Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 309, 2004 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ. 5. АЛГОРИТМ ∇V–q ФАКТОРИЗАЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Введение

В статье продолжаются исследования по разработке и применению методов факторизации к построению алгоритмов решения следующих многопараметрических задач алгебры: разделение регулярного и сингулярного спектров q-параметрической полиномиальной матрицы, вычисление несократимой факторизации q-параметрической рациональной матрицы, построение свободных базисов нуль-пространств из полиномиальных решений q-параметрических полиномиальных и рациональных матриц, выделение делителей матричного полинома по известным делителям характеристического полинома матрицы.

Для решения перечисленных задач предлагается алгоритм ∇V-q факторизации, обобщающий известный алгоритм [2,3] для однопараметрических полиномиальных матриц. Будем предполагать, что регулярный и сингулярный спектры F не имеют общих точек.

Статья состоит из двух параграфов. В §1 рассматривается алгоритм ∇V-q факторизации, его свойства и обоснование. В §2 предлагаются методы решения перечисленных выше задач. Используются обозначения статьи [4] настоящего сборника.

§1. ∇V-q факторизация и ее вычисление

1.1. Постановка задачи. Пусть $F = F(\mu_1, \dots, \mu_q)$ есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга m ($F \in F_m^{m\times n}$); $\mathfrak{M}[F] := \{\sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]\}$ множество точек пересечения соответственно конечного регулярного $\sigma_r[F]$ и конечного сингулярного $\sigma_s[F]$ спектров матрицы F. Рассмотрим разложение матрицы

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (02-01-00095) и НШ-2268.2003.1.

F вида

$$F = \nabla V. \tag{1.1}$$

Здесь $\nabla = \nabla(\mu_1, \ldots, \mu_q) \in F_m^{m\times m}$ есть q-параметрическая полиномиальная регулярная матрица, спектр которой совпадает с конечным регулярным спектром матрицы F; $V = V(\mu_1, \ldots, \mu_4) \in F_m^{m\times n}$ есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга m, конечный регулярный спектр которой есть пустое множество. Сингулярный спектр V совпадает с сингулярным спектром матрицы F. На разложение (1.1) будем ссылаться как на ∇V-q факторизацию матрицы F. Ставится задача вычисления ∇V-q факторизации матрицы F в предположении ее существования. Ставится задача вычисления $\nabla V{-}q$ факторизации матрицы F в предположении ее существования.

1.2. Алгоритм ∇V-q факторизации. Алгоритм представления $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$, $n > m$, в виде ∇V-q факторизации (1.1) состоит в выполнении следующих операций.

(1) Находится матрица W, реализующая ΔW-q факторизацию матрицы $F = F(\lambda, \overline{\mu}) = \sum\limits_{k=0}^{s} C_k(\overline{\mu})\lambda^k$:

$$FW = [\Delta, \mathbb{O}], \tag{1.2}$$

и вычисляется $\det W$. Здесь $W := W(\lambda, \overline{\mu})$ есть регулярная q-параметрическая $n \times n$ матрица такая, что $f[W] \equiv \det W = \varphi[W]$. Операция (1) выполняется применением алгоритма ΔW-q факторизации. Определитель $\det W$ может быть вычислен[1] как произведение определителей левых треугольных матриц, образующих матрицу W (см. [1]).

(2) Вычисляется матрица $C[W]$, присоединенная для матрицы W, например, методом следов Д. К. Фаддеева [2] или применением AB-алгоритма [4] к матрице $R_0[W] = \varphi^{-1}[W]W$.

(3) Формируется полиномиальная q-параметрическая матрица $\Phi_0[R_1] = [\varphi[W]I, C_m]$, наследственная для рациональной матрицы $R_1 := (\varphi[W])^{-1}C_m^T$, где через $C_m := C_m(\lambda, \overline{\mu})$ обозначена матрица, составленная из первых m строк матрицы $C[W]$.

