Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 309, 2004 г.

В. Б. Хазанов

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

1. Аналитическая и геометрическая кратности точки спектра

Конечный спектр $\sigma_c[F]$ многопараметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ определяется[1] как геометрическое место точек $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_q^*) \in \mathbb{C}^q$, координаты которых удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений

$$F\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_\rho \\ j_1, j_2, \dots j_\rho \end{pmatrix} \equiv \varepsilon_{\mathbf{ij}}^{(\rho)}(\lambda) = 0, \qquad \begin{matrix} 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_\rho \leqslant m \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_\rho \leqslant n. \end{matrix} \tag{1}$$

Левые части уравнений системы (1) представляют собой всевозможные миноры порядка ρ матрицы $F(\lambda)$ размеров $m \times n$. Через $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ обозначены соответствующие мультииндексы $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\rho)$, $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_\rho)$, которые определяют номера строк и столбцов рассматриваемого минора. Совокупность $(q-1)$-мерных решений системы называется регулярной частью $\sigma_{\mathrm{cr}}[F]$, а совокупность $(q-k)$-мерных решений при $k > 1$ называется сингулярной частью $\sigma_{\mathrm{cs}}[F]$ конечного спектра матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$.

Аналитическая (алгебраическая) кратность точки конечного спектра $\sigma_c[F]$ определяется как кратность нуля системы нелинейных алгебраических уравнений (1). Точка $\boldsymbol{\lambda}^* \in \sigma_c[F]$ многопараметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ имеет аналитическую кратность $r+1$, если в этой точке обращаются в нуль полные дифференциалы вплоть до порядка r левых частей $\varepsilon_{\mathbf{ij}}^{(\rho)}(\boldsymbol{\lambda})$ всех уравнений системы (1), и хотя бы для одного уравнения

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 02-01-00095 и НШ-2268.2003.1.

[1]Здесь и далее используются определения спектральных характеристик многопараметрических полиномиальных матриц, их обозначения и свойства, приведенные в работах [2–4].

значение дифференциала порядка $r+1$ в этой точке отлично от нуля.

Введем понятие геометрической кратности спектра. Геометрической кратностью точки $\boldsymbol{\lambda}^* \in \sigma_c[F]$ многопараметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ, будем называть число $\varepsilon_0 := \rho - \rho^*$, где $\rho^* = \operatorname{rank} F(\boldsymbol{\lambda}^*)$. Как и в однопараметрическом случае, справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Геометрическая кратность ε_0 точки $\boldsymbol{\lambda}^* \in \sigma_c[F]$ многопараметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ не превосходит ее аналитическую кратность $r+1$:*

$$\varepsilon_0 \leqslant r+1.$$

Доказательство. Дифференциал некоторого порядка τ каждого минора $\varepsilon_{\mathbf{ij}}^{(\rho)}(\boldsymbol{\lambda})$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ представим в виде суммы определителей порядка ρ, у которых от одной до τ строк состоят из дифференциалов элементов минора $\varepsilon_{\mathbf{ij}}^{(\rho)}(\boldsymbol{\lambda})$ порядка от τ до единицы. При этом элементы, расположенные в остальных строках (их число варьируется в пределах от $\rho-1$ до $\rho-\tau$), совпадают с соответствующими элементами исходного минора $\varepsilon_{\mathbf{ij}}^{(\rho)}(\boldsymbol{\lambda})$. Следовательно, из равенства нулю всех миноров $\varepsilon_{\mathbf{ij}}^{(\rho^*+1)}(\boldsymbol{\lambda}^*)$ порядка ρ^*+1 матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}^*)$ следует равенство нулю значений всех дифференциалов, вычисленных при $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$, порядок которых меньше или равен $\rho - \rho^*$, что и требовалось доказать.

