Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 309, 2004 г.

В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов

МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ΔW–q РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ И ИХ СВОЙСТВА

Рассматриваются многопараметрические полиномиальные матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ общего вида[1]. Мультипараметр $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$ будем представлять в виде $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \boldsymbol{\mu})$, где λ – один из скалярных параметров. ΔW-q разложением q-параметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ ранга ρ называется преобразование вида

$$F(\lambda, \boldsymbol{\mu}) W(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = [\Delta(\lambda, \boldsymbol{\mu})\ \mathbb{O}_{m,n-\rho}], \quad W(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \equiv [W_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \quad W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu})],$$

где $\Delta(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ – полиномиальная $m \times \rho$ матрица (столбцово приведенная[2] по параметру λ), степень которой по λ не превосходит степени исходной матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, а $W(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ – унимодулярная[3] по параметру λ матрица порядка n с блоками $W_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ и $W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ размеров $n \times \rho$ и $(n - \rho)$ соответственно.

1. Метод ΔW-q разложения

Приведем вначале “скалярный” вариант алгоритма, реализующего метод ΔW-q разложения q-параметрической полиномиальной матрицы, который является рекурсивным (по числу параметров) обобщением метода ΔW-1 разложения однопараметрической полиномиальной матрицы [9].

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 02-01-00095 и НШ-2268.2003.1.

[1] Определение спектральных характеристик многопараметрических полиномиальных матриц и их свойства приводятся в работах [2, 10, 11].

[2] Старшие векторные коэффициенты столбцов матрицы по параметру λ являются линейно независимыми.

[3] Определитель матрицы является полиномом, не зависящим от λ.

Алгоритм 1. Начиная с $m \times n_0$ матрицы $F_0(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ степени s_0 по параметру $\lambda\,(n_0 := n, s_0 := s)$ и матрицы $W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := I_n$, и $f_0(\boldsymbol{\mu}) := 1$, *для* $k = 1$ *с шагом* 1 *повторять*

(i) выполнить перестановку τ_k столбцов $m \times n_{k-1}$ матрицы $F_{k-1}(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ степени s_{k-1} по параметру λ в порядке невозрастания их степеней по параметру λ

$$G_k(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := F_{k-1}(\lambda, \boldsymbol{\mu})\Theta_k \equiv [G^k_{*1}(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \dots G^k_{*n_{k-1}}(\lambda, \boldsymbol{\mu})],$$

где Θ_k – матрица перестановок порядка n_{k-1}, так что выполняются условия

$$s_{k-1} = t^k_1 \geqslant t^k_2 \geqslant \dots \geqslant t^k_{n_{k-1}} \geqslant 0, \quad t^k_i := \deg_\lambda G^k_{*i}, \quad i = 1, \dots, n_{k-1};$$

(ii) получить матрицу $F_k(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ размеров $m \times n_k$ отбрасыванием расположенных в конце матрицы $G_k(\lambda, \mu)$ ее l_k нулевых столбцов, если таковые имеются;

(iii) $n_k := n_{k-1} - l_k$;

(iv) выполнить перестановку соответствующих τ_k строк матрицы $W_{k-1}(\lambda, \boldsymbol{\mu})$

$$W_k(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \Theta^k W_{k-1}(\lambda, \boldsymbol{\mu}), \quad \Theta^k := \mathrm{diag}\{\Theta_k, I_{n-n_{k-1}};$$

(v) сформировать полиномиальную $m \times n_k$ матрицу $M_k(\boldsymbol{\mu})$ из старших по параметру λ векторных коэффициентов столбцов матрицы $F_k(\lambda, \boldsymbol{\mu})$;

(vi) применить метод ΔW-$(q-1)$ разложения к матрице $M_k(\boldsymbol{\mu})$:

$$M_k(\boldsymbol{\mu}) W^k(\boldsymbol{\mu}) = [\Delta^k(\boldsymbol{\mu})\ \mathbb{O}_{m, n_k - r_k}], \quad W^k(\boldsymbol{\mu}) \equiv [W^k_0(\boldsymbol{\mu})\, W^k_1(\boldsymbol{\mu})]$$

и найти ее ранг r_k и базисную $n_k \times (n_k - r_k)$ матрицу $W^k_0(\boldsymbol{\mu})$ ее правого нуль-пространства;

