i\in\overline{\gamma}} \frac{r_i(|B|^{q+1})}{r_i(|B|^q)}\right]^{1-\alpha}, \tag{6.15}$$

где $s, q \geqslant 0$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то матрица A невырождена.

Доказательство. В теореме 6.5 следует положить $r = 2$, $p = 1$, $D_1 = D_{r(|B|^s)}$, $D_2 = D^{-1}_{c(|B|^q)}$, $\beta_1 = \alpha$ в первом случае и $r = 2$, $p = 0$, $D_1 = D_{r(|B|^s)}$, $D_2 = D_{r(|B|^q)}$, $\beta_1 = \alpha$ во втором случае. □.

§7. Области, содержащие собственные значения матрицы

Как хорошо известно, утверждения о том, что матрицы, удовлетворяющие определенным условиям диагонального преобладания, невырождены, могут быть переформулированы как теоремы об областях, содержащих все собственные значения таких матриц. Например, пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, и пусть $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$. Поскольку матрица $A - \lambda I_n$ является вырожденной, по крайней мере одно из неравенств

$$|a_{ii} - \lambda| > r_i'(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

не может быть верным, так как в противном случае матрица $A - \lambda I_n$ была бы невырожденной в силу теоремы 3.1 (i). Таким образом,

$$\mathrm{Spec}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |a_{ii} - z| \leqslant r_i'(A)\right\} \equiv G, \tag{7.1}$$

что и составляет утверждение знаменитой теоремы о кругах Гершгорина.

Обратно, если матрица A обладает строгим диагональным преобладанием, то точка $z = 0$ не принадлежит области G, определенной в (7.1), которая содержит все собственные значения A. Следовательно, матрица A не имеет нулевого собственного значения, т.е. она невырождена.

Аналогично, теорема Островского–Брауэра, утверждающая, что при $n \geqslant 2$ матрица A, удовлетворяющая условиям

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i'(A) r_j'(A), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{7.2}$$

невырождена, может интерпретироваться как утверждение

$$\mathrm{Spec}(A) \subseteq \bigcup_{i \neq j} \{z \in \mathbb{C}\colon |a_{ii} - z|\,|a_{jj} - z| \leqslant r'_i(A) r'_j(A)\}, \tag{7.3}$$

означающее, что каждое собственное значение A принадлежит хотя бы одному из $n(n-1)/2$ овалов Кассини. На основании приведенных результатов естественно предположить, что, возможно, все собственные значения матрицы A также принадлежат и объединению областей

$$D_{i_1,\dots,i_r} = \Big\{z \in \mathbb{C}\colon \prod_{j=1}^{r} |a_{i_j i_j} - z| \leqslant \prod_{j=1}^{r} r'_{i_j}(A)\Big\}, \tag{7.4}$$

где $r \geqslant 3$ – некоторое фиксированное целое, а $i_1, \dots, i_r \in \langle\, n\,\rangle$ все *различны*. Эта гипотеза обсуждается, например, в работах [15, 8, 11], в которых она опровергается на примере квазинеприводимой матрицы

$$A = \left[\begin{array}{c:c} \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} & O \\ \hdashline O & I_{n-2} \end{array}\right] \tag{7.5}$$

для которой $\mathrm{Spec}(A) = \{0, 1, 2\}$, тогда как при $r \geqslant 3$ все области (7.4) состоят из единственной точки $z = 1$.

Обобщение (7.1) и (7.3) было предложено Бруальди [8], доказавшим, что для слабо неприводимой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$,

$$\mathrm{Spec}(A) \subseteq \bigcup_{\substack{\gamma \in \mathcal{C}(A), \\ |\gamma| \geqslant 2}} \Big\{z \in \mathbb{C}\colon \prod_{i \in \overline{\gamma}} |a_{ii} - z| \leqslant \prod_{i \in \overline{\gamma}} r'_i(A)\Big\}. \tag{7.6}$$

Как следует из теоремы 6.5, справедливо также и следующее более общее утверждение.