В отличие от однопараметрического случая геометрическая кратность точки спектра не всегда совпадает с максимальным числом линейно независимых собственных векторов. Если матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ не имеет сингулярного спектра, то геометрическая кратность ε_0 определяет максимальное число ее линейно независимых правых и левых собственных векторов, отвечающих этой точке:

$$F(\boldsymbol{\lambda}^*)\mathbf{x}_i = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_i \notin N_c(\boldsymbol{\lambda}^*), \quad i = 1, \ldots, \varepsilon_0,$$
$$\mathbf{y}_i^H F(\boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0}^H, \quad \mathbf{y}_i \notin N_r(\boldsymbol{\lambda}^*), \quad i = 1, \ldots, \varepsilon_0.$$

Аналогичная ситуация имеет место и для сингулярной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, если $\lambda^* \notin \sigma_{\mathrm{cs}}[F]$, так как $\dim N_c(\boldsymbol{\lambda}^*) = \dim N_c(\boldsymbol{\lambda}) = n - \rho$, а $\dim N_r(\boldsymbol{\lambda}^*) = \dim N_r(\boldsymbol{\lambda}) = m - p$. В односторонних случаях, когда

$\boldsymbol{\lambda}^* \notin \sigma_{\mathrm{cs}\,+}[F]$ или $\boldsymbol{\lambda}^* \notin \sigma_{\mathrm{cs}\,-}[F]$, ε_0 определяет максимальное число линейно независимых правых или левых собственных векторов матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ соответственно.

Рассмотрим теперь случай, когда $\boldsymbol{\lambda}^* \in \sigma_{\mathrm{cs}\,+}[F] = \sigma_{\mathrm{cs}\,-}[X]$, где $X(\boldsymbol{\lambda})$ – базисная $n \times (n-\rho)$ матрица правого нуль-пространства матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Обозначим через ε_{0X} геометрическую кратность $\boldsymbol{\lambda}^*$ как точки спектра матрицы $X(\boldsymbol{\lambda}) : \varepsilon_{0X} = n-\rho-\rho_{X^*}$, где $\rho_{X^*} := \operatorname{rank} X(\boldsymbol{\lambda}^*)$. Следующее утверждение вытекает из теоремы [4] о связи сингулярных спектров матриц $F(\boldsymbol{\lambda})$ и $X(\boldsymbol{\lambda})$.

Следствие. *Максимальное число линейно независимых правых собственных векторов полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ, отвечающих точке $\boldsymbol{\lambda}^* \in \sigma_{\mathrm{cs}\,+}[F]$, равно сумме геометрических кратностей $\varepsilon_0 + \varepsilon_{0X}$.*

Действительно, размерность правого нуль-пространства матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}^*)$ равна $n-\rho^*$. Размерность подпространства $\operatorname{span} X(\boldsymbol{\lambda}^*)$, базис которого образуют линейно независимые столбцы матрицы $X(\boldsymbol{\lambda}^*)$, равна ρ_{X^*}. Следовательно, размерность разности этих подпространств (которая и определяет максимальное число линейно независимых правых собственных векторов матрицы $F(\lambda)$, отвечающих λ^*) определяется величиной

$$n-\rho^*-\rho_{X^*} = (\rho-\rho^*) + (n-\rho-\rho_{X^*}) = \varepsilon_0 + \varepsilon_{0X}.$$

Аналогично максимальное число линейно независимых левых собственных векторов, отвечающих точке $\boldsymbol{\lambda}^* \in \sigma_{\mathrm{cs}\,-}[F]$, равно $\varepsilon_0 + \varepsilon_{0Y}$, где ε_{0Y} – геометрическая кратность $\boldsymbol{\lambda}^*$ как точки спектра базисной $m \times (m-\rho)$ матрицы $Y(\boldsymbol{\lambda})$ левого нуль-пространства матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}) : \varepsilon_{0Y} = m-\rho-\rho_{Y^*}$, где $\rho_{Y^*} := \operatorname{rank} Y(\boldsymbol{\lambda}^*)$. Таким же свойством обладают соответствующие характеристики точек бесконечной части спектра матрицы $F^\pi(\boldsymbol{\lambda})$.

2. Понижающие подпространства

Будем говорить, что подпространства $X \in \mathbb{C}^n$ и $Y \in \mathbb{C}^m$, размерности которых удовлетворяют неравенству $\dim X \geqslant \dim Y$, образуют правую пару понижающих подпространств полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \ldots \lambda_q^{k_q}$, если для всех ее матричных коэффициентов $A_{\mathbf{k}}$ выполнено условие $A_{\mathbf{k}} X \subset Y$. Первое из этих подпространств X будем также называть правым понижающим подпространством матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Естественно исключить из рассмотрения тривиальные случаи ($X = Y = 0$ и $X = \mathbb{C}^n$, $Y = \mathbb{C}^m$ при $n \geqslant m$). Поэтому будем полагать в дальнейшем, что размерности $l = \dim X$, $e = \dim Y$ удовлетворяют неравенствам $l > 0$ и $e < m$. Знание правой понижающей пары подпространств матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ позволяет преобразовывать ее к блочно треугольному виду. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть X, Y – правая понижающая пара подпространств соответственно размерностей l и e полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Тогда существует полиномиальная матрица, строго эквивалентная исходной, имеющая блочно треугольную форму*