(vii) *если* $r_k = n_k$, *то*

(vii.i) положить

$$l := k,\ \rho := r_l,\ \Delta(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := F_l(\lambda, \boldsymbol{\mu}),\ W(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := W_l(\lambda, \boldsymbol{\mu}),$$
$$f(\boldsymbol{\mu}) := (-1)^{\tau_l} f_{l-1}(\boldsymbol{\mu});$$

(vii.ii) *завершить процесс*;

(viii) преобразовать матрицу $W^k_0(\boldsymbol{\mu})$ (без перестановки строк) к левой трапециевидной матрице $L_k(\boldsymbol{\mu})$ размеров $n_k \times h_k$ $(h_k \geqslant n_k - r_k)$ с ненулевыми диагональными элементами:

(viii.i) $h_k := n_k - r_k$;

(viii.ii) *для* $i = 1$ *до* h_k *с шагом* 1 *повторять*

если ведущая строка i (начиная с диагонального элемента) является нулевой, *то*

(a) вставить в качестве дополнительного столбца с номером i столбец e_i единичной матрицы I_{n_k};

(b) $h_k := h_k + 1$;

иначе аннулировать элементы в позициях (i, j), $j = i + 1, \ldots, h_k$, умножая матрицу справа на унимодулярную по λ матрицу:

(c) сформировать $1 \times (h_k - i + 1)$ матрицу-строку из элементов в позициях (i, j), $j = i,\ i+1, \ldots, h_k$;

(d) применить к ней метод ΔW-$(q-1)$ разложения и получить полином $l_{ii}^k(\boldsymbol{\mu})$ и матрицу $W^{k,i}(\boldsymbol{\mu})$ порядка $h_k - i + 1$;

(e) умножить преобразуемую матрицу справа на унимодулярную по λ матрицу $\operatorname{diag}\{I_{h_k - i+1}, W^{k,i}(\boldsymbol{\mu})\}$;

(ix) преобразовать матрицу $L_k(\boldsymbol{\mu})$ в левую трапециевидную полиномиальную $n_k \times h_k$ матрицу $\widetilde{L}_k(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ с элементами

$$\tilde{l}_{ij}^k(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \begin{cases} 0, \quad i < j, \\ l_{ij}^k(\boldsymbol{\mu}), \quad i = j, \\ l_{ij}^k(\boldsymbol{\mu})\lambda^{t_j^k - t_i^k}, \quad i = j+1, \ldots, n_k; \end{cases}$$

(x) дополнить $n_k \times h_k$ матрицу $\widetilde{L}_k(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ до унимодулярных по λ матриц порядка n_k и n:

$$\widetilde{\widetilde{W}}_k(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \operatorname{row}(\widetilde{L}_k(\lambda, \boldsymbol{\mu}), \operatorname{col}(\mathbb{O}_{h_k, n_k - h_k}, I_{n_k - h_k})),$$
$$\widehat{W}_k(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \operatorname{diag}(\widetilde{\widetilde{W}}_k(\lambda, \boldsymbol{\mu}), I_{n - n_k});$$

(xi) вычислить матрицы и полином:

$$F_k(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := F_k(\lambda, \boldsymbol{\mu})\widetilde{\widetilde{W}}_k(\lambda, \boldsymbol{\mu}),$$
$$W_k(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := W_k(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := W_k(\lambda, \boldsymbol{\mu})\widehat{W}_k(\lambda, \boldsymbol{\mu});$$
$$f_k(\boldsymbol{\mu}) := f_{k-1}(\boldsymbol{\mu})(-1)^{\tau_k} \prod_{i=1}^{n_k} l_{ii}^k(\boldsymbol{\mu}).$$

На каждом шаге k процесса (за исключением последнего шага l) понижается степень $n_k - r_k$ столбцов преобразуемой матрицы

$F_k(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ по параметру λ. Следовательно, степень по параметру λ преобразуемой матрицы не увеличивается, а сумма степеней ее столбцов уменьшается. В силу рекурсивности алгоритма аналогичная ситуация имеет место для старших векторных коэффициентов (по следующему скалярному параметру) столбцов по крайней мере в пределах одной и той же степени по параметру λ и т.д. Это гарантирует конечность процесса, который прекращается на шаге l, когда матрица $M_l(\boldsymbol{\mu})$ имеет полный столбцовый ранг и, следовательно, определяющая ее матрица $F_l(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \equiv \Delta(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ также имеет полный столбцовый ранг и является столбцово приведенной по параметру λ.