Теорема 7.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. *Тогда*

$$\operatorname{Spec}(A) \subseteq \bigcup_{\substack{\gamma\in\mathcal{C}(A),\\ |\gamma|\geqslant 2}} \Bigg\{ z \in \mathbb{C}\colon \prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii} - z|$$

$$\leqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}} \Bigg[\prod_{s=1}^{r-p} \big[r_i'(D_s^{-1} A D_s) \big]^{\beta_s} \prod_{s=r-p+1}^{r} \big[c_i'(D_s^{-1} A D_s) \big]^{\beta_s} \Bigg\} \qquad (7.7)$$

$$\bigcup \Bigg\{ a_{ii},\, i \in \langle\, n\,\rangle \colon i \notin \bigcup_{\substack{\gamma\in\mathcal{C}(A),\\ |\gamma|\geqslant 2}} \overline{\gamma} \Bigg\},$$

где $\sum\limits_{s=1}^{r} \beta_s = 1$, $\beta_s > 0$, $s = 1, \ldots, r$, $0 \leqslant p \leqslant r$, $r \geqslant 1$, *а* D_s, $s = 1, \ldots, r$, *– произвольные невырожденные диагональные матрицы.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$. Если $\lambda = a_{i_0 i_0}$, $i_0 \in \langle\, n\,\rangle$, то либо $i_0 \in \overline{\gamma}$, где $\gamma \in \mathcal{C}(A)$ и $|\gamma| \geqslant 2$, либо $i_0 \notin \bigcup\limits_{\substack{\gamma\in\mathcal{C}(A),\\ |\gamma|\geqslant 2}} \overline{\gamma}$. В обоих случаях λ тривиальным образом содержится в правой части (7.7).

Если же $\lambda \neq a_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$, то $n \geqslant 2$, а вырожденная матрица $A - \lambda I_n$ имеет невырожденную главную диагональ, а значит (см. §4) она квазинеприводима. Следовательно, по теореме 6.5 множество контуров $\mathcal{C}(A - \lambda I_n)$ необходимо содержит по крайней мере один простой контур длины не меньшей 2, и для некоторого $\gamma \in \mathcal{C}(A{-}\lambda I_n)$, $|\gamma| \geqslant 2$, справедливо неравенство

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii} - \lambda| \leqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}} \Bigg\{ \prod_{s=1}^{r-p} \big[r_i'(D_s^{-1} A D_s) \big]^{\beta_s} \prod_{s=r-p+1}^{r} \big[c_i'(D_s^{-1} A D_s) \big]^{\beta_s} \Bigg\}.$$

Теперь для завершения доказательства остается лишь заметить, что

$$\big\{ \gamma \in \mathcal{C}(A - \lambda I_n) \colon |\gamma| \geqslant 2 \big\} = \big\{ \gamma \in \mathcal{C}(A) \colon |\gamma| \geqslant 2 \big\}.$$

□

В частности, полагая в теореме 7.1 $r = 2$, $p = 1$, $\beta_1 = \alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и $D_1 = D_2 = I_n$, мы приходим к следующему результату, обобщающему следствие 2.13 в работе [8] на произвольные матрицы.

Следствие 7.1. *Если* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$ *и* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *то*

$$\operatorname{Spec}(A) \subseteq \bigcup_{\substack{\gamma\in\mathcal{C}(A),\\ |\gamma|\geqslant 2}} \Big\{ z \in \mathbb{C}\colon \prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii} - z| \leqslant \Big[\prod_{i\in\overline{\gamma}} r_i'(A)\Big]^{\alpha} \Big[\prod_{i\in\overline{\gamma}} c_i'(A)\Big]^{1-\alpha} \Big\}$$
$$\bigcup \Big\{ a_{ii}, i \in \langle\, n\,\rangle\colon i \notin \bigcup_{\substack{\gamma\in\mathcal{C}(A),\\ |\gamma|\geqslant 2}} \overline{\gamma} \Big\}. \qquad (7.8)$$

Ясно, что, полагая в следствии 7.1 $\alpha = 1$, мы получаем обобщение (7.6) со слабо неприводимых на произвольные матрицы.

Хотя теорема Бруальди и теорема 7.1 несомненно являются обобщениями (7.1) и (7.3), эти обобщения не являются прямыми. Тем не менее, в противоположность сложившемуся мнению, прямые обобщения все же существуют и вытекают из теоремы 4.2 (i) в случае чистых условий с весом и из теоремы 4.3 в случае смешанных условий. Обобщение, вытекающее из теоремы 4.3, имеет следующий вид.