$$\widetilde{F}(\boldsymbol{\lambda}) := P^H F(\boldsymbol{\lambda}) Q = \begin{bmatrix} \widetilde{F}_{11}(\boldsymbol{\lambda}) & \widetilde{F}_{12}(\boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbb{O}_{m-e,l} & \widetilde{F}_{22}(\boldsymbol{\lambda}) \end{bmatrix},$$

где $\widetilde{F}_{11}(\boldsymbol{\lambda})$, $\widetilde{F}_{12}(\boldsymbol{\lambda})$, $\widetilde{F}_{22}(\boldsymbol{\lambda})$ – полиномиальные матрицы размеров $e \times l$, $e \times (n-l)$ и $(m-e) \times (n-l)$ соответственно. При этом

(i) *объединение конечных спектров регулярных матриц $\widetilde{F}_{11}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\widetilde{F}_{22}(\boldsymbol{\lambda})$ совпадает с конечным спектром матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, а объединение бесконечных спектров матриц $\widetilde{F}_{11}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\widetilde{F}_{22}(\boldsymbol{\lambda})$ может отличаться от бесконечного спектра матрицы $F(\lambda)$ только собственным полиномом $\boldsymbol{\lambda}_0$ некоторой кратности;*

(ii) *правые векторные характеристики (полиномиальное решение или порождающий собственный (корневой) вектор) $\tilde{\mathbf{x}}_{11}(\boldsymbol{\lambda})$ матрицы $\widetilde{F}_{11}(\boldsymbol{\lambda})$ и левые векторные характеристики (полиномиальное решение или порождающий собственный (корневой) вектор) $\tilde{\mathbf{y}}_{22}(\lambda)$ матрицы $\widetilde{F}_{22}(\boldsymbol{\lambda})$ связаны с аналогичными объектами $x(\boldsymbol{\lambda})$ и $\mathbf{y}(\lambda)$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ соотношениями*

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) = Q_1 \tilde{\mathbf{x}}_{11}(\boldsymbol{\lambda}), \quad \mathbf{y}(\boldsymbol{\lambda}) = P_2 \tilde{\mathbf{y}}_{22}(\boldsymbol{\lambda}),$$

где Q_1 и P_2 – постоянные $n \times l$ и $m \times (m-e)$ матрицы, образованные соответственно из первых и последних столбцов невырожденных матриц Q и P.

Доказательство. Пусть Q_1 и P_1 – постоянные $n \times l$ и $m \times e$ матрицы полного столбцового ранга, столбцы которых образуют базисы подпространств X и Y соответственно. Тогда, очевидно, существуют постоянные $n \times (n-l)$ и $m \times (m-e)$ матрицы полного столбцового ранга Q_2 и P_2 такие, что матрицы $P = [P_1\, P_2]$ и

$Q = [Q_1\, Q_2]$ являются невырожденными, причем $P_2^H P_1 = \mathbb{O}_{m-e,e}$. Блоки матрицы $\widetilde{F}(\boldsymbol{\lambda})$ определяются выражениями

$$\widetilde{F}_{ij}(\boldsymbol{\lambda}) = P_i^H F(\boldsymbol{\lambda}) Q_j, \quad i, j = 1, 2,$$

так что $P_2^H A_{\mathbf{k}} Q_1 = \mathbb{O}_{m-e,e}$.

Для доказательства утверждения (i) отметим сначала следующий очевидный факт: ранг ρ матрицы $\widetilde{F}(\boldsymbol{\lambda})$ равен сумме рангов ρ_{11} и ρ_{22} матриц $\widetilde{F}_{11}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\widetilde{F}_{22}(\boldsymbol{\lambda})$ соответственно. Следовательно, любой отличный от тождественного нуля минор порядка ρ матрицы $\widetilde{F}(\boldsymbol{\lambda})$ равен произведению соответствующих миноров порядка ρ_{11} и ρ_{22} матриц $\widetilde{F}_{11}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\widetilde{F}_{22}(\boldsymbol{\lambda})$. Из этого, в свою очередь, следует, что конечный спектр матрицы $F(\lambda)$ совпадает с объединением конечных спектров матриц $\widetilde{F}_{11}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\widetilde{F}_{22}(\boldsymbol{\lambda})$.

