Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 309, 2004 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ. 4. AB–АЛГОРИТМ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Введение

В статье продолжаются исследования по применению методов факторизации к решению многопараметрических задач алгебры (см. [1, 4]). Рассматривается обобщение AB-алгоритма (ранее предложенного для решения спектральных задач для пучков матриц [5]) на случай q-параметрических ($q \geqslant 1$) полиномиальных матриц. Приводится описание AB-алгоритма, достаточные условия его сходимости и применение к решению следующих задач: вычисление последовательности наследственных полиномов и их исчерпывание из регулярного спектра q-параметрической полиномиальной матрицы, построение свободного (не содержащего регулярного спектра) базиса нуль-пространства из полиномиальных решений; построение несократимых факторизаций рациональных q-параметрических матриц. Статья состоит из трех параграфов. В §1 приводится AB-алгоритм, его обоснование и свойства для q-параметрических полиномиальных матриц, конечные и бесконечные регулярный и сингулярный спектры которых не имеют общих точек. §§2, 3 посвящены применениям AB-алгоритма к решению перечисленных выше задач для q-параметрических полиномиальных и рациональных матриц.

Ниже будут использованы следующие обозначения.

$\mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ – множество q-параметрических полиномиальных $m \times n$ матриц $F := F(\mu_1, \dots, \mu_q) \equiv F(\lambda, \overline{\mu}) = \sum\limits_{k=0}^{s} C_k(\overline{\mu})\lambda^k$ ранга ρ.

$f := f[F]$ – характеристический полином матрицы F, т.е. общий наибольший делитель (ОНД) всевозможных миноров порядка ρ матрицы F; $f_k := f_k[F]$ – ОНД всевозможных миноров по-

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (02-01–00095) и НШ-2268. 2003. 1.

рядка $\rho - k$ матрицы F.

Представления вида $f[F] = \varphi[F]g[F]$, $f_k[F] = \varphi_k[F]g_k[F]$ суть неполная относительная факторизация [4] полиномов f и f_k соответственно. Здесь g и g_k суть примитивные полиномы над кольцом $\mathbb{C}^{q-1}$ полиномов от $q-1$ переменной из множества $\{\mu_1, \dots, \mu_q\}$.

$\varepsilon[F] := \frac{f[F]}{f_1[F]}$ – минимальный полином матрицы F. Нули $\varepsilon[F]$ будем называть собственными значениями матрицы F; $\varepsilon[F] = \psi_1[F]h_1[F]$, где $\psi_1[F] = \frac{\varphi[F]}{\varphi_1[F]}$ есть минимальный наследственный полином матрицы F, т.е. полином, имеющий своими нулями собственные значения q-параметрической матрицы F, зависящие от $k \leqslant q-1$ параметров; $h_1[F] = \frac{g[F]}{g_1[F]}$ – полином, нули которого есть собственные значения F, зависящие от q параметров.

$\Psi_k[F] = \frac{\varphi_{k-1}[F]}{\varphi_k[F]} \neq \mathrm{const}$ есть наследственный полином порядка k матрицы F; $\{\Psi_k[F]\}$, $k = 1, \dots, u_1 - 1$ $(\varphi_0 = \varphi, \varphi_{u_1} = \mathrm{const})$ есть последовательность наследственных полиномов матрицы F.

$N_c[F]$ – нуль-пространство из правых полиномиальных решений матрицы F; $W_0[F]$ есть базисная матрица $N_c[F]$, регулярный спектр которой не зависит, по крайней мере, от одного параметра.

$\sigma[F]$ – конечный спектр матрицы F, т.е. множество решений системы нелинейных алгебраических уравнений

$$F\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_\rho \\ j_1, \dots, j_\rho \end{pmatrix} = 0, \quad 1 \leqslant i, < \dots < i_\rho \leqslant n, \quad 1 \leqslant j_1 < \dots < j_\rho \leqslant m.$$

$\sigma[F] = \sigma_r[F] \cup \sigma_s[F]$, где $\sigma_r[F]$ есть конечный регулярный спектр F, $\sigma_s[F]$ есть конечный сингулярный спектр F;

$\sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_{r2}[F]$, где $\sigma_{r1}[F] = \{\overline{\mu} \,|\, \varepsilon[F] = 0\}$, $\sigma_{r2}[F] = \{\overline{\mu} \,|\, \varphi_1[F] = 0\} \equiv \{\sigma_r[F] \cap \sigma[W_0]\}$.

$\mathfrak{M}[F] = \{\sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]\}$, $\mathfrak{M}_1[F] = \mathfrak{M}[\Phi]$, где $\Phi := [\varphi[F]I, F_1]$, $F_1 = F^T$, если $\rho = n$ и $F_1 = F$, если $\rho = m$.

В дальнейшем будут обозначаться одной и той же буквой оператор, матрица, базис подпространства, составленный из столбцов матрицы. Равенство между полиномами определяется с точностью до постоянного множителя.

В основе AB-алгоритма лежат методы ΔW-q факторизации и неполной относительной факторизации q-параметрических полиномиальных матриц полного ранга.

ΔW-q факторизация матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m \times n}$, $F = F(\lambda, \overline{\mu})$ имеет вид $FW = [\Delta, \mathbb{O}]$. Здесь $\mathbb{O}$ есть нулевая $m \times (n-m)$ матрица,

$W = [W_1, W_0]$ есть $n \times n$ матрица с блоками $W_1 \in \mathcal{F}_m^{n\times m}$ и $W_0 \in \mathcal{F}_{n-m}^{n\times(n-m)}$, $\mathcal{W}_0 = \operatorname{span} W_0 = N_c[F]$. При этом точки множеств $\sigma_r[W]$ и $\sigma_r[W_i]$, $i = 1, 0$, не зависят от ведущего параметра λ.

Неполная относительная факторизация (НОФ) матрицы F имеет вид $F = \bar{P}\bar{F}$, если $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ и $F = \hat{F}\hat{P}$, если $F \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$. Здесь $\bar{P}$ и $\hat{P}$ суть регулярные q-параметрические полиномиальные матрицы порядка m и n соответственно, точки конечных спектров каждой из которых зависят от $q-1$ параметра и совпадают с нулями минимального полинома матрицы F; $\bar{F}^T$ и $\hat{F}$ суть q-параметрические полиномиальные $m \times n$ матрицы полного столбцового ранга. При этом если $g[F] = \mathrm{const}$, то $\sigma_r[\tilde{F}] = \sigma_{r2}[F]$ при $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ и $\sigma_r[\hat{F}] = \sigma_{r2}[F]$ при $F \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$; уравнения $\bar{F}^T(\mu_1, \ldots, \mu_q)x = 0$ и $\hat{F}(\mu_1, \ldots, \mu_q)y = 0$ не имеют в качестве решений ненулевых постоянных векторов. Описание и свойства алгоритмов ΔW-q факторизации и НОФ представлены в [1], [4].