(4) Вычисляются матрицы A и B, входящие в левую несократимую факторизацию матрицы R_1, применением AB-алгоритма

[1] Для вычисления $\det W$ можно также использовать метод следов Д. К. Фаддеева [2].

[4] к матрице $\Phi_0[R_1]$. Результатом является представление R_1 в виде левой несократимой факторизации $R_1^T = B^{-T}A^T \equiv B^{-T}V$. Здесь по свойствам AB-алгоритма $V := A^T$ есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга m, не имеющая конечного регулярного спектра; B есть регулярная рациональная $m \times m$ матрица.

(5) Формируется полиномиальная q-параметрическая матрица $\Phi_0[R_2] = [B^T, \Delta^T]$, наследственная для регулярной рациональной матрицы $R_2 = \Delta B^{-1}$.

(6) Вычисляются матрицы A_p и B_p, входящие в несократимую факторизацию матрицы R_2, для чего к матрице $\Phi_0[R_2]$ применяется алгоритм AB.

Результатом является представление R_2 в виде правой несократимой факторизации $R_2 = A_p B_p^{-1}$ (или левой несократимой факторизации $R_2 = B_p^{-T} A_p^T$), где A_p и B_p – регулярные q-параметрические полиномиальные матрицы, B_p – унимодулярная матрица.

(7) Находится матрица $U = B_p^{-1}$, обратная к унимодулярной матрице B_p, применением алгоритма обращения унимодулярной q-параметрической полиномиальной матрицы, например, использованием способа обращения унимодулярных матриц из п. 1.5 настоящей статьи. Искомыми для ∇V-факторизации (1.1) являются матрицы $V = V(\lambda, \overline{\mu}) = A^T$ и $\nabla = \nabla(\lambda, \overline{\mu}) = A_p U$ (или $\nabla = U^T A_p^T$), где $\sigma_r[V] = \varnothing$, $\sigma_r[\nabla] = \sigma_r[F]$.

Теорема 1.1. *Для построения ∇V-q факторизации матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ достаточно, чтобы было выполнено условие $\mathfrak{M}[F] = \{\sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]\} = \varnothing$.*

Доказательство теоремы проведем, используя индукцию по числу параметров q. Базой индукции является ∇V-1 факторизация однопараметрической полиномиальной $m \times n$-матрицы ранга m (см. [2,3]). Будем предполагать, что ∇V-k факторизация вида (1.1) имеет место для любой k-параметрической полиномиальной матрицы полного строчного ранга ($1 \leqslant k \leqslant q-1$), если ее регулярный и сингулярный спектры не пересекаются.

Доказательство разложения (1.1) для $k = q$ проведем конструктивно, анализируя шаги алгоритма вычисления ∇V-q факторизации (1.1). Предварительно рассмотрим леммы, которые будут использованы при обосновании алгоритма ∇V-q факторизации.

1.3. Теоретические предпосылки для алгоритма ∇V-q факторизации.

Пусть $F \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$, $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$, W есть матрица, реализующая ΔW-q разложение матрицы F; $C_m := C_m[W]$ – матрица, составленная из первых m строк матрицы C, присоединенной для W; $\Phi_0 := [\varphi[W]I, C_m]$.

Лемма 1.2. *Справедливы следующие соотношения:*

$$f[C_m] = \varphi[C_m]; \tag{1.3}$$

$$\mathfrak{M}[C_m] = \varnothing; \tag{1.4}$$

$$\mathfrak{M}[\overline{C}_m] = \varnothing; \tag{1.5}$$

$$\mathfrak{M}[\Phi_0] = \varnothing. \tag{1.6}$$

Здесь $C_m = \bar{P}\bar{C}_m$ есть неполная относительная факторизация матрицы C_m

Справедливость (1.3) и (1.4) следует из свойств матрицы W и равенств $CW = WC = f[W]I$, характеризующих присоединенную матрицу. Действительно, из свойств ΔW-q метода имеем $f[W] = \varphi[W]$. Ввиду того, что множества $\sigma[C]$ и $\sigma[C_m]$ отличаются от $\sigma[W]$ только кратностью точек, справедливы равенства $\mathfrak{M}[W] = \mathfrak{M}[C] = \mathfrak{M}[C_m]$, где $\mathfrak{M}[W] = \varnothing$. Справедливость (1.5) следует из (1.4) и свойств метода неполной относительной факторизации: $\sigma_r[C_m] \supseteq \sigma_r[\overline{C}_m]$; $\sigma_s[C_m] = \sigma_s[\overline{C}_m]$.