Унимодулярность результирующей матрицы

$$W(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \equiv W_l(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = \Theta^1 \widehat{W}_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \Theta^2 \widehat{W}_2(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \cdots \Theta^{l-1} \widehat{W}_{l-1}(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \Theta^l$$

по параметру λ очевидна, поскольку все матрицы $\widehat{W}_k(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ являются левыми треугольными матрицами, диагональные элементы которых – это отличные от нуля константы или полиномы от мультипараметра $\boldsymbol{\mu}$; при этом $\det W(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{\mu})$.

Замечание. “Блочный” вариант отличается способами формирования матриц $M_k(\boldsymbol{\mu})$ на шаге (v), преобразования матрицы $W_0^k(\boldsymbol{\mu})$ к левой блочной трапециевидной матрице $L_k(\boldsymbol{\mu})$ на шаге (viii) и последующего преобразования ее в матрицу $\widetilde{L}_k(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ на шаге (ix).

Простейшие геометрические свойства ΔW-q разложения матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ состоят в следующем.

1) Столбцы матрицы $\Delta(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ образуют минимальный по параметру λ базис подпространства $\operatorname{span}\{F(\lambda, \boldsymbol{\mu})\} \subset \mathbb{C}^n(\lambda, \boldsymbol{\mu})$.

2) Блоки $W_1(\lambda, (\boldsymbol{\mu})$, $W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ матрицы $W(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ определяют порожденное $m \times n$ матрицей $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ ранговое сечение пространства $\mathbb{C}^n(\lambda, \boldsymbol{\mu})$:

$$\begin{gathered} \mathbb{C}^n(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = \operatorname{span}\{W_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})\} \oplus \operatorname{span}\{W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu})\}, \\ \operatorname{span}\{W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu})\} = \ker F \equiv \mathrm{N_c}[F], \end{gathered}$$

так что столбцы матрицы $W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ образуют унимодулярный по параметру λ базис правого нуль-пространства $\mathrm{N_c}[F]$, а столбцы матрицы $W_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ образуют унимодулярный по λ базис дополнительного подпространства.

Из свойств спектральных характеристик многопараметрических полиномиальных матриц (см., например, [10, 11]) вытекают следующие свойства метода ΔW-q разложения.

Теорема. *Матрицы $\Delta(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ и $W(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \equiv [W_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})\ W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu})]$, получаемые в результате применения к матрице $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ метода ΔW-q разложения, обладают следующими спектральными свойствами:*

- *конечный спектр матрицы $\Delta(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ содержит объединение конечных спектров матриц $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ и $W_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})$:*

$$\sigma_{\mathrm{c}}[\Delta] \supseteq \sigma_{\mathrm{c}}[F] \cup \sigma_{\mathrm{c}}[W_1];$$

- *левые нуль-пространства и левые конечные сингулярные спектры матриц $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ и $\Delta(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ совпадают:*

$$\mathrm{N_r}[F] = \mathrm{N_r}[\Delta], \quad \sigma_{\mathrm{cs}\,-}[F] = \sigma_{\mathrm{cs}}[\Delta].$$

- *если правый конечный сингулярный спектр матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})\sigma_{\mathrm{cs}\,+}[F] \neq \varnothing$, то:*
  - *конечный регулярный спектр матрицы $\Delta(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ будет содержать помимо конечного регулярного спектра матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ некоторый дополнительный регулярный $\boldsymbol{\mu}$-спектр, определяемый нулями некоторого полинома $\psi(\boldsymbol{\mu})$:*

  $$\sigma_{\mathrm{cr}}[\Delta] = \sigma_{\mathrm{cr}}[F] \cup \zeta_{\mathrm{c}}[\psi],$$

  причем

  $$\sigma_{\mathrm{cs}\,+}[F] \subset \zeta_{\mathrm{c}}[\psi];$$

  - *левый конечный сингулярный спектр матрицы $W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ совпадает с правым конечным сингулярным спектром матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, так что матрица $W(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ при этом имеет конечный регулярный $\boldsymbol{\mu}$-спектр, определяемый нулями ее характеристического полинома $f(\boldsymbol{\mu}) = \det W(\lambda, \boldsymbol{\mu})$:*

  $$\sigma_{\mathrm{cs}\,-}[W_0] = \sigma_{\mathrm{cs}\,+}[F] \subset \zeta_{\mathrm{c}}[f].$$