§1. AB-алгоритм и его свойства

Пусть $F = F(\mu_1, \ldots, \mu_q) = F(\lambda, \overline{\mu}) = \sum C_k(\overline{\mu})\lambda^k$, $\lambda = \mu_1$, $\overline{\mu} = \mu_2, \ldots, \mu_q$, есть q – параметрическая $m \times n$ матрица полного ранга. Для определенности будем предполагать, что $F \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$. Пусть $R_0 := R_0[F] = (\varphi[F])^{-1}F$, где $\varphi[F]$ – полином от $q-1$ переменной, входящий в неполную относительную факторизацию полинома $f[F] : f[F] = \varphi[F]g[F]$. Если $f[F]$ неизвестен, в качестве $\varphi[F]$ можно взять полином, входящий в неполную относительную факторизацию любого минора порядка n матрицы F. Будем предполагать, что $\varphi[F] \neq \mathrm{const}$. В частности, рассматриваются матрицы F, для которых $f[F] = \varphi[F]$, т.е. конечный регулярный спектр матрицы F не зависит, по крайней мере, от одного (ведущего) параметра λ. Ниже рассматривается AB-алгоритм и его применения в предположении существования несократимой факторизации матрицы $R_0[F]$.

AB-алгоритм состоит из конечного числа типичных шагов. Начальными данными для каждого k-го шага является матрица $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_k$, $k = 0, 1, \ldots, p$.

Для первого шага в качестве $\overline{\Phi}$ берется матрица $\overline{\Phi}_0$, полученная в результате применения метода левой неполной относительной факторизации к матрице

$$\Phi_0 = [\varphi[F]I, F^T] \equiv [B_0^T, A_0^T], B_0 = \varphi I, A_0 = F, \Phi_0 = \overline{P\Phi}_0, \overline{\Phi} := \overline{\Phi}_0.$$

Выполняются следующие операции.

(1) Находится базисная матрица $W_0 := W_0[\Phi]$ правого нуль-пространства $N_c[\Phi]$. Для этого используется метод ΔW-q факторизации матрицы $\overline{\Phi}$.

(2) Находится правая относительная факторизация матрицы W_0:

$$W_0 = \widehat{W}_0 \widehat{P}.$$

Матрица $\widehat{W}_0$ представляется в блочном виде как $\widehat{W}_0 = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ для четного шага и как $\widehat{W}_0 = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ для нечетного шага алгоритма AB, где B есть квадратная матрица.

(3) Вычисляется $\det \widehat{P}$. Для этого используется, например, метод следов Д. К. Фаддеева [2].

Если $\det \widehat{P} \neq \mathrm{const}$, осуществляется переход к следующему шагу. В качестве начальных данных берется матрица $\overline{\Phi} := [\widehat{W}_0]^T$, так что

$$\overline{\Phi} := \overline{\Phi}_{2k} = [B_{2k}^T, A_{2k}^T], \quad \overline{\Phi} := \overline{\Phi}_{2k+1} = [A_{2k+1}^T, B_{2k+1}^T].$$

Условием окончания работы AB-алгоритма на шаге $k = p$ является равенство $\det \hat{P}_k = \mathrm{const}$.

Теорема 1.1. *AB-алгоритм, примененный к q-параметрической полиномиальной матрице F полного ранга (или, что то же, к рациональной матрице $R_0 := R_0[F] = \varphi^{-1}[F]F$), при условии $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$ сходится за конечное число p шагов, где p есть число нетривиальных наследственных полиномов матрицы F. При этом имеют место следующие соотношения.*

а) Последовательность $\{\det \hat{P}_k\}$, $k = 1, \ldots, p$ $(\hat{P}_1 = \hat{P}^T)$, совпадает с последовательностью наследственных полиномов $\{\psi_k[F]\}$, $k = 1, \ldots, p$, матрицы F.

б) Конечный регулярный спектр каждой из матриц $\overline{\Phi}_p$ и $\overline{W}_0^{(p)}$ есть пустое множество, так что представление рациональной матрицы $R_0[F]$ в виде $R_0[F] = A_p B_p^{-1}$ при четном p и $R_0[F] = B_p^{-T} A_p^T$ при нечетном p есть соответственно правая и левая несократимая факторизация матрицы $R_0[F]$.

в) Конечный регулярный спектр матрицы $A_p = A_p(\lambda, \overline{\mu})$ совпадает с нулями полинома $g[F]$.

Доказательству теоремы предпошлем рассмотрение некоторых свойств AB-алгоритма.

1.2. Свойства AB-алгоритма.

1.1°. $$f[\Phi_0] = \varphi[F] = \varphi[\Phi_0],\ f_k[\Phi_0] = f_k[F],\ \psi_k[\Phi_0] = \psi_k[F]. \quad (1.1)$$

Конечные регулярные спектры матриц $\widehat{W}_0^{(k+1)}$ (матриц $\overline{\Phi}_k$) не зависят от ведущего параметра λ:

$$f[\widehat{W}_0^{k+1)}] = \varphi[\widehat{W}_0^{(k+1)}]; \quad f[\overline{\Phi}_k] = \varphi[\overline{\Phi}_k]. \quad (1.2)$$

1.2°. $$\sigma_{r2}[W_0^{(k+1)}] = \sigma_r[\widehat{W}_0^{(k+1)}]; \quad (1.3)$$

$$\sigma_r[\overline{\Phi}_k] \supseteq \sigma_r[\widehat{W}_0^{(k+1)}]; \quad (1.4)$$

$$\sigma_r[F] \supseteq \sigma_r[\overline{\Phi}_k] \supseteq \sigma_r[\overline{\Phi}_{k+1}]; \quad (1.5)$$

$$\sigma_s^-[F] \supseteq \sigma_s^+[\Phi_0] = \sigma_s^+[\overline{\Phi}_k] \quad (1.6)$$

$$\mathfrak{M}[F] \supseteq \mathfrak{M}[\overline{\Phi}_k], \quad (1.7)$$

так что при $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$ имеем $\mathfrak{M}[\overline{\Phi}_k] = \varnothing$.