Теорема 7.2. *Пусть* $k \geqslant 1$ – *целое и пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. *Тогда*

$$\operatorname{Spec}(A) \subseteq \bigcup_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{P}_{k-1}(A-D_A)} \Big\{ z \in \mathbb{C}\colon \prod_{j=1}^{k} |a_{i_j i_j} - z|$$
$$\leqslant \prod_{j=1}^{k} \Big[\prod_{s=1}^{r-p} \big[r_{i_j}'(D_s^{-1} A D_s)\big]^{\beta_s} \prod_{s=r-p+1}^{r} \big[c_{i_j}'(D_s^{-1} A D_s)\big]^{\beta_s} \Big] \Big\} \qquad (7.9)$$
$$\bigcup \Big\{ a_{ii}, i \in \langle\, n\,\rangle\colon A[i] \text{ — неприводимая компонента } A \Big\},$$

где $\sum_{s=1}^{r} \beta_s = 1$, $\beta_s > 0$, $s = 1, \dots, r$, $0 \leqslant p \leqslant r$, $r \geqslant 1$, *а* D_s, $s = 1, \dots, r$, – *произвольные невырожденные диагональные матрицы.*

Полагая в теореме 7.2 $r = 1$, $p = 0$ и $D_1 = I_n$, мы немедленно приходим к следующему результату.

Следствие 7.2. *Для любого* $k \geqslant 1$ *и произвольной матрицы* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$,

$$\operatorname{Spec}(A) \subseteq \bigcup_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{P}_{k-1}(A-D_A)} \Big\{ z \in \mathbb{C}\colon \prod_{j=1}^{k} |a_{i_j i_j} - z| \leqslant \prod_{j=1}^{k} r_{i_j}'(A) \Big\}$$

$$\bigcup\Big\{a_{ii}, i \in \langle\, n\,\rangle\colon A[i] \text{ — \textit{неприводимая компонента} } A\Big\}. \qquad (7.10)$$

Ясно, что при $k = 1$ включение (7.10) сводится к (7.1) (поскольку по определению $\mathcal{P}_0(A - D_A) = \langle\, n\,\rangle$), тогда как при $k = 2$ формула (7.10) принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(A) \subseteq \bigcup_{i\neq j\colon\ a_{ij}\neq 0} \Big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |a_{ii} - z|\,|a_{jj} - z| \leqslant r_i'(A)\, r_j'(A)\Big\} \\ \bigcup\Big\{a_{ii}, i \in \langle\, n\,\rangle\colon A[i] \text{ — неприводимая компонента } A\Big\}. \end{aligned} \qquad (7.11)$$

Конечно же, при $n \geqslant 2$ область, фигурирующая в правой части (7.11), содержится в области, фигурирующей в правой части (7.3), так что (7.11) уточняет (7.3), а следствие 7.2 обобщает на случай $k \geqslant 3$ именно уточненную формулировку (7.11), обобщающую утверждение (i) теоремы 3.1 из [13] на произвольные матрицы.

Возвращаясь к матрице (7.5), легко понять, что в этом случае следствие 7.2 при всех $k \geqslant 1$ дает один и тот же верный результат

$$\operatorname{Spec}(A) \subseteq \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |1 - z| \leqslant 1\big\}.$$

Следует подчеркнуть, что следствие 7.2 подправляет множество областей (7.4) в двух отношениях. Во-первых, поскольку $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{P}_{k-1}(A - D_A)$, все строчные суммы $r_{i_j}'(A)$, встречающиеся в (7.10), отличны от нуля, так что нулевые произведения $r_{i_j}'(A)$, которые могут появиться в (7.4), исключены из (7.10). Во-вторых, в (7.10) среди индексов $i_1, \dots, i_k$ (но не среди пар соседних) могут встречаться равные, благодаря чему в объединение, стоящее в правой части (7.10), входят дополнительные области, отсутствующие среди областей (7.4).

Заметим, что из теоремы 5.1 (i) легко следует, что для произвольного α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$\operatorname{Spec}(A) \subseteq \bigcup_{i\neq j\colon\ a_{ij}\neq 0} \Big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |a_{ii} - z|^{\alpha}|a_{jj} - z|^{1-\alpha} \leqslant \big[r_i'(A)\big]^{\alpha}\big[r_j'(A)\big]^{1-\alpha}\Big\}$$

$$\bigcup\Big\{a_{ii}, i \in \langle\, n\,\rangle\colon A[i] \text{ — неприводимая компонента } A\Big\}, \qquad (7.12)$$

что дает нам некоторое усиление утверждения (7.11), которое соответствует случаю $\alpha = 1/2$ в (7.12).