Замечания. 1. Дополнительный конечный регулярный $\boldsymbol{\mu}$-спектр может появиться у матрицы $W(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ не только в том случае, когда $\sigma_{\mathrm{cs}\,+}[F] \neq \varnothing$. Возможность появления такого спектра предопределена следующими особенностями алгоритма. Во-первых, даже если исходная матрица не имеет правого конечного сингулярного спектра, то таковой может появиться у матрицы $M_k(\boldsymbol{\mu})$, которая формируется на шаге (v). Следовательно, таковой будет и у базисной матрицы $W_0^k(\boldsymbol{\mu})$ ее правого нуль-пространства. Во-вторых, при приведении на шаге (viii) базисной матрицы $W_0^k(\boldsymbol{\mu})$ к левой трапециевидной форме конечный (регулярный или сингулярный) спектр может иметь матрица-строка[4], формируемая на шаге (c). Наконец, матрица $\widetilde{L}_k(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ обязательно будет иметь правый конечный сингулярный спектр, если таковой будет иметь матрица, составленная из старших (по параметру λ) членов[5] столбцов получаемой на шаге (ii) матрицы $F_k(\lambda, \boldsymbol{\mu})$.

2. Появление у матрицы $W(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ дополнительного конечного регулярного $\boldsymbol{\mu}$-спектра сопровождается появлением $\boldsymbol{\mu}$-спектра хотя бы у одной из ее подматриц: у $W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ – только регулярного $\boldsymbol{\mu}$-спектра, у $W_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ – регулярного и/или сингулярного $\boldsymbol{\mu}$-спектра. Появление же конечного $\boldsymbol{\mu}$-спектра у матрицы $W_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ приводит к появлению дополнительного конечного регулярного $\boldsymbol{\mu}$-спектра у матрицы $\Delta(\lambda)$.

3. Виды дополнительных спектров зависят от порядка, в котором выбираются ведущие параметры.

Предлагаемые ниже модификации метода ΔW-q разложения ориентированы на исключение возможности появления указанных дополнительных спектральных характеристик.

2. Метод неполного ΔW-q разложения

Предлагаемая модификация метода ΔW-q разложения предполагает использование исключительно эквивалентных преобразований, что исключает возможность появления дополнительных спектральных характеристик. Это достигается заменой всех столбцов трапециевидной матрицы $L_k(\boldsymbol{\mu})$, у которых $l_{ii}^k(\boldsymbol{\mu}) \neq \mathrm{const}$, на столбцы $\mathbf{e}_i$ единичной матрицы.

Алгоритм 2. Начиная с $m \times n_0$ матрицы $F_0(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ степени s_0 по параметру λ ($n_0 := n, s_0 := s$) и матрицы $W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := I_n$, *для* $k = 1$ *до* $s + 1$ *с шагом* 1 *повторять*
шаги (i)–(xi) Алгоритма 1, с заменой на шаге (viii.ii) операции (e):
(e) *если* $l_{ii}^k(\boldsymbol{\mu}) = \mathrm{const}$,

[4] В “блочном” варианте метода на шаге (c) обрабатывается блочная строка.

[5] Коэффициенты по параметру λ этих членов и образуют матрицу $M_k(\boldsymbol{\mu})$.

то умножить преобразуемую матрицу справа на унимодулярную матрицу

$$\mathrm{diag}(I_{h_k-i+1}, W^{k,i}(\boldsymbol{\mu}));$$

иначе заменить столбец i преобразуемой матрицы на столбец $\mathbf{e}_i$ единичной матрицы I_{n_k}.

В результате применения метода неполного ΔW-q разложения, как и прежде, выполняются преобразования вида (1). Однако теперь $W(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ – унимодулярная матрица, а $\mathbb{O}$ – нулевая матрица, число столбцов которой может варьироваться от 0 до $n-\rho$. Действительно, теперь все формируемые на шаге (x) матрицы $\widehat{W}_k(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ являются унимодулярными. Следовательно, все правосторонние преобразования исходной матрицы являются эквивалентными. Это исключает возможность появления дополнительного конечного регулярного спектра у результирующей матрицы $\Delta(\lambda)$, так что

$$\sigma_{\mathrm{cr}}[\Delta] = \sigma_{\mathrm{cr}}[F], \quad \sigma_{\mathrm{cs}\,+}[\Delta] = \sigma_{cs+}[F].$$