1.3°. $$f[\overline{\Phi}_k] = \varphi_{k+1}[F], \quad \psi_1[\overline{\Phi}_k] = \psi_{k+1}[F], \quad (1.8)$$

1.4°. $$R_0[F] := \varphi^{-1}[F]F = R_{2k-1}[F] = R_{2k}[F], \quad (1.9)$$

где $R_{2k}[F] = A_{2k}B_{2k}^{-1}$, $R_{2k-1}[F] = -B_{2k-1}^{-T}A_{2k-1}^T$, B_k есть регулярная матрица для любого шага k.

1.5°. Число p шагов AB-алгоритма, примененного к матрице F полного ранга, конечные регулярный и сингулярный спектры которой не имеют общих точек, совпадает с числом $p = u_1 - 1$ нетривиальных наследственных полиномов матрицы F. При этом имеют место следующие соотношения:

$$\sigma_r[\overline{\Phi}_p] = \varnothing, \quad \sigma_r[\widehat{W}_0^{(p)}] = \varnothing. \quad (1.10)$$

Представления $R_0 = R_0[F]$ в виде

$$R_0 = A_pB_p^{-1} \quad \text{и} \quad R_0 = B_p^{-T}A_p^T \quad (1.11)$$

являются правой и левой несократимыми факторизациями матрицы R_0 при четном и нечетном p соответственно.

1.6°. Если $f[F]=\varphi[F]$, то $\sigma_r[A_p]=\varnothing$, матрица B_p является унимодулярной. Другими словами, если $f[F]=\varphi[F]g[F], g[F]\neq\mathrm{const}$, то конечный регулярный спектр матрицы A_p совпадает с точками $\sigma_r[F]$, зависящими от всех q параметров: $\sigma_r[A_p]=\{(\lambda,\overline{\mu})|g[F]=0\}$.

1.3. Доказательство свойств AB-алгоритма. Справедливость (1.1) следует из вида матрицы Φ_0 и определений характеристического и наследственных полиномов. Справедливость (1.2) следует из способа построения базисной матрицы W_0, основанного на применении ΔW-q алгоритма. Докажем справедливость равенств (1.3)–(1.5). Из свойств алгоритма НОФ с учетом того, что $f[W_0^{(k+1)}]=\varphi[W_0^{(k+1)}]$, следует справедливость (1.3). Действительно, по построению $W_0^{(k+1)}=\widehat{W}_0^{(k+1)}\hat{P}_{k+1}$. Тогда из равенства $\sigma_r[W_0^{(k+1)}]=\sigma_{r1}[W_0^{(k+1)}]\cup\sigma_{r2}[W_0^{(k+1)}]$ с учетом того, что $\sigma_{r1}[W_0^{(k+1)}]$ совпадает с множеством нулей $\det\hat{P}_{k+1}$, следует справедливость (1.3). По определению $\sigma_{r2}[W_0^{(k+1)}]$ с учетом соотношения $\hat{\Phi}_k^T=N_c[(W_0^{(k+1)})^T]$ имеем $\sigma_{r2}[W_0^{(k+1)}]=\sigma_r[W_0^{(k+1)}]\cap\sigma[\widehat{\Phi}_k^T]$. Отсюда, с учетом (1.3), находим

$$\begin{aligned}\sigma_r[\hat{W}_0^{(k+1)}]&=\sigma_{r2}[W_0^{(k+1)}]=\{\sigma_r[W_0^{(k+1)}]\cap\sigma[\widehat{\Phi}_k]\}\\&=\{\sigma_r[W_0^{(k+1)}]\cap\sigma_r[\overline{\Phi}_k]\}\cup\{\sigma_r[W_0^{(k+1)}]\cap\sigma_s^+[\overline{\Phi}_k]\},\end{aligned}$$

так что $\sigma_r[\hat{W}_0^{(k+1)}]\supseteq\{\sigma_r[W_0^{(k+1)}]\cap\sigma_r[\overline{\Phi}_k]\}$. Но $[\sigma_r[W_0^{(k+1)}]\supseteq\sigma_r[\hat{W}_0^{(k+1)}]$. Следовательно, $\sigma_r[\overline{\Phi}_k]\supseteq\sigma_r[W_0^{(k+1)}]\supseteq\sigma_r[\hat{W}_0^{(k+1)}]=\sigma_r[\overline{\Phi}_{k+1}]$. Справедливость (1.4) и (1.5) установлена. Установим включение

$$\sigma_s^+[\Phi_0]\subseteq\sigma_s^-[F]. \tag{1.12}$$

Для его доказательства рассмотрим следующие три системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ):

$$\frac{1}{\varphi[\Phi_0]}\Phi_0\begin{pmatrix}1,\dots,n\\ i_1,\dots,i_n\end{pmatrix}=0,\quad 1\leqslant i_1<\dots<i_n\leqslant n+m; \tag{а}$$

$$\frac{1}{f[F]}\Phi_0\begin{pmatrix}1,\dots,n\\ i_1,\dots,i_n\end{pmatrix}=0,\quad 1\leqslant i_1<\dots<i_n\leqslant n+m; \tag{б}$$

$$\frac{1}{f[F]}F^T\begin{pmatrix}1,\dots,n\\ i_1,\dots,i_n\end{pmatrix}=0,\quad 1\leqslant i_1<\dots<i_n\leqslant m; \tag{в}$$

Обозначим через $\gamma[k]$ совокупность конечных решений СНАУ (k). По определению сингулярного спектра q-параметрической полиномиальной матрицы имеем: $\gamma[\text{а}] = \sigma_s^+[\Phi_0]$, $\gamma[\text{в}] = \sigma_s^+[F]$. Учитывая, что $f[F] = \varphi[F]g[F]$ есть неполная относительная факторизация полинома $f[F]$, из вида левых частей СНАУ (а)–(в) имеем: $\gamma[\text{а}] \subseteq \gamma[\text{б}] \subseteq \gamma[\text{в}]$. Отсюда следует (1.12).

Установим справедливость равенств

$$\sigma_s^+[\overline{\Phi}_k] = \sigma_s^+[\overline{\Phi}_{k+1}]. \tag{1.13}$$

По построению $\hat{W}_0^{k+1} = N_c[\overline{\Phi}_k] = \overline{\Phi}_{k+1}^T$, так что (см., например, [6]) $\sigma_s^+[\overline{\Phi}_k] = \sigma_s^-[\hat{W}_0^{k+1}] = \sigma_s^+[\overline{\Phi}_{k+1}]$. Справедливость (1.7) следует из (1.13) с учетом (1.5) и (1.6).