Докажем (1.6). Из вида матрицы Φ_0 следует, что $\sigma_r[\Phi_0] = \sigma_r[C_m]$, $\sigma_s[\Phi_0] \subseteq \sigma_s[C_m]$. Отсюда с учетом (1.4) следует (1.6). Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть матрица $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ представлена в виде $F = RV$, где R регулярная q-параметрическая рациональная матрица, $V \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ есть q-параметрическая полиномиальная матрица и $\sigma_r[V] = \varnothing$. Тогда несократимая факторизация R есть полиномиальная матрица, конечный регулярный спектр которой совпадает с конечным регулярным спектром F.*

Справедливость следует из определения конечного регулярного спектра F. Действительно, применяя формулу Бине–Коши для $F = RV$, получим равенство

$$F\begin{pmatrix} 1,\dots,m \\ i_1,\dots,i_m \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1,\dots,m \\ 1,\dots,m \end{pmatrix} V\begin{pmatrix} 1,\dots,m \\ i,\dots,i_m \end{pmatrix}.$$

Отсюда, с учетом того, что НОД $\left\{ V\begin{pmatrix} 1,\dots,m \\ i_1,\dots,i_m \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{const}$, имеем $f[F] :=$ НОД$\{F\begin{pmatrix} 1,\dots,m \\ i,\dots,i_m \end{pmatrix}\} = R\begin{pmatrix} 1,\dots,m \\ 1,\dots,m \end{pmatrix}$, так что R есть rp-матрица,[2] конечный регулярный спектр R совпадает с конечным регулярным спектром F, что и требовалось доказать.

Лемма 1.4. *AB-алгоритм [4], примененный к рациональной матрице $R_1 = C_m^T/\varphi[W]$, позволяет вычислить несократимую факторизацию R_1 вида $R_1^T = B^{-T}A^T$, где $\sigma_r[A] = \varnothing$.*

Действительно, условия сходимости AB-алгоритма для матрицы $\Phi_0 := [\varphi[W]I, C_m]$, наследственной для R_1, выполняются в силу леммы 1.2. Далее, принимая во внимание равенство $f[C_m] = \varphi[C_m]$ и свойства AB-алгоритма (см. свойство 1.6° из §1 статьи [4]), заключаем, что конечный регулярный спектр матрицы A, входящей в несократимую факторизацию R_1, есть пустое множество.

Лемма 1.5. *AB-алгоритм, примененный к регулярной рациональной q-параметрической матрице $R_2 := \Delta\overline{P}B^{-1}$, сходится. Результатом является несократимая факторизация $R_2 = A_pB_p^{-1}$ (или $R_2 = B_p^{-T}A_p^T$), где B_p есть унимодулярная матрица.*

Действительно, матрица R_2 входит в разложение матрицы F: $F = \Delta\overline{P}B^{-1}V = R_2V$, где F, R_2 и V имеют одинаковые ранги, F и V являются q-параметрическими полиномиальными матрицами полного строчного ранга и $\sigma_r[V] = \varnothing$. Тогда по лемме 1.3 рациональная матрица R_2 является регулярной rp-матрицей. Так что справедливость утверждения леммы следует из следствия 2.3 алгоритма AB, рассмотренного в §2 статьи [4].

1.4. Обоснование алгоритма.