Однако, в отличие от предыдущего метода метод неполного ΔW-q разложения не гарантирует в общем случае получения матрицы $\Delta(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ полного столбцового ранга. Если $\sigma_{\mathrm{cs}\,+}[F] \neq \varnothing$, то матрица $\Delta(\lambda)$ не может иметь полный столбцовый ранг, и столбцы матрицы $W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ не образуют базис всего правого нуль-пространства $\mathrm{N_c}[F]$. Более того, возможны случаи, когда применение метода неполного ΔW-q разложения не приводит к преобразованию исходной матрицы, даже если она не имеет правого конечного сингулярного спектра. Тем не менее, в ряде случаев применение метода неполного ΔW-q разложения (в общем случае в комбинации с последующим применением метода ΔW-q разложения) позволяет получить матрицу $\Delta(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ полного столбцового ранга, не имеющую дополнительного (паразитического) спектра, и матрицу $W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, столбцы которой образуют минимальный по степени параметра λ базис правого нуль-пространства $\mathrm{N_c}[F]$.

3. ΔW-q метод

ΔW-q метод – комплекс взаимосвязанных методов, имеющих рекурсивную зависимость от параметров. Он состоит из метода ΔW-q разложения, ∇V-q метода, метода неполной относительной факторизации (НОФ-q) и AB-q метода (см. [5–8]). ∇V-q метод применяется к блокам результирующей матрицы $W_l(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ с целью исчерпывания у них регулярных $\boldsymbol{\mu}$-спектров. ΔW-$(q-1)$ метод применяется для исчерпывания НОД у столбцов матрицы $L_k(\boldsymbol{\mu})$.

Алгоритм 3. Начиная с $m \times n_0$ матрицы $F_0(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ степени s_0 по параметру λ ($n_0 := n, s_0 := s$) и матрицы $W_0(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := I_n$, *для* $k = 1$ *до* $s+1$ *с шагом* 1 *повторять* шаги (i)–(xi) Алгоритма 1, с изменением шагов (vii) и (ix):

(vii) *если* $r_k = n_k$, *то*

(vii.i) положить $l := k$, $\rho := r_l$, $\breve{W}_l(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \equiv [\breve{W}_{l1}(\lambda, \boldsymbol{\mu})\, \breve{W}_{l0}(\lambda, \boldsymbol{\mu})]$;

(vii.ii) применить ∇V-q метод к матрицам $\breve{W}^T_{l1}(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ размеров $\rho \times n$ и $\breve{W}^T_{l0}(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ размеров $(n-\rho) \times n$:

$$\breve{W}^T_{l1}(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = \nabla_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}), V_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}),\ \ \breve{W}^T_{l0}(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = \nabla_0(\lambda, \boldsymbol{\mu}) V_0(\lambda, \boldsymbol{\mu});$$

(vii.iii) положить

$$\Delta(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := F(\lambda, \boldsymbol{\mu}) V_1^T(\lambda, \boldsymbol{\mu}), \quad W(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \equiv [V_1^T(\lambda, \boldsymbol{\mu})\, V_0^T(\lambda, \boldsymbol{\mu})];$$

(vii.iv) вычислить $\alpha(\boldsymbol{\mu}) = \det \nabla_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ и $f[W] = f_l(\boldsymbol{\mu})/\alpha(\boldsymbol{\mu})$;

(vii.v) *завершить процесс*;

(ix) преобразовать столбцы $n_k \times h_k$ матрицы $L_k(\boldsymbol{\mu})$ в свободные векторы:

(ix.i) *для* $j = 1$ *до* h_k *с шагом* 1 *повторять*
применить ΔW-$(q-1)$ метод к полиномам $l^k_{ij}(\boldsymbol{\mu})$, $i = j+1, \ldots, n_k$, и найти их НОД $g_j(\boldsymbol{\mu})$ и частные

$$l^k_{ij}(\boldsymbol{\mu}) = \hat{l}^k_{ij}(\boldsymbol{\mu}) g_j(\boldsymbol{\mu}), \quad i = j+1, \ldots, n_k;$$

(ix.ii) преобразовать левую трапециевидную $m_j \times h_k$ матрицу $\widehat{L}_k(\boldsymbol{\mu})$ в левую трапециевидную полиномиальную $n_k \times h_k$ матрицу $\widetilde{L}_k(\lambda\boldsymbol{\mu})$ с элементами:

$$\tilde{l}^k_{ij}(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \begin{cases} 0, & i < j, \\ \hat{l}^k_{ij}(\boldsymbol{\mu}), & i = j, \\ \hat{l}^k_{ij}(\boldsymbol{\mu}) \lambda^{t^k_j - t^k_i}, & i = j+1, \ldots, n_k; \end{cases}$$