Доказательство свойства 1.3° проводится по индукции. При $k = 0$ справедливость 1.3° следует из свойств 1.1° и алгоритма НОФ матрицы Φ_0. Допустим, что свойство 1.3° справедливо для $i \leqslant k$ и докажем его для $i = k + 1$. По предположению имеем:

$$f[\overline{\Phi}_k] = \varphi_{k+1}[F], \quad \psi_1[\overline{\Phi}_k] = \psi_{k+1}[F]. \tag{1.14}$$

Надо доказать, что

$$f[\overline{\Phi}_{k+1}] = \varphi_{k+2}[F], \quad \psi_1[\overline{\Phi}_{k+1}] = \psi_{k+2}[F]. \tag{1.15}$$

Сначала докажем справедливость равенств

$$\{|\cdot|\varphi[\hat{W}_0^{k+1}] = 0\} = \{|\cdot|\varphi_1[\hat{W}_0^{k+1}] = 0\} = \{|\cdot|\varphi_1[\Phi_k] = 0\}. \tag{1.16}$$

С учетом того, что конечные регулярный и сингулярный спектры матрицы $\overline{\Phi}_k$ не имеют общих точек и $W_0^{(k+1)} = N_c[\overline{\Phi}_k]$, на любом шаге k имеет место равенство

$$\sigma_{r2}[\overline{\Phi}_k] = \sigma_{r2}[W_0^{(k+1)}].$$

Отсюда в терминах наследственных полиномов справедливы следующие равенства:

$$\sigma_{r2}[\overline{\Phi}_k] = \{|\cdot|\varphi_1[\overline{\Phi}_k] = 0\}, \sigma_{r2}[W_0^{(k+1)}] = \{|\cdot|\varphi_1[W^{(k+1)}] = 0\}.$$

По построению $\varphi_1[W_0^{(k+1)}] = \varphi[\hat{W}_0^{(k+1)}]$, так что справедливость (1.16) установлена. С учетом свойства 1.1° и равенства (1.16) имеем:

$$f[\overline{\Phi}_{k+1}] = \varphi[\overline{\Phi}_{k+1}] = \varphi[\hat{W}_0^{(k+1)}] = \varphi_1[\overline{\Phi}_k] = \frac{f[\overline{\Phi}_k]}{\Psi_1[\overline{\Phi}_k]}.$$

Отсюда находим $f[\overline{\Phi}_{k+1}] = \frac{\varphi_{k+1}[F]}{\Psi_{k+1}[F]} = \varphi_{k+2}[F]$, и справедливость первого равенства из (1.15) установлена. Далее с учетом (1.15) и свойств наследственных полиномов имеем:

$$\psi_1[\overline{\Phi}_{k+1}] = \psi_1[\hat{W}_0^{(k+1)}] = \frac{\varphi[W_0^{(k+1)}]}{\varphi_1[\hat{W}_0^{(k+1)}]} = \psi_2[W_0^{(k+1)}] = \psi_2[\Phi_k] = \psi_{k+2}[F],$$

что и завершает доказательство (1.15). Справедливость 1.3° установлена.

Справедливость свойства 1.4° следует из равенства $\overline{\Phi}_k\hat{W}_0^{k+1} = \mathbb{O}$, где $\overline{\Phi}_k = (\hat{W}_0^{(k)})^T$.

Действительно, по построению на четных шагах AB-алгоритма имеют место соотношения $N_c[\overline{\Phi}_0] = N_c[\overline{\Phi}_2] = \cdots = N_c[\overline{\Phi}_{2k}]$, где $N_c[\overline{\Phi}_{2k}] = \hat{W}_0^{(2k+1)} = \begin{bmatrix} B_{2k+1} \\ A_{2k+1} \end{bmatrix}$, $\overline{\Phi}_{2k}\hat{W}_0^{(2k+1)} = 0$, $\overline{\Phi}_{2k} = [B_{2k}^T, A_{2k}^T]$, так что

$$B_{2k}^T A_{2k+1} = -A_{2k}^T B_{2k+1}. \tag{1.17}$$

Аналогично на нечетных шагах AB-алгоритма имеют место соотношения $N_c[\overline{\Phi}_1] = N_c[\overline{\Phi}_3] = \cdots = N_c[\overline{\Phi}_{2k-1}]$, где $N_c[\overline{\Phi}_{2k-1}] = \hat{W}_0^{(2k)} = \begin{bmatrix} A_{2k} \\ B_{2k} \end{bmatrix} = \hat{W}_0^{(2k)}$, так что $\overline{\Phi}_{2k-1}\hat{W}_0^{(2k)} = 0$, $\overline{\Phi}_{2k-1} = [A_{2k-1}^T, B_{2k-1}^T]$ или, в развернутом виде,

$$A_{2k-1}^T B_{2k} = -B_{2k-1}^T A_{2k}. \tag{1.18}$$

Из (1.18) и (1.17) с учетом того, что $B_0 = \varphi[F]I$ есть регулярная матрица, следует: на любом шаге алгоритма AB матрица B_k являются регулярной, так что (1.9) выполняется. Справедливость свойства 1.4° установлена.

Перейдем к доказательству свойства 1.5°. Согласно алгоритму AB и доказанным свойствам при переходе от $\overline{\Phi}_k$ к $\overline{\Phi}_{k+1}$ происходит исчерпывание из $\sigma_r[\overline{\Phi}_k]$ нулей минимального наследственного полинома $\psi_1[\overline{\Phi}_k] = \psi_{k+1}[F]$. Так что на шаге $p = u_1$ будем иметь $\sigma_r[\overline{\Phi}_p] = \sigma_r[W_0^{(p)}] = \varnothing$, т.е. выполняется соотношение $\det \hat{P}_p = \text{const}$. Из сказанного следует, что представление $R_0[F]$ в виде $A_p B_p^{-1}$ или $B_p^{-T} A_p^T$ (в зависимости от четности числа p) есть правая или левая несократимая факторизация матрицы $R_0[F]$.