Вернемся к обоснованию алгоритма из п. 1.2. По условию $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$, $m < n$ и $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$. Обоснованию подлежат только операции (4) и (7).

[2]Под rp-матрицей понимается представление полиномиальной матрицы в виде рациональной матрицы.

Прежде всего заметим, что операции (4) и (7) требуют применения метода неполной относительной факторизации к q-параметрическим полиномиальным матрицам, т.е. применения ∇V-факторизаций для $(q-1)$-параметрических матриц. Последние в силу индукционного предположения выполняются.

В операции (4) несократимая факторизация матрицы R_1 выполняется применением AB-алгоритма к матрице $[\varphi[W]I, \mathbb{C}_m]$. При этом достаточные условия реализации AB алгоритма удовлетворены (по лемме 1.4 имеем $f[\Phi_0] = \varphi[\Phi_0]$ и $\mathfrak{M}[\Phi_0] = \varnothing$, так как $\mathfrak{M}[\Phi_0] \subseteq \mathfrak{M}[F] = \varnothing$).

Вычисленная несократимая факторизация $R_1 = B^{-T}A^T$ такова, что матрица $V := A^T$ не имеет конечного регулярного спектра. Справедливость следует из свойства 1.6° алгоритма AB [4].

Для обоснования операции (7) сначала установим, что матрица $R_2 := \nabla B^{-1}$ является регулярной rp-матрицей. Справедливость следует из равенства $F = R_2 V$ и леммы 1.3 с учетом того, что $\sigma_r[V] = \varnothing$ и B – регулярная матрица.

Регулярность rp-матрицы R_2 позволяет утверждать (см. свойство 1.6° из [4]), что несократимая факторизация матрицы R_2 может быть найдена применением AB-алгоритма и имеет матрицу B_p унимодулярной ($\det B_p = \mathrm{const}$). Сказанное завершает обоснование операций (4) и (7).

Таким образом, получено обоснование алгоритма ∇V-q факторизации матрицы F при выполнении условия $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$ и в предположении существования ∇V-k факторизаций k-параметрических полиномиальных матриц полного ранга с числом параметров $k \leqslant q-1$.

Замечание. Если $\mathfrak{M}[F] \neq \varnothing$ и выполнены условия теоремы 1.1, то результатом применения алгоритма из п. 1.2 к матрице $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ является разложение вида $F = \widetilde{\nabla}\widetilde{V}$, где $\widetilde{\nabla}$ есть регулярная матрица, спектр которой совпадает с $\sigma_r[F]$ за исключением точек, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}[F]$; $\tilde{V}$ есть q-параметрическая матрица из множества $\mathcal{F}_m^{m\times n}$, имеющая $\sigma_s[\tilde{V}] = \sigma_s[F]$, $\sigma_r[\tilde{V}] = \mathfrak{M}[F]$.

1.5. Обращение унимодулярной матрицы.

Пусть $U := U(\lambda, \mu)$ есть унимодулярная полиномиальная q-параметрическая матрица, для которой следует вычислить обратную матрицу U^{-1}.

Известно, что обратная матрица к регулярной матрице F представима в виде рациональной матрицы $F^{-1} = \frac{C[F]}{\det[F]}$, где $C[F]$ есть присоединенная для F матрица, $f[F] := \det F$ есть характеристический полином F. В случае $F = U$ имеем

$$U^{-1} = dC[U], \quad d^{-1} := \det U \equiv \text{const}\,.$$

Таким образом, вычисление U^{-1} сводится к вычислению $\det U$ и присоединенной матрицы $C[U]$, что можно осуществить методом следов Д. К. Фаддеева [2].

1.6. Построение присоединенной матрицы для матрицы $W(\lambda, \overline{\mu})$.