При этом предполагается, что на шагах (iv) и (d) применяется эта же модификация метода. Метод неполной относительной факторизации может исчерпывать дополнительный регулярный спектр на промежуточных этапах и, таким образом, исключать появление конечных регулярных спектров у блоков матриц, унимодулярных по параметру λ. Следует отметить, что это не исключает возможность появления дополнительного сингулярного спектра у матрицы $W_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, наличие которого приводит к появлению дополнительного регулярного спектра у матрицы $\Delta(\lambda, \boldsymbol{\mu})$.

4. Примеры

Проиллюстрируем некоторые свойства приведенных выше вариантов метода ΔW-q разложения на примерах двухпараметрических матриц[6].

Пример 1. Задана двухпараметрическая матрица-строка

$$F_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = [-\lambda \quad -\mu \quad 1+\lambda\mu],$$

не имеющая конечного спектра. Бесконечный спектр матрицы состоит из точек проективного пространства $(0:0:1)$, $(0:1:0)$.

Применение к матрице $F_1(\lambda, \mu)$ метода ΔW-2 разложения дает

$$F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu) = [1 \quad 0 \quad 0], \quad W(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 \\ \lambda & -\lambda & 1+\lambda\mu \\ 1 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

так что

$$\Delta(\lambda,\mu) = 1, \quad \det W(\lambda,\mu) = \mu,$$
$$W_1(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \quad W_0(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ -\lambda & 1+\lambda\mu \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

При этом базисная матрица $W_0(\lambda,\mu)$ правого нуль-пространства $\mathrm{N_c}[F]$ имеет конечный регулярный спектр, определяемый характеристическим полиномом $f[W_0] = \mu$.

Применение к матрице $F_1(\lambda,\mu)$ метода неполного ΔW-2 разложения дает

$$F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu) = [1 \quad 0 \quad 0], \quad W(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & 1+\lambda\mu \\ 1 & \lambda & \mu \end{bmatrix},$$

[6] Использовались MATLAB-функции, описанные в [1].

так что

$$\Delta(\lambda,\mu)=1,\quad \det W(\lambda,\mu)=\mu,$$

$$W_1(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}0\\ \lambda\\ 1\end{bmatrix},\, W_0(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \lambda^2 & 1+\lambda\mu\\ \lambda & \mu\end{bmatrix}.$$

При этом матрица $W(\lambda,\mu)$ является унимодулярной, а базисная матрица $W_0(\lambda,\mu)$ правого нуль-пространства $\mathrm{N_c}[F]$ не имеет конечного регулярного спектра.

Заметим, что полученные выше базисные матрицы $W_0(\lambda,\mu)$ правого нуль-пространства $\mathrm{N_c}[F]$ связаны следующим соотношением

$$\begin{bmatrix}\mu & 0\\ -\lambda & 1+\lambda\mu\\ 0 & \mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \lambda^2 & 1+\lambda\mu\\ \lambda & \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu & 0\\ -\lambda & 1\end{bmatrix}.$$

Пример 2. Задана двухпараметрическая матрица-строка

$$F_2(\lambda,\mu)=[1-\lambda^2\mu \quad \lambda\mu^2],$$

не имеющая конечного спектра. Бесконечный спектр матрицы состоит из точек проективного пространства $(0:0:1)$, $(0:1:0)$.

Применение к матрице $F_2(\lambda,\mu)$ метода ΔW-2 разложения, когда ведущим параметром является λ, дает

$$F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu)=[\mu \quad 0],\quad W(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}\mu & -\lambda\mu^2\\ \lambda & 1-\lambda^2\mu\end{bmatrix},$$

так что

$$\Delta(\lambda,\mu)=\mu,\ \det W(\lambda,\mu)=\mu$$

$$W_1(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}\mu\\ \lambda\end{bmatrix},\, W_0(\lambda\mu)=\begin{bmatrix}-\lambda\mu^2\\ 1-\lambda^2\mu\end{bmatrix}.$$

Таким образом, конечный регулярный спектр $\Delta(\lambda,\mu)$ не совпадает с конечным регулярным спектром матрицы $F(\lambda,\mu)$. При этом матрица $W_1(\lambda,\mu)$ имеет конечный сингулярный спектр, состоящий из точки $(0,0)$. Базисная матрица $W_0(\lambda,\mu)$ правого нуль-пространства $\mathrm{N_c}[F]$ не имеет конечного регулярного спектра.

