Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 309, 2004 г.

М. Н. Яковлев

РАЗРЕШИМОСТЬ СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКА $2m$

В пространстве $H_0^m(a,b)$ решается задача о минимуме квадратичного функционала с неинтегрируемыми на $[a,b]$ коэффициентами (теоремы 1 и 2). В случае нелинейного уравнения с неинтегрируемыми функциями устанавливается существование обобщенного решения и сходимость к нему метода Галеркина. В случае уравнений второго порядка приводятся условия существования классического решения сингулярной краевой задачи.

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. Как обычно, $H^m(a,b)$ – вещественное гильбертово пространство вещественных функций вещественной переменной $u(t)$, таких что $(m-1)$-ая производная $u^{(m-1)}(t)$ является абсолютно непрерывной на $[a,b]$, а производная $u^{(m)}(t)$, которая существует почти всюду на (a,b), суммируема с квадратом на (a,b). При этом

$$\|u\|^2_{H^m(a,b)} = \sum_{k=0}^{m} \int_a^b [u^{(k)}(s)]^2\, ds. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть*

1. $u(t) \in H^m(a,b)$;
2. $u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(m-1)}(a) = 0$.

Тогда верно неравенство $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$

$$[u^{(k)}(t)]^2 \leqslant \frac{(t-a)^{2(m-k)-1}}{[2(m-k)-1][(m-k-1)!]^2} \int_a^t [u^{(m)}(s)]^2\, ds, \;\; a \leqslant t \leqslant b. \tag{2}$$

Доказательство. Имеем

$$[u^{(k)}(t)]^2 = \left(\int\limits_a^t \frac{(t-s)^{m-k-1}}{(m-k-1)!} u^{(m)}(s)\, ds \right)^2$$

$$\leqslant \frac{(t-a)^{2(m-k)-1}}{[2(m-k)-1][(m-k-1)!]^2} \int\limits_a^t [u^{(m)}(s)]^2\, ds.$$

Аналогично получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть*

1. $u(t) \in H^m(a,b)$;
2. $u(b) = u'(b) = \cdots = u^{(m-1)}(b) = 0$.

Тогда верно неравенство $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$

$$[u^{(k)}(t)]^2 \leqslant \frac{(b-t)^{2(m-k)-1}}{[2(m-k)-1][(m-k-1)!]^2} \int\limits_t^b [u^{(m)}(s)]^2 ds, \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{3}$$

Далее, как обычно, $H_0^m(a,b)$ – подпространство пространства $H^m(a,b)$ функций, удовлетворяющих условиям

$$u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(m-1)}(a) = 0, \tag{4}$$

$$u(b) = u'(b) = \cdots = u^{(m-1)}(b) = 0. \tag{5}$$

При этом, как известно,

$$\|u\|^2_{H_0^m(a,b)} = \int\limits_a^b [u^{(m)}(s)]^2 ds, \tag{6}$$

и скалярное произведение $u(t) \in H_0^m(a,b)$ и $v(t) \in H_0^m(a,b)$ определяется формулой

$$(u,v)_{H_0^m(a,b)} = \int\limits_a^b u^{(m)}(s) v^{(m)}(s) ds. \tag{7}$$

Лемма 3. *Пусть $u(t) \in H_0^m(a,b)$. Тогда верно неравенство* ($k = 0,1,\dots,m-1$)

$$[u^{(k)}(t)]^2 \leqslant \frac{4^{m-k-1}[(b-t)(t-a)]^{2(m-k)-1}}{[2(m-k)-1][(m-k-1)!]^2(b-a)^{2(m-k)-1}} \int_a^b [u^{(m)}(s)]^2 ds, \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{8}$$

Доказательство. Умножая неравенство (2) на $(b-t)^{2(m-k)-1}$, а неравенство (3) на $(t-a)^{2(m-k)-1}$ и складывая полученные неравенства, имеем

$$[(b-t)^{2(m-k)-1} + (t-a)^{2(m-k)-1}][u^{(k)}(t)]^2 \leqslant \frac{[(b-t)(t-a)]^{2(m-k)-1}}{[2(m-k)-1][(m-k-1)!]^2} \int_a^b [u^{(m)}(s)]^2 ds. \tag{9}$$

Поскольку

$$\min_{a\leqslant t\leqslant b}[(b-t)^{2(m-k)-1} + (t-a)^{2(m-k)-1}] = 2\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^{2(m-k)-1},$$

из неравенства (9) получаем неравенство (8).