При переходе от аффинного пространства к проективному минор порядка ρ матрицы $\widetilde{F}^{\pi}(\bar{\boldsymbol{\lambda}})$ может отличаться от произведения соответствующих миноров порядка ρ_{11} и ρ_{22} матриц $\widetilde{F}_{11}^{\pi}(\bar{\boldsymbol{\lambda}})$ и $\widetilde{F}_{22}^{\pi}(\bar{\boldsymbol{\lambda}})$ только множителем $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_0^r$, где r – сумма разностей степени матрицы $\widetilde{F}(\boldsymbol{\lambda})$ и степеней ее диагональных блоков $\widetilde{F}_{11}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\widetilde{F}_{22}(\boldsymbol{\lambda})$.

Если $\tilde{\mathbf{x}}_{11}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\tilde{\mathbf{y}}_{22}(\boldsymbol{\lambda})$ являются полиномиальными решениями или порождающими (собственными или корневыми) векторами матриц $\widetilde{F}_{11}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\widetilde{F}_{22}(\boldsymbol{\lambda})$, то соответствующие порождающие векторы матрицы $\widetilde{F}(\lambda)$ имеют вид:

$$\tilde{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{11}(\boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{y}}(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{22}(\boldsymbol{\lambda}) \end{bmatrix}.$$

Теперь справедливость утверждения (ii) вытекает из вида матриц P и Q.

Замечание. Правый собственный вектор матрицы $\widetilde{F}_{11}(\boldsymbol{\lambda})$ и левый собственный вектор матрицы $\widetilde{F}_{22}(\boldsymbol{\lambda})$, а также векторы из соответствующих жордановых полурешеток, отвечающие точке спектра $\boldsymbol{\lambda}^*$, связаны с соответствующими векторами матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ соотношениями вида:

$$\mathbf{x}^* = Q_1 \tilde{\mathbf{x}}_{11}^*, \quad \mathbf{y}^* = P_2 \tilde{\mathbf{y}}_{22}^*.$$

3. Блочные спектральные характеристики

Совокупность коммутирующих матриц Λ_j, $j = 1, \ldots, q$, порядка n будем называть правым набором матричных решений q-параметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda) = \sum\limits_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \ldots \lambda_q^{k_q}$, если имеет место соотношение

$$F_R(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_q) := \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} \Lambda_1^{k_1} \Lambda_2^{k_2} \ldots \Lambda_q^{k_q} = \mathbb{O}_{mn}. \tag{2}$$

Установим некоторые свойства правого набора матричных решений.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{x}^*$ *– общий правый собственный вектор, отвечающий собственным значениям* λ_j^* *матриц* Λ_j, $j = 1, \ldots, q$*:*

$$\Lambda_j \mathbf{x}^* = \lambda_j^* \mathbf{x}^*, \quad j = 1, \ldots, q, \tag{3}$$

из правого набора матричных решений полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$*. Тогда для матрицы* $F(\boldsymbol{\lambda})$ *вектор* $\mathbf{x}^*$ *является*

- *либо правым собственным вектором, отвечающим точке ее спектра* $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_q^*)$*,*
- *либо значением ее правого полиномиального решения, вычисленным в точке* $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_q^*)$*.*

Доказательство. Умножим обе части соотношения (2) справа на вектор $\mathbf{x}^*$:

$$\sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} \Lambda_1^{k_1} \Lambda_2^{k_2} \ldots \Lambda_q^{k_q} \mathbf{x}^* = 0.$$

Тогда, учитывая равенства (3) и коммутативность матриц Λ_j, получаем

$$\sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} \lambda_1^{**k_1} \lambda_2^{*k_2} \ldots \lambda_q^{*k_q} \mathbf{x}^* = 0.$$