Для доказательства свойства 1.6° используем равенство $f\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$, справедливость которого следует из определения характеристического полинома $f[C]$ матрицы C. Ввиду свойства 1.5° справедливы следующие равенства:

$$f\begin{bmatrix} F \\ \varphi[F]I \end{bmatrix} = \psi_1[F]f\begin{bmatrix} \psi_1^{-1}[F]F \\ \varphi_1[F]I \end{bmatrix}$$
$$= \dots = \psi_1[F]\dots\psi_k[F]f\begin{bmatrix} \psi_1^{-1}[F]\dots\psi_k^{-1}[F]F \\ \varphi_k[F]I \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$f\begin{bmatrix} \psi_1^{-1}[F]\dots\psi_k^{-1}[F]F \\ \varphi_k[F]I \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, p.$$

Отсюда с учетом свойства 1.2° с точностью до унимодулярного множителя совпадают матрицы $\begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \psi_1^{-1}[F]\dots\psi_k^{-1}[F]F \\ \varphi_k[F]I \end{bmatrix}$, так что при $k = p$ имеем $\begin{bmatrix} \varphi^{-1}[F]F \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p \\ B_p \end{bmatrix} U$, где U – унимодулярная матрица. Отсюда $f[A_p] = \varphi^{-1}[F]f[F]$, $f[B_p] = \varphi[B_p] = \mathrm{const}$, что и завершает доказательство свойства 1.6°.

Вернемся к доказательству теоремы. Справедливость утверждения а) следует из свойств 1.1° – 1.3°. Утверждение б) следует из свойств 1.4°, 1.5°. Свойство 1.6° завершает доказательство пункта в) теоремы.

Следствия. 1.2. *Если F есть q-параметрическая полиномиальная матрица полного ранга,*

$$f[F] = \varphi[F], \quad \mathfrak{M}[F] = \varnothing, \quad \textit{то} \quad \sigma_r[A_p] = \varnothing.$$

Справедливость следует из свойства 1.6° с учетом того, что точки конечного регулярного спектра матрицы F не зависят от ведущего параметра λ.

1.3. Если F есть регулярная q-параметрическая полиномиальная матрица и $f[F] = \varphi[F]$, то $\sigma_r[A_p] = \mathrm{const}$, т.е. A_p есть унимодулярная матрица.

Утверждение следует из следствия 1.2, так как для регулярной матрицы условие $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$ всегда выполняется.

1.4. Пусть $R_1 := \frac{1}{k_1(\overline{\mu})}F$, $k_1(\overline{\mu})$ есть скалярный полином, для которого $\varphi[F]$ является делителем, $f[F] = \varphi[F]$, $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$. Тогда несократимая факторизация матрицы R_1 имеет вид: $R_1 = A_p\bar{B}_p^{-1}$

($R_1 = \bar{B}_p^{-T} A_p^T$), где $\sigma_r[A_p] = \varnothing$, $\bar{B}_p = k_1(\overline{\mu}) B_p$ – регулярная матрица, $A_p B_p^{-1}$ есть несократимая факторизация матрицы $R_0[F] = \frac{1}{\varphi[F]} F$.

Справедливость следует из равенства $R_1 = \frac{1}{k_1(\overline{\mu})} R_0$, так как по условию R_0 представима в виде несократимой факторизации $A_p B_p^{-1}$ (или $B_p^{-T} A_p^T$), где по свойству 1.6° $\sigma_r[A_p] = \varnothing$.

1.5. Пусть W есть q-параметрическая регулярная полиномиальная матрица, удовлетворяющая условию $f[W] = \varphi[W] \equiv \det W$; $R_0[W] = \frac{W}{\det W}$. Пусть $R_0[W] = A_p B_p^{-1}$ ($R_0[W] = \bar{B}_p^{-T} A_p^{-T}$) есть результат применения алгоритма AB к матрице $R_0[W]$, т.е. левая (или правая) несократимая факторизация $R_0[W]$. Через $C[W]$ обозначим присоединенную матрицу для матрицы W. Тогда имеют место следующие равенства:

$$W^{-1} = A_p B_p^{-1} \quad (W^{-1} = \bar{B}_p^{-T} \bar{A}_p^T),$$

$$C[W] = B_p A_p^{-1} \quad (C[W] = \bar{B}_p^T \bar{A}_p^{-T}).$$

Здесь A_p и $\bar{A}_p$ суть унимодулярные матрицы.

Справедливость следует из свойства 1.6° алгоритма AB и равенств $W^{-1} = \frac{C[W]}{\det W}$, $WC[W] = C[W]W = (\det W)I$.

Замечания. 1. Условие $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$ является достаточным как для сходимости AB-алгоритма, примененного к матрице $\Phi_0 = [\varphi[F]I, F^T]$, так и для построения несократимой факторизации рациональной матрицы $R_0[F] = \varphi^{-1}[F]F$ при условии ее существования.

2. Если полином $\varphi[F]$ неизвестен, то для вычисления наследственных полиномов матрицы $F \in \mathcal{F}_n^{m \times n}$ следует применить AB-алгоритм к матрице $\widetilde{\Phi}_0 = [h(\overline{\mu})I, F^T]$. Здесь $h(\overline{\mu})$ есть скалярный полином, делителем которого является полином $\varphi[F]$. Полином $h(\overline{\mu})$ можно вычислить, например, используя следующие операции.

(1) Вычислить $k(\lambda, \overline{\mu})$, т.е. любой минор порядка n исходной матрицы F полного столбцового ранга.

(2) Найти неполную относительную факторизацию полинома $k(\lambda, \overline{\mu}) : k(\lambda, \overline{\mu}) = \widetilde{\varphi}(\mu) \tilde{g}(\lambda, \overline{\mu})$, используя НОФ алгоритм [4]. В качестве $h(\overline{\mu})$ взять полином $\widetilde{\varphi}(\overline{\mu})$.

При выполнении условия $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$ AB-алгоритм, примененный к матрице $\widetilde{\Phi}_0 = [\widetilde{\varphi}^{-1}(\overline{\mu})I, F^T]$, сходится. Результатом будут наследственные полиномы $\psi_k[\widetilde{\Phi}_0] = \psi_k[F]$, $k = 1, \dots, p$, матрицы F и правая и левая несократимая факторизация $\tilde{R} := h^{-1}(\overline{\mu})F : \tilde{R} = \tilde{A}_p\tilde{B}_p^{-1}$ ($\tilde{R} = \tilde{B}_{p+1}^{-T}\tilde{A}_{p+1}^T$). При этом будут выполнены равенства: $\tilde{A}_p = A_p$ ($\tilde{A}_{p+1} = A_{p+1}$), $\tilde{B}_p = r(\overline{\mu})B_p$ ($\tilde{B}_{p+1} = r(\overline{\mu})B_{p+1}$), где через A_p, B_p (A_{p+1}, B_{p+1}) обозначены матрицы, входящие в несократимую факторизацию матрицы $R_0 = \varphi^{-1}[F]F$; $r(\overline{\mu})$ есть скалярный полином от $q-1$ переменной, удовлетворяющий соотношению

$$\{|\cdot| : r(\overline{\mu}) = 0\} = \{|\cdot| : h(\overline{\mu}) = 0\} \cap \{|\cdot| : \varphi(\overline{\mu}) = 0\}.$$

Справедливость следует из свойств матрицы $\widetilde{\Phi}_0 = [h(\overline{\mu})I, F^T]$.