Применение к матрице $F_2(\lambda,\mu)$ метода ΔW-2 разложения, когда ведущим параметром является μ, дает

$$F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu)=[1\,0],\quad W(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}1+\lambda^2\mu & -\lambda^4\mu^2\\ \lambda^3 & \lambda^3(1-\lambda^2\mu)\end{bmatrix},$$

так что

$$\Delta(\lambda,\mu)=1, \quad \det W(\lambda,\mu)=\lambda^3,$$
$$W_1(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}1+\lambda^2\mu\\ \lambda^3\end{bmatrix}, \; W_0(\lambda,\mu)=\lambda^3\begin{bmatrix}-\lambda\mu^2\\ 1-\lambda^2\mu\end{bmatrix}.$$

Применение к матрице $F_2(\lambda,\mu)$ метода неполного ΔW-2 разложения при любом выборе ведущего параметра не приводит ни к каким преобразованиям.

Применение к матрице $F_2(\lambda,\mu)$ комбинированного метода неполного ΔW-2 разложения позволяет исчерпать регулярный спектр у блока $W_0(\lambda,\mu)$ результирующей матрицы $W(\lambda,\mu)$:

$$F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu)=[1 \quad 0], \quad W(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}1+\lambda^2\mu & -\lambda\mu^2\\ \lambda^3 & 1-\lambda^2\mu\end{bmatrix},$$

так что

$$\Delta(\lambda,\mu)=1, \quad \det W(\lambda,\mu)=1,$$
$$W_1(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}1+\lambda^2\mu\\ \lambda^3\end{bmatrix}, W_0(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}-\lambda\mu^2\\ 1-\lambda^2\mu\end{bmatrix}.$$

Заметим, что унимодулярная матрица, осуществляющая требуемое преобразование, имеет вид

$$W(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}1+\lambda^2\mu & -\lambda\mu^2\\ \lambda^3 & 1-\lambda^2\mu\end{bmatrix},$$

а полученные выше базисные матрицы $W_0(\lambda,\mu)$ правого нуль-пространства $\mathrm{N_c}[F]$ связаны с ней следующими соотношениями:

$$\begin{bmatrix}\mu & -\lambda\mu^2\\ \lambda & 1-\lambda^2\mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\lambda^2\mu & -\lambda\mu^2\\ \lambda^3 & 1-\lambda^2\mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu & 0\\ \lambda & 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1+\lambda^2\mu & -\lambda^4\mu^2\\ \lambda^3 & \lambda^3(1-\lambda^2\mu)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\lambda^2\mu & -\lambda\mu^2\\ \lambda^3 & 1-\lambda^2\mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^3\end{bmatrix}.$$

Литература

1. Т. Я. Конькова, В. Н. Симонова, *Библиотека MATLAB-функций для полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **219** (1994), 53–80.
2. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (1995), 191–246.

3. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **238** (1997), 3–330.
4. В. Н. Кублановская, *Применение метода ранговой факторизации к анализу спектральных характеристик многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **268** (2000), 115–144.
5. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 1. Методы вычисления наследственных полиномов и их применения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **284** (2002), 143–162.
6. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 2. Метод неполной относительной факторизации и его применение.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **296** (2003), 89–107.
7. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 4. AB-алгоритм и его применение.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **309** (2004), 127–143.
8. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 5. Алгоритм ∇V-q факторизации и его применение.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **309** (2004), 144–153.
9. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач алгебры. Часть 1. Однопараметрические задачи.* Наука, С.-Пб. (2004).
10. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (1995), 284–321.
11. В. Б. Хазанов, *О некотором свойстве полиномиальных базисов подпространств над полем рациональных функций многих переменных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **284** (2002), 177–191.

Kublanovskaya V. N., Khazanov V. B. Modifications of the ΔW-q factorization method for multiparameter polynomial matrices and their properties.

Properties of the method of ΔW-q factorization of multiparameter polynomial matrices are analyzed. Modifications of the method, used in solving spectral and other multiparameter problems of algebra, are discussed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 28 мая 2004 г.

С.-Петербургский государственный
морской технический университет