Лемма 4. *Пусть функция $u(t) \in H_0^m(-1,1)$. Тогда*

$$\int_{-1}^{1} \frac{[u^{(k)}(t)]^2 dt}{(1-t^2)^{2(m-k)}} \leqslant \int_{-1}^{1} [u^{(m)}(t)]^2 dt \quad (k = 0,\dots,m-1). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $-1 < v < 0 < w < 1$. Тогда имеем

$$\int_v^w \Big(u^{(m)}(s) + \frac{u^{(m-1)}(s)}{1-s^2}\Big)^2 ds \geqslant 0.$$

Применяя интегрирование по частям, получим

$$\int_v^w [u^{(m)}(s)]^2\, ds + \frac{w[u^{(m-1)}(w)]^2}{1-w^2} + \frac{|v|\,[u^{(m-1)}(v)]^2}{1-v^2} \geqslant \int_v^w \frac{[u^{(m-1)}(s)]^2 ds}{(1-s^2)^2}.$$

Отсюда, используя леммы 1 и 2, имеем

$$\int\limits_{-1}^{1}[u^{(m)}(s)]^2\,ds+\frac{w}{1+w}\int\limits_{w}^{1}[u^{(m)}(s)]^2\,ds+\frac{|v|}{1+|v|}\int\limits_{-1}^{v}[u^{(m)}(s)]^2\,ds$$

$$\geqslant\int\limits_{v}^{w}\frac{[u^{(m-1)}(s)]^2ds}{(1-s^2)^2}. \qquad (11)$$

Отсюда следует существование несобственного интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{[u^{(m-1)}(s)]^2ds}{(1-s^2)^2}.$$

Переходя к пределу при $v\to-1$ и $w\to1$ в неравенстве (11), получаем неравенство

$$\int\limits_{-1}^{1}[u^{(m)}(s)]^2\,ds\geqslant\int\limits_{-1}^{1}\frac{[u^{(m-1)}(s)]^2ds}{(1-s^2)^2}. \qquad (12)$$

Далее, допустим, что уже доказано неравенство

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{[u^{(k+1)}(s)]^2ds}{(1-s^2)^{2(m-k-1)}}\geqslant\int\limits_{-1}^{1}\frac{[u^{(k)}(s)]^2ds}{(1-s^2)^{2(m-k)}} \qquad (13)$$

и докажем неравенство

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{[u^{(k)}(s)]^2ds}{(1-s^2)^{2(m-k)}}\geqslant\int\limits_{-1}^{1}\frac{[u^{(k-1)}(s)]^2ds}{(1-s^2)^{2(m-k+1)}}. \qquad (14)$$

Имеем

$$\int\limits_{v}^{w}\left(\frac{u^{(k)}(s)}{(1-s^2)^{m-k}}+\frac{su^{(k-1)}(s)}{(1-s^2)^{m-k+1}}\right)^2ds\geqslant0$$

или, интегрируя по частям,

$$\int\limits_{v}^{w}\frac{[u^{(k)}(s)]^2ds}{(1-s^2)^{2(m-k)}}+\frac{w[u^{(k-1)}(w)]^2}{(1-w^2)^{2(m-k)+1)}}+\frac{|v|\,[u^{(k-1)}(v)]^2}{(1-v^2)^{2(m-k)+1)}}$$

$$\geqslant \int_v^w \frac{(1+4(m-k)s^2)[u^{(k-1)}(s)]^2 ds}{(1-s^2)^{2(m-k+1)}} \geqslant \int_v^w \frac{[u^{(k-1)}(s)]^2 ds}{(1-s^2)^{2(m-k+1)}}.$$

Отсюда, используя леммы 1 и 2, получим

$$\int_{-1}^{1} \frac{[u^{(k)}(s)]^2\, ds}{(1-s^2)^{2(m-k)}}$$

$$+\frac{w}{[2(m-k)+1][(m-k)!]^2(1+w)^{2(m-k)+1}} \int_w^1 [u^{(m)}(s)]^2\, ds$$

$$+\frac{|v|}{[2(m-k)+1][(m-k)!]^2(1+|v|)^{2(m-k)+1}} \int_{-1}^{v} [u^{(m)}(s)]^2 ds$$

$$\geqslant \int_v^w \frac{[u^{(k-1)}(s)]^2 ds}{(1-s^2)^{2(m-k+1)}}. \tag{15}$$

Отсюда заключаем о существовании несобственного интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{[u^{(k-1)}(s)]^2 ds}{(1-s^2)^{2(m-k+1)}}$$

и, переходя к пределу при $w \to 1$, $v \to -1$ в неравенстве (15), получаем неравенство (14), верное при всех $k = m, m-1, \dots, 1$. Лемма 4 доказана.

Положим при $k = 0, \dots, m-1$, $a \leqslant t \leqslant b$,

$$\omega_k^m(t) \equiv \frac{[2(b-t)(t-a)]^{2(m-k)-1}}{2[2(m-k)-1][(m-k-1)!]^2(b-a)^{2(m-k)-1}}. \tag{16}$$

Лемма 5. *Пусть вещественные функции $p_k(t)$ таковы, что*

1. $$p_k(t)[(b-t)(t-a)]^{2(m-k)-1} \in L(a,b), \tag{17}$$

2. $$k_1 \equiv 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \int_a^b p_k^-(s)\omega_k^m(s) ds > 0, \tag{18}$$

$$k_2 \equiv 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \int_a^b |p_k(s)|\omega_k^m(s) ds < +\infty. \tag{19}$$