3. Применение AB-алгоритма к вычислению несократимой факторизации рациональной матрицы $R_0[F]$ позволяет вычислить как правую, так и левую несократимые факторизации.

Справедливость следует из равенств

$$R_0 = A_0B_0^{-1} = -B_1^{-T}A_1^T = \dots = -B_{2i-1}^{-T}A_{2i-1}^T = A_{2i}B_{2i}^{-1}.$$

Так, например, если на четном шаге окончания AB-алгоритма получено $R_0 = A_pB_p^{-1}$, $p = 2i$, т.е. правая несократимая факторизация матрицы R_0, то переход к следующему шагу дает $R_0 = B_{p+1}^{-T}A_{p+1}^T$ – левую несократимую факторизацию матрицы R_0.

4. Для регулярной q-параметрической полиномиальной матрицы F всегда имеет место равенство $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$.

Справедливость следует из соотношений $N_c[F] = N_c[F^T] = \varnothing$.

§2. Применение AB-алгоритма к вычислению несократимых факторизаций

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим применение AB-алгоритма для вычисления несократимых факторизаций более широкого класса рациональных матриц, чем класс матриц, рассмотренных в §1.

Пусть $R := ST^{-1}$ есть рациональная q-параметрическая матрица полного ранга: $S = S(\lambda, \overline{\mu}) \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$, $T = T(\lambda, \mu) \in \mathcal{F}_n^{n\times n}$, нули $\det T$ не зависят от λ, т.е. $f[T] = \varphi[T]$, $\Phi_0[R] := [T^T, S^T]$. В дальнейшем полиномиальную q-параметрическую матрицу $\Phi_0 := \Phi_0[R]$ будем называть наследственной для рациональной матрицы R. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Если наследственная для R матрица $\Phi_0[R]$ удовлетворяет условиям*

$$f[\Phi_0] = \varphi[\Phi_0], \tag{2.1}$$

$$\mathfrak{M}[\Phi_0] = \varnothing, \tag{2.2}$$

то AB-алгоритм, примененный к матрице R с начальными данными $\Phi_0 = [B_0^T, A_0^T]$, $B_0 := T$, $A_0 := S$, сходится за конечное число шагов p. При этом выполняются следующие соотношения.

а) *Последовательность $\{\det \hat{P}_{k+1}\}$, $k = 0, 1, \ldots, p$, совпадает с последовательностью $\{\psi_k[\Phi_0]\}$, $k = 1, \ldots, p$, наследственных полиномов матрицы $\Phi_0[R]$.*

б) *Регулярный спектр каждой из матриц $\overline{\Phi}_p$ и $\widehat{W}_0^{(p)}$ есть пустое множество.*

в) *$R_p = A_p B_p^{-1}$ при четном p и $R_p = B_p^{-T} A_p^T$ при нечетном p есть соответственно правая и левая несократимые факторизации матрицы $R = ST^{-1}$.*

2.2. Свойства AB-алгоритма для матрицы $\Phi_0[R]$. Доказательство теоремы основано на следующих свойствах AB-алгоритма, примененного к матрице $\Phi_0[R]$.

2.1°. $f[\overline{\Phi}_{k+1}] = \varphi[\overline{\Phi}_{k+1}]$, $f[\hat{W}_0^{(k+1)}] = \varphi[\hat{W}_0^{(k+1)}]$, т.е. на любом шаге AB-алгоритма конечные регулярные спектры матриц $\overline{\Phi}_k$, $\hat{W}_0^{(k)}$ не зависят от ведущего параметра λ.

2.2°. $\sigma_{r2}[\Phi_k] = \sigma_r[\hat{W}_0^{(k+1)}]$; $\sigma_r[\overline{\Phi}_k] \supseteq \sigma_r[\overline{\Phi}_{k+1}]$, $\sigma_s^+[\overline{\Phi}_k] = \sigma_s^+[\overline{\Phi}_{k+1}] = \sigma_s^+[\Phi_0]$; $\mathfrak{M}[\Phi_0] \supseteq \mathfrak{M}[\Phi_k]$, так что $\mathfrak{M}[\Phi_k] = \varnothing$, если $\mathfrak{M}[\Phi_0] = \varnothing$.

2.3°. $\psi_1[\overline{\Phi}_k] = \psi_{k+1}[\Phi_0]$, $\varphi_1[\overline{\Phi}_k] = \varphi_{k+1}(\Phi_0]$.

2.4°. $R = ST^{-1} = R_{2i-1} = R_{2i}$, $R_{2i-1} := -B_{2i-1}^{-T} A_{2i-1}^T$, $R_{2i} = A_{2i} B_{2i}^{-1}$; B_k есть регулярная полиномиальная матрица для любого шага k алгоритма AB.

2.5°. Переход от шага k к шагу $k+1$ алгоритма AB состоит в исчерпывании из $\sigma_r[\overline{\Phi}_k]$ минимального наследственного полинома $\psi_1[\overline{\Phi}_k]$ матрицы $\overline{\Phi}_k$. Число p шагов AB-алгоритма совпадает с числом наследственных полиномов матрицы $\Phi_0[R]$. При этом имеют место следующие соотношения: $\sigma_r[\Phi_p] = \varnothing$, $\sigma_r[\hat{W}_0^{(p)}] = \varnothing$, так что представление рациональной матрицы R в виде $R = A_p B_p^{-1}$ при p четном или в виде $R = B_p^{-T} A_p^T$ при p нечетном является несократимой факторизацией начальной матрицы $R = ST^{-1}$.

Доказательство свойств $2.1^\circ - 2.5^\circ$ алгоритма AB для матрицы $\Phi_0[R]$ проводится по тому же плану, как и доказательство аналогичных свойств AB-алгоритма для матрицы $R_0[F]$, рассмотренных в §1.