Присоединенную матрицу $\mathbb{C}[W]$ для регулярной q-параметрической матрицы W представим в виде рациональной матрицы $R = \varphi[W]W^{-1}$. К матрице R применим алгоритм AB для представления R в виде несократимой факторизации:

$$R = A_p B_p^{-1} \quad \text{или} \quad R = B_p^{-T} A_p^T.$$

С учетом того, что R есть представление присоединенной матрицы $C[W]$ в виде рациональной матрицы, по свойствам AB-алгоритма заключаем, что несократимая факторизация R является полиномиальной матрицей, так что B_p есть унимодулярная q-параметрическая полиномиальная матрица. Применяя к B алгоритм обращения унимодулярных матриц, получим присоединенную матрицу в виде произведения двух регулярных q-параметрических полиномиальных матриц.

§2. Применение алгоритма ∇V-q факторизации

2.1. Вычисление несократимой факторизации рациональной матрицы.

Пусть $R(\lambda, \overline{\mu}) = P(\lambda, \overline{\mu}) Q^{-1}(\lambda, \mu)$ есть q-параметрическая рациональная матрица, несократимую факторизацию которой следует вычислить. Здесь $Q := Q(\lambda, \overline{\mu})$ – регулярная $n \times n$ матрица, $P := P(\lambda, \overline{\mu})$ – полиномиальная q-параметрическая $m \times n$ матрица, $m \geqslant n$. Для вычисления несократимой факторизации R следует к матрице $\Phi := [Q^T, P^T]$ полного строчного ранга применить алгоритм ∇V-q факторизации.

В предположении, что $\mathfrak{M}[\Phi] = \varnothing$, т.е. достаточные условия теоремы 1.1 для матрицы $\Phi = [Q^T, P^T]$ выполнены, получим представление Φ в виде ∇V-q факторизации:

$$\Phi = \nabla V, \quad V = [V_1, V_2]. \tag{2.1}$$

Отсюда имеем

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2^T \\ V_1^T \end{pmatrix} \nabla^T, \quad \text{т.е.} \quad P = V_2^T \nabla^T, Q = V_1^T \nabla^T,$$

причем по свойствам алгоритма ∇V-q факторизации имеют место соотношения: $\sigma_r[\Phi] = \sigma[\nabla]$, $\sigma_r[V] = \varnothing$. Искомой несократимой факторизацией матрицы $R = PQ^{-1}$ будет $R = V_2^T V_1^{-T}$. Как следствие теоремы 1.1 справедливо утверждение.

Следствие 2.1. *Для построения несократимой факторизации q-параметрической рациональной матрицы $R = PQ^{-1}$, где $Q \in \mathcal{F}_n^{n\times n}$, $P \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$, достаточно, чтобы множество $\mathfrak{M}(\Phi)$, т.е. пересечение конечного регулярного и конечного сингулярного спектров матрицы $\Phi = [Q^T, P^T]$ было пусто.*

2.2. Построение свободного базиса.

Пусть $P := P(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ есть базисная матрица подпространства из $k \leqslant q$ параметрических полиномиальных векторов. Задача состоит в преобразовании P в свободный базис (т.е. базис не содержащий конечного регулярного спектра) того же подпространства. Необходимость решения поставленной задачи возникает, например, при построении свободного базиса нуль-пространства из полиномиальных решений q-параметрической полиномиальной матрицы.

Для перестройки базиса P в свободный базис представим матрицу P^T в виде ∇V-q факторизации:

$$P^T = \nabla V \quad \text{или} \quad P = V^T \nabla^T. \tag{2.2}$$

Если выполнено условие $\mathfrak{M}[P] = \varnothing$, то матрица V^T является искомым свободным базисом. Справедливость следует из свойств ∇V-q факторизации (в разложении (2.2) матрица V^T не имеет конечного регулярного спектра).

Как следствие теоремы 1.1 справедливо утверждение.

Следствие 2.2. *Для преобразования базиса P подпространства из $k \leqslant q$ параметрических полиномиальных векторов в свободный базис того же подпространства достаточно выполнения условия $\mathfrak{M}[P] = \varnothing$.*

Замечание. При вычислении свободного базиса нуль-пространства $N_c[F]$ из правых полиномиальных решений матрицы $F \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, $\rho \leqslant \min(m,n)$, в качестве матрицы P можно взять матрицу W_0, полученную применением алгоритма ΔW-q факторизации [1] к матрице F.