Здесь

$$p_k^-(s) \equiv \frac{1}{2}[\,|p_k(s)| - p_k(s)], \quad p_k^+(s) \equiv \frac{1}{2}[\,|p_k(s)| + p_k(s)].$$

Тогда на пространстве $H_0^m(a,b)$ *норма* $|u|$, *определяемая соотношением*

$$|u|^2 = [u,u] = \int\limits_a^b [u^{(m)}(s)]^2 ds + \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_a^b p_k(s)[u^{(k)}(s)]^2\, ds, \tag{20}$$

равносильна (эквивалентна) норме $\|u\|_{H_0^m(a,b)}$. *Именно,*

$$k_1\|u\|^2_{H_0^m(a,b)} \leqslant |u|^2 \leqslant k_2\|u\|^2_{H_0^m(a,b)}. \tag{21}$$

Доказательство. Используя лемму 3, мы выводим

$$|u|^2 = \|u\|^2_{H_0^m(a,b)} + \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_a^b p_k(s)[u^{(k)}(s)]^2\, ds$$

$$\geqslant \left[1 - \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_a^b p^-(s)\omega_k^m(s)ds\right]^2 \|u\|^2_{H_0^m(a,b)} = k_1\|u\|^2_{H_0^m(a,b)}.$$

Аналогично получаем правое неравенство в (21).

Лемма 6. *Пусть выполнены соотношения (17) и пусть вещественная функция* $f(t)$ *такова, что*

$$f(t)[(b-t)(t-a)]^{m-\frac{1}{2}} \in L(a,b). \tag{22}$$

Тогда на пространстве $H_0^m(a,b)$ *определен билинейный функционал*

$$J(u,v) \equiv \int\limits_a^b u^{(m)}(s)v^{(m)}(s)ds$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_a^b p_k(s)u^{(k)}(s)v^{(k)}(s)ds - 2\int\limits_a^b f(s)v(s)ds. \tag{23}$$

Доказательство. Учитывая неравенства (8), получим

$$|J(u,v)| \leqslant \|u\|_{H_0^m(a,b)}\|v\|_{H_0^m(a,b)}$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\int_a^b |p_k(t)|\omega_k^m(t)dt\|u\|_{H_0^m(a,b)}\|v\|_{H_0^m(a,b)}$$

$$+2\int_a^b |f(t)|\sqrt{\omega_0^m}(t)dt\|v\|_{H_0^m(a,b)} < +\infty.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены соотношения* (17)–(19) *и* (22)*. Тогда*

(1) *в пространстве функций* $H_0^m(a,b)$ *существует одна и только одна функция* $u_0(t) \in H_0^m(a,b)$*, на которой квадратичный функционал*

$$J(u,u) = \int_a^b [u^{(m)}(s)]^2 ds + \sum_{k=0}^{m-1}\int_a^b p_k(s)[u^{(k)}(s)]^2 ds - 2\int_a^b f(s)u(s)ds \tag{24}$$

достигает минимума;

(2) *соотношение*

$$\int_a^b u^{(m)}(s)v^{(m)}(s)ds + \sum_{k=0}^{m-1}\int_a^b p_k(s)u^{(k)}(s)v^{(k)}(s)ds - \int_a^b f(s)v(s)ds = 0 \tag{25}$$

при любых $v(t) \in H_0^m(a,b)$ *(являющееся уравнением относительно функции* $u(t)$*) имеет одно и только одно решение в пространстве* $H_0^m(a,b)$*, и этим решением является функция* $u_0(t)$*, на которой квадратичный функционал* (23) *достигает минимума.*

Доказательство. По теореме Рисса об общем виде ограниченного линейного функционала в гильбертовом пространстве со скалярным произведением

$$[u,v] \equiv \int_a^b u^{(m)}(s)v^{(m)}(s)\,ds + \sum_{k=0}^{m-1}\int_a^b p_k(s)u^{(k)}(s)v^{(k)}(s)ds, \tag{26}$$

в силу (22) с учетом леммы 5 для некоторого $u_0 \in H_0^m(a,b)$ имеем

$$\int_a^b f(s)u(s)ds = [u_0, u] \quad \text{для любого} \quad u \in H_0^m(a,b).$$

Поэтому для всех $u \in H_0^m(a,b)$

$$J(u,u) = [u,u] - 2[u_0,u] = |u - u_0|^2 - |u_0|^2.$$

Следовательно, $u_0(t) \in H_0^m(a,b)$ является единственной точкой минимума квадратичного функционала $J(u,u)$ в $H_0^m(a,b)$. Далее, поскольку для любого $v \in H_0^m(a,b)$

$$[u_0, v] = \int_a^b u_0^{(m)}(s)v^{(m)}(s)ds + \sum_{k=0}^{m-1} \int_a^b p_k(s)u^{(k)}(s)v^{(k)}(s)ds$$

и

$$\int_a^b f(s)v(s)ds = [u_0, v],$$

получаем (25). Пусть теперь существует другая функция $u_1(t) \in H_0^m(a,b)$, удовлетворяющая