2.3. Следствия к теореме 2.1. Пусть $R = ST^{-1}$ – рациональная матрица полного ранга, несократимая факторизация для которой существует. Имеют место следующие утверждения.

Следствие 2.2. *Если выполнены условия $f[T] = \varphi[T]$, $\sigma_r[T] \subseteq \sigma_r[S]$ и $\mathfrak{M}[S] = \varnothing$, то AB-алгоритм, примененный к матрице $R = ST^{-1}$ (или, что то же, к наследственной для R матрице $\Phi_0 = [T^T, S^T]$), сходится за p шагов, где p есть число наследственных полиномов матрицы Φ_0. Результатом является несократимая факторизация матрицы R вида $A_p B_p^{-1}$ (или вида $B_p^{-T} A_p^T$).*

Для доказательства достаточно проверить выполнение условий теоремы 2.1. Условие (2.1) имеет место, так как $\sigma_r[\Phi_0] = \sigma_r[T] \cap \sigma_r[S] = \sigma_r[T]$ и, следовательно, $f[\Phi_0] = \varphi[\Phi_0]$. Выполнение условия (2.2) следует из соотношения $\mathfrak{M}[S] = \sigma_r[S] \cap \sigma_s[S] \supseteq \mathfrak{M}[\Phi_0]$, так как $\sigma_r[S] \supseteq \sigma_r[T] = \sigma_r[\Phi_0]$ и имеет место включение $\sigma_s[S] \supseteq \sigma_s[\Phi_0]$. Доказательство последнего включения проводится аналогично доказательству включений (1.6) свойства 1.2° из §1.

Следствие 2.3. *Если $R = ST^{-1}$ есть представление*[1] *q-параметрической полиномиальной матрицы в виде рациональной rp-матрицы, то для вычисления несократимой факторизации $R = A_p B_p^{-1}$ ($R = B_p^{-T} A_p^T$) с использованием AB-алгоритма достаточно, чтобы выполнялось условие $\mathfrak{M}[S] = \varnothing$. При этом справедливы следующие утверждения.*

а) *Несократимая факторизация rp-матрицы есть полиномиальная матрица, так что в представлении $R = A_p B_p^{-1}$ ($R = B_p^{-T} A_p^T$) матрица B_p является унимодулярной.*

б) *Условие $\mathfrak{M}[s] = \varnothing$ всегда выполняется, если $R = ST^{-1}$ есть регулярная rp-матрица.*

Справедливость следует из следствия 2.2, поскольку для rp-матриц условие $\sigma_r[T] \subseteq \sigma_r[S]$ всегда выполняется.

[1] Представление полиномиальной матрицы в виде рациональной матрицы будем для краткости называть rp-матрицей.

2.4. Замечания.

2.1. Любая рациональная q-параметрическая матрица $R(\lambda,\overline{\mu})$ полного ранга, полюса которой не зависят от ведущего параметра λ, может быть представлена в форме $R = ST^{-1}$ (или $R = T^{-1}S$), где T – регулярная матрица, $\det T = \varphi[T]$. Для этого надлежит выполнить следующие операции.

(1) Записать матрицу R в одном из видов $R = PQ^{-1}$ или $R = Q^{-1}P$, используя, например, представление $R = R(\lambda,\overline{\mu})$ в виде базовой факторизации (см. [2]): $R = q^{-1}(\lambda,\mu)C(\lambda,\overline{\mu})$, $P := C(\lambda,\overline{\mu})$, $Q := q^{-1}(\lambda,\overline{\mu})I$.

(2) К матрице $A(\lambda,\overline{\mu}) := [Q,P]$ или $A(\lambda,\mu) = [Q^T,P^T]$ соответственно для представлений R в форме PQ^{-1} или $Q^{-1}P$ применить алгоритм ΔW-q факторизации для вычисления матрицы $W_0 \equiv \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}$, образующей базис $N_c[A]$ такой, что $f[W_0] = \varphi[W_0]$, $f[T] = \varphi[T]$.

Из равенства $AW_0 = 0$ получаем требуемое представление R в виде ST^{-1} или $T^{-T}S^T$.

2.2. Пусть $\tilde{R} = (h(\overline{\mu}))^{-1}S$, где $h(\overline{\mu})$ есть скалярный полином такой, что $\varphi[S]$ есть делитель $h(\overline{\mu})$.

Тогда при $\mathfrak{M}[S] = \varnothing$ алгоритм AB, примененный к матрице $\tilde{\Phi}_0 := [h(\overline{\mu})I, S^T]$, сходится. Результатом является несократимая факторизация матрицы $\tilde{R}$ вида

$$\tilde{R} = \tilde{A}_p\tilde{B}_p^{-1} \quad (\text{или} \quad \tilde{R} = \tilde{B}_p^{-T}\tilde{A}_p^T).$$

При этом с точностью до унимодулярных множителей выполняются равенства $\tilde{A}_p = A_p$; $\tilde{B}_p = r(\overline{\mu})B_p$, где $A_pB_p^{-1}$ $(B_p^{-T}A_p^T)$ суть правая (левая) несократимая факторизация матрицы $R_0[S] = (\varphi[S])^{-1}S$, вычисленная AB-алгоритмом.

Справедливость следует из свойств матрицы $\widetilde{\Phi}_0$ и равенств

$$\tilde{R} = h^{-1}(\overline{\mu})S = \tilde{A}_{2k}\tilde{B}_{2k}^{-1} = -\tilde{B}_{2k+1}^{-T}\tilde{A}_{2k+1}^T,$$

имеющих место при применении AB-алгоритма. Заметим, что в качестве полинома $h(\overline{\mu})$ можно взять полином $\widetilde{\varphi}[S]$, входящий в неполную относительную факторизацию $\widetilde{\varphi}(\mu)\tilde{g}(\lambda,\overline{\mu})$, вычисленную для любого минора порядка n матрицы S.

2.3. Пусть множество $\{\sigma_r[S]\cap\sigma_r[T]\}$ непусто и его точки не зависят от параметра λ; $\Phi_0 := \Phi_0[R] = [T^T, S^T]$, $\mathfrak{M}[\Phi_0] = \varnothing$. Применим AB-алгоритм к матрице $\Phi_0[R]$, наследственной для матрицы $R = ST^{-1}$. Рассмотрим следующие ситуации.