В заключение рассмотрим собственные значения неприводимых матриц, которые являются граничными точками для некоторых из областей рассмотренных выше.

Из следствия 4.2 (ii) легко следует такой результат, дополняющий следствие 7.2.

Теорема 7.3. *Пусть $k \geqslant 1$ – целое число и пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – неприводимая матрица. Если точка $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям*

$$\prod_{j=1}^{k} |a_{i_j i_j} - \lambda| \geqslant \prod_{j=1}^{k} r'_{i_j}(A) \text{ для всех } (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{P}_{k-1}(A - D_A) \quad (7.13)$$

и для некоторого пути $(i_1^*, \dots, i_k^*) \in \mathcal{P}_{k-1}(A - D_A)$

$$\prod_{j=1}^{k} |a_{i_j^* i_j^*} - \lambda| = \prod_{j=1}^{k} r'_{i_j^*}(A), \quad (7.14)$$

то $\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$ тогда и только тогда, когда все неравенства в (7.13) являются равенствами и

$$\Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i\in\overline{\gamma}} (\lambda - a_{ii}) > 0 \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \mathcal{C}(A), \quad |\gamma| \geqslant 2. \quad (7.15)$$

При $k = 1$ из теоремы 7.3 немедленно вытекает следующий результат, впервые представленный в [12].

Следствие 7.3. *Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – неприводимая матрица и точка $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям*

$$|a_{ii} - \lambda| \geqslant r'_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.16)$$

причем

$$|a_{i_0 i_0} - \lambda| = r'_{i_0}(A) \quad \text{для некоторого} \quad i_0 \in \langle n \rangle, \quad (7.17)$$

то точка λ является собственным значением A тогда и только тогда, когда она является общей граничной точкой всех кругов Гершгорина $\{z \in \mathbb{C}\colon |a_{ii} - z| \leqslant r'_i(A)\}$, $i = 1, \dots, n$, т.е. когда все неравенства в (7.16) являются равенствами и, кроме того, выполнено условие (7.15).

Для $k = 2$ результат, вытекающий из теоремы 7.3, может быть улучшен с помощью следствия 5.1. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.4. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, неприводима и пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям*

$$\bigl|a_{ii} - \lambda\bigr|^{\alpha} \bigl|a_{jj} - \lambda\bigr|^{1-\alpha} \geqslant \bigl[r'_i(A)\bigr]^{\alpha} \bigl[r'_j(A)\bigr]^{1-\alpha}$$
$$\text{для всех} \quad i \neq j \quad \text{таких, что} \quad a_{ij} \neq 0$$

и

$$\bigl|a_{i_0 i_0} - \lambda\bigr|^{\alpha} \bigl|a_{j_0 j_0} - \lambda\bigr|^{1-\alpha} = \bigl[r'_{i_0}(A)\bigr]^{\alpha} \bigl[r'_{j_0}(A)\bigr]^{1-\alpha},$$
$$\text{где} \quad i_0 \neq j_0 \quad \text{и} \quad a_{i_0 j_0} \neq 0,$$

является собственным значением A тогда и только тогда, когда выполнено условие (7.15) и либо

$$|a_{ii} - \lambda| = r'_i(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

т.е. λ – это общая граничная точка всех кругов Гершгорина, либо $\alpha = 1/2$, $\langle\, n\,\rangle = S_1 \cup S_2$, где для некоторого $c > 1$

$$S_1 = \bigl\{ i \in \langle\, n\,\rangle \colon r'_i(A) = c|a_{ii} - \lambda| \bigr\}, \tag{7.18}$$

$$S_2 = \bigl\{ i \in \langle\, n\,\rangle \colon r'_i(A) = c^{-1}|a_{ii} - \lambda| \bigr\}, \tag{7.19}$$

и обе главные подматрицы $A[S_1]$ и $A[S_2]$ диагональны.

Заметим, что из (7.18) и (7.19) следует, что λ – внутренняя точка кругов Гершгорина

$$\bigl\{ z \in \mathbb{C} \colon |a_{ii} - z| \leqslant r'_i(A) \bigr\}, \quad i \in S_1,$$

лежащая вне остальных кругов. Кроме того, λ является общей граничной точкой овалов Кассини

$$\bigl\{ z \in \mathbb{C} \colon |a_{ii} - z|\,|a_{jj} - z| \leqslant r'_i(A)\, r'_j(A) \bigr\} \quad \text{для всех} \quad i \in S_1 \quad \text{и} \quad j \in S_2.$$

Заметим также, что для $\alpha = 1/2$ утверждение теоремы 7.4 впервые было доказано в [13].