Таким образом, ненулевой вектор $\mathbf{x}^*$ удовлетворяет соотношению

$$F(\boldsymbol{\lambda}^*)\mathbf{x}^* = 0,$$

из которого и следует справедливость утверждения теоремы. $\square$

Теперь перейдем к ,,блочным" спектральным характеристикам. Совокупность коммутирующих матриц Λ_j, $j = 1, \ldots, q$, порядка l будем называть правым блочным собственным набором порядка l полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda)$, если существует $n \times l$ матрица X полного столбцового ранга такая, что матрицы Λ_j, $j = 1, \ldots, q$, образуют правый набор матричных решений полиномиальной $m \times l$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})X$, т.е. имеет место соотношение

$$\{FX\}_R(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_q) := \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} X \Lambda_1^{k_1} \Lambda_2^{k_2} \ldots \Lambda_q^{k_q} = \mathbb{O}_{ml}.$$

Матрицу X будем называть блочным собственным вектором, соответствующим набору Λ_j, $j = 1, \ldots, q$. Из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Пусть $\hat{\mathbf{x}}^*$ – общий правый собственный вектор, отвечающий собственным значениям λ_j^* матриц Λ_j, $j = 1, \ldots, q$, из правого блочного собственного набора порядка l:*

$$\Lambda_j \hat{\mathbf{x}}^* = \lambda_j^* \hat{\mathbf{x}}^*, \quad j = 1, \ldots, q,$$

а X – соответствующий правый блочный собственный вектор полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Тогда для матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ вектор $\mathbf{x}^* := X\hat{\mathbf{x}}^*$ является

- *либо правым собственным вектором, отвечающим точке ее спектра $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_q^*)$,*
- *либо значением ее правого полиномиального решения, вычисленным в точке $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_q^*)$.*

Аналогичные свойства справедливы для левого набора матричных решений (совокупности коммутирующих матриц Λ_j, $j = 1, \ldots, q$, порядка m) полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$:

$$F_L(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_q) := \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_1^{k_1} \Lambda_2^{k_2} \ldots \Lambda_q^{k_q} A_{\mathbf{k}} = \mathbb{O}_{mn},$$

и для левого блочного собственного вектора ($m \times l$ матрицы полного столбцового ранга Y), отвечающего левому блочному собственному набору (совокупности коммутирующих матриц Λ_j, $j = 1, \ldots, q$, порядка l):

$$\{Y^H F\}_L(Y; \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_q) := \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_1^{k_1} \Lambda_2^{k_2} \ldots \Lambda_q^{k_q} Y^H A_{\mathbf{k}} = \mathbb{O}_{ln}.$$

Приведем простейший пример введенных блочных характеристик. Пусть каждый из линейно независимых векторов $\mathbf{x}^i(\mathbf{y}^i)$, $i = 1, \ldots, l$, является либо правым (левым) собственным вектором, отвечающим точке $\boldsymbol{\lambda}^i = (\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_q^i)$ спектра матрицы $F(\lambda)$, либо значением ее правого (левого) полиномиального решения, вычисленным в некоторой точке $\boldsymbol{\lambda}^i = (\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_q^i)$.

Тогда матрицы $\Lambda_j = \mathrm{diag}\{\lambda_j^i\}_{i=1}^l$, $j = 1, \ldots, q$, образуют правый (левый) блочный собственный набор порядка l, а матрица $X = \mathrm{row}\{\mathbf{x}^i\}_{i=1}^l$ ($Y = \mathrm{row}\{\mathbf{y}^i\}_{i=1}^l$) является соответствующим правым (левым) блочным собственным вектором.

Литература

1. В. Б. Хазанов, *О некоторых спектральных характеристиках λ-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **139** (1984), 111–124.
2. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (1995), 284–321.
3. В. Б. Хазанов, *О собственных порождающих векторах многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **248** (1998), 165–186.
4. В. Б. Хазанов, *О некотором свойстве полиномиальных базисов подпространств над полем рациональных функций многих переменных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **284** (2002), 177–191.

Khazanov V. B. On some spectral characteristics of multiparameter polynomial matrices.

The definitions of some spectral characteristics of polynomial matrices (such as the analytical (algebraic) and geometric multiplicities of a point of the spectrum, deflating subspaces, matrix solvents, and block eigenvalues and eigenvectors) are extended to the multiparameter case, and their properties are analyzed.

С.-Петербургский государственный морской технический университет

Поступило 14 мая 2004 г.