$K_p := \{\sigma_r[A_p] \cap \sigma_r[B]\}$ есть непустое множество. В этом случае любой общей точке множеств $\sigma_r[A_p]$ и $\sigma_r[B_p]$ для матриц A_p и B_p соответствуют различные собственные векторы.

$K_p = \varnothing$, $\sigma_r[A_p] = \varnothing$, $\sigma_r[B_p] \neq \varnothing$. В этом случае конечными особыми точками рациональной матрицы R являются только полюсы, т.е. собственные значения матрицы B_p.

$K_p = \varnothing$, $\sigma_r[A_p] \neq \varnothing$, $\sigma_r[B_p] \neq \varnothing$, т.е. B_p есть унимодулярная матрица. В этом случае R есть rp-матрица; конечный регулярный спектр матрицы R совпадает с конечным регулярным спектром матрицы A_p.

Справедливо и обратное утверждение. Если рациональная матрица $R = ST^{-1}$ является rp-матрицей, то в несократимой факторизации R, построенной с помощью AB-метода, матрица B_p является унимодулярной. При этом регулярный спектр rp-матрицы не содержит точек, зависящих от всех q параметров, если $\sigma_r[A_p] = \varnothing$. В противном случае при $\sigma_r[A_p] \neq \varnothing$ регулярный спектр rp-матрицы состоит из точек, зависящих от всех q параметров. В частности, если $R = ST^{-1}$ есть регулярная rp-матрица и несократимая факторизация R такова, что $\sigma_r[A_p] = \varnothing$, то R есть представление унимодулярной полиномиальной матрицы в виде рациональной матрицы.

Справедливость этих утверждений основана на следующих очевидных свойствах.

а) rp-матрица не имеет конечных полюсов.

б) Матрицы S и T из несократимой факторизации рациональной матрицы определяются с точностью до умножения справа на унимодулярную матрицу.

§3. Построение свободного базиса

Пусть $F \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ, $\rho \leqslant \min(m,n)$. Следует найти свободные базисы нуль-пространств из полиномиальных решений F в предположении их существования. Для определенности будем вычислять свободный базис $N_c[F]$.

Решение задачи с применением AB-алгоритма состоит из двух стадий.

На первой стадии находим базис W_0 подпространства $N_c[F]$, применяя к матрице F алгоритм ΔW-q факторизации:

$$FW = [\Delta, \mathbb{O}], \quad W = [W_1, W_0].$$

Здесь W_0 есть матрица, составленная из $n-\rho$ последних столбцов матрицы W, которая по свойствам ΔW-q факторизации имеет регулярный спектр, не зависящий от параметра λ.

На второй стадии следует применить алгоритм AB для построения несократимой факторизации матрицы $R_0[W_0] := \varphi^{-1}[W_0]W_0$. Здесь $\varphi[W_0] = f[W_0]$ – характеристический полином матрицы W_0. В качестве начальных данных AB-алгоритма берутся $A_0 = W_0$, $B_0 = \varphi[W_0]I$. В результате применения AB-алгоритма будет построена несократимая факторизация: $R = A_pB_p^{-1}$, если p четное; $R = B_p^{-T}A_p^T$, если p нечетное.

Достаточным условием сходимости AB-алгоритма является: $\mathfrak{M}[W_0] = \sigma_r[W_0] \cap \sigma_s[W_0] = \varnothing$.

Нас интересует правая несократимая факторизация $R_0[W_0]$. Так если AB-алгоритм заканчивается на четном шаге p, то в качестве несократимой факторизации $R_0[W_0]$ берем $R_0 = A_pB_p^{-1}$. Если p нечетное, то для построения правой несократимой факторизации выполняется $(p+1)$-ый шаг (см. замечание 3 из §1).

По свойству 1.6° из §1 с учетом того, что матрица W_0 имеет регулярный спектр, не зависящий от λ, конечный регулярный спектр матрицы A_p является пустым множеством. Так что с учетом равенства $\varphi^{-1}[W_0]W_0 = A_pB_p^{-1}$ или $\varphi^{-1}[W_0]W_0 = A_{p+1}B_{p+1}^{-1}$, где B_i – регулярная матрица, следует, что столбцы A_p (столбцы A_{p+1}) образуют искомый свободный базис $N_c[F]$. С учетом замечания 2 из §1 для построения свободного базиса $N_c[F]$ можно применять AB-алгоритм к рациональной матрице $\tilde{R}_0 = \widetilde{\varphi}^{-1}[W_0]W_0$. Здесь $\widetilde{\varphi}_0[W_0]$ – полином от $q-1$ переменной, который находится из неполной относительной факторизации любого минора порядка $n-\rho$ матрицы W_0.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (1995), 191–246.
2. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **238** (1997), 3–329.
3. V. N. Kublanovskaya, *Rank division algorithms and their applications.* — J. Numer. Lin. Algebra Appl., **1**, No. 2 (1992), 199–213.
4. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 2. Метод неполной относительной факторизации и его применение.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **296** (2003), 89–107.

5. V. N. Kublanovskaya, *The AB-algorithm and its modifications for spectral problems of linear pencils of matrices.* — Numer. Math., **43** (1984), 329–342.
6. В. Б. Хазанов, *О собственных порождающих векторах многопараметрической матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **245** (1998), 165–186.
7. V. N. Kublanovskaya, *Solving spectral problems for two-parameter polynomial matrices. Methods and algorithms.* — J. Numer. Anal. Math. Modeling, **9**, No. 2 (1994), 111–120.

Kublanovskaya V. N. To solving multiparameter problems of algebra. 4. The AB-algorithm and its applications.

The paper continues investigations of methods for factorizing q-parameter polynomial matrices and considers their applications to solving multiparameter problems of algebra. An extension of the AB-algorithm, suggested earlier as a method for solving spectral problems for matrix pencils of the form $A-\lambda B$, to the case of q-parameter ($q \geqslant 1$) polynomial matrices of full rank is proposed. In accordance with the AB-algorithm, a finite sequence of q-parameter polynomial matrices such that every subsequent matrix provides a basis of the null-space of polynomial solutions of its transposed predecessor is constructed. A certain rule for selecting specific basis matrices is described. Applications of the AB-algorithm to computing hereditary polynomials of a q-parameter polynomial matrix and exhausting them from the regular spectrum of the matrix, to constructing irreducible factorizations of rational matrices satisfying certain assumptions, and to computing "free" bases of the null-spaces of polynomial solutions of an arbitrary q-parameter polynomial matrix are considered.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 4 февраля 2004 г.