Последний наш результат, включенный для полноты изложения, касается граничных точек областей Бруальди. Он немедленно следует из теоремы 6.2 и впервые был опубликован в работе [3].

Теорема 7.5. *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *неприводима и пусть точка* $\lambda \in \mathbb{C}$ *удовлетворяет условиям*

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii} - \lambda| \geqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}} r_i'(A) \ \text{для всех}\ \gamma \in \mathcal{C}(A), \quad |\gamma| \geqslant 2,$$

и

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}_0} |a_{ii} - \lambda| = \prod_{i\in\overline{\gamma}_0} r_i'(A) \ \text{для некоторого}\ \gamma_0 \in \mathcal{C}(A), \quad |\gamma_0| \geqslant 2.$$

Точка λ *является собственным значением* A *в том и только том случае, когда равенство*

$$\Pi_\gamma(A)/\Pi_\gamma(|A|) = \prod_{i\in\overline{\gamma}}(\lambda - a_{ii})\Big/\prod_{i\in\overline{\gamma}} r_i'(A)$$

справедливо для всех $\gamma \in \mathcal{C}(A)$ *длины* $|\gamma| \geqslant 2$.

Литература

1. Ю. А. Альпин, *Границы для перроновского корня неотрицательной матрицы, учитывающие свойства ее графа.* — Мат. заметки, **58** (1995), 635–637.
2. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*. Наука, М. (1953).
3. Л. Ю. Колотилина, *О теореме Бруальди.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **284** (2002), 48–63.
4. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **284** (2002), 77–122.
5. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы. II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **296** (2003), 60–88.
6. A. Brauer, *Limits for the characteristic roots of a matrix:* II. — Duke Math. J., **14** (1947), 21–26.
7. A. Brauer, *Limits for the characteristic roots of a matrix:* IV. — Duke Math. J., **19** (1952), 75–91.
8. R. Brualdi, *Matrices, eigenvalues, and directed graphs.* — Linear and Multilinear Algebra, **11** (1982), 143–165.
9. M. Fiedler, V. Pták, *Cyclic products and an inequality for determinants.* — Czechoslovak Math. J., **19** (1969), 428–450.
10. F. Harary, *Graph Theory*. Addison-Wesley Publ Co. (1969).
11. R. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*. Cambridge University Press (1985).
12. L. Yu. Kolotilina, *Nonsingularity/singularity criteria for nonstrictly block diagonally dominant matrices.* — Linear Algebra Appl., **359** (2003), 133–159.
13. L. Yu. Kolotilina, *Generalizations of the Ostrowski–Brauer theorem.* — Linear Algebra Appl., **364** (2003), 65–80.

14. B. Li, M. J. Tsatsomeros, *Doubly diagonally dominant matrices.* — Linear Algebra Appl., **261** (1997), 221–235.
15. M. Marcus, H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities.* — Boston, Allyn and Bacon, Inc. (1964).
16. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv., **10** (1937), 69–96.
17. A. Ostrowski, *Über das Nichtverschwinden einer Klasse von Determinanten und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln von Matrizen.* — Compositio Math., **9** (1951), 209–226.
18. Z. Xian, Gu Dunhe, *A note on A. Brauer's theorem.* — Linear Algebra Appl., **196** (1994), 163–174.

Kolotilina L. Yu. The singularity/nonsingularity problem for matrices satisfying diagonal dominance conditions in terms of directed graphs.

The paper considers the singularity/nonsingularity problem for matrices satisfying certain conditions of diagonal dominance. The conditions considered extend the classical diagonal dominance conditions and involve the directed graph of the matrix in question. Furthermore, in the case of the so-called mixed diagonal dominance, the corresponding conditions are allowed to involve both row and column sums for an arbitrary finite set of matrices diagonally conjugated to the original matrix. Conditions sufficient for the nonsingularity of matrices strictly diagonally dominant in certain senses are established, as well as necessary and sufficient conditions of singularity/nonsingularity for weakly diagonally dominant matrices in the irreducible case. The results obtained are used to describe inclusion regions for eigenvalues of arbitrary matrices. In particular, a direct extension of the Gerschgorin ($r = 1$) and Ostrowski–Brauer ($r = 2$) theorems to $r \geqslant 3$ is presented.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 6 января 2004 г.