2.3. Вычисление делителей матричного полинома.

Пусть $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$; $f[F]$ – характеристический полином матрицы F; $k_1[F]$ и $k_2[F]$ суть делители $f[F] : f[F] = k_1[F]k_2[F]$. При этом $k_1[F]$ и $k_2[F]$ не имеют общих нулей.

Задача состоит в представлении матрицы F в виде

$$F(\mu_1,\dots,\mu_k) = F_2(\mu_1,\dots,\mu_k)F_1(\mu_1,\dots,\mu_k) \tag{2.3}$$

где $F_2 \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$, $F_1 \in \mathcal{F}_n^{n\times n}$, $\det F_1 = k_1[F]$, $\sigma_r[F_2] = \{(\lambda,\overline{\mu})|k_2(\lambda,\overline{\mu}) = 0\}$. Для решения задачи следует к матрице

$$\Phi := [k_1[F]I, F^T] \tag{2.4}$$

применить алгоритм ∇V-q факторизации, т.е. представить Φ в виде

$$\Phi = \nabla V \quad \text{или} \quad \Phi^T = \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \nabla^T, \tag{2.5}$$

где V_1 и V_2 суть блоки матрицы V, размеры которых соответствуют размерам блоков матрицы Φ. Из (2.5) находим

$$k_1[F]I = V_1^T\nabla^T, \quad F = V_2^T\nabla^T. \tag{2.6}$$

Из определения конечного регулярного спектра и вида матрицы Φ следует, что множество $\sigma_r[\Phi]$ совпадает с множеством нулей полинома $k_1[F]$. С учетом этого в предположении, что $\mathfrak{M}[\Phi] = \varnothing$, из равенств (2.6) следует, что $\sigma_r[\Phi] = \sigma_r[\nabla]$ и множество $\sigma_r[V_2]$ дополняет $\sigma_r[\nabla]$ до множества $\sigma_r[F]$. Отсюда представление матрицы F в виде $F = V_2^T\nabla^T$ решает поставленную задачу: $F_1 = \nabla^T$, $F_2 := V_2^T$.

Как следствие теоремы 1.1 справедливо утверждение.

Следствие 2.3. *Для построения разложения* (2.3) *по заданному делителю* $k_1[F]$ *характеристического полинома матрицы* F *достаточно, чтобы регулярный и сингулярный спектры матрицы* Φ *вида* (2.4) *не пересекались.*

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (1995), 191–246.
2. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **238** (1997), 3–329.
3. V. N. Kublanovskaya, *Rank division algorithms and their applications.* — J. Numer Lin. Algebra Appl., **1**, No. 2 (1992), 199–213.
4. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 4. AB-алгоритм и его применения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **309** (2004), 127–143.
5. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 2. Метод неполной относительной факторизации и его применение.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **269** (2003), 89–107.

Kublanovskaya V. N. To solving multiparameter problems of algebra. 5. The ∇V-q factorization algorithm and its applications.

The algorithm of ∇V-factorization suggested earlier for decomposing one- and two-parameter polynomial matrices of full row rank into a product of two matrices (a regular one, whose spectrum coincides with the finite regular spectrum of the original matrix, and a matrix of full row rank, whose singular spectrum coincides with the singular spectrum of the original matrix, whereas the regular spectrum is empty) is extended to the case of q-parameter ($q \geqslant 1$) polynomial matrices. The algorithm of ∇V-q factorization is described, and its justification and properties for matrices with arbitrary number of parameters are presented. Applications of the algorithm to computing irreducible factorizations of q-parameter matrices, to determining a free basis of the null-space of polynomial solutions of the matrix, and to finding matrix divisors corresponding to divisors of its characteristic polynomial are considered.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 4 февраля 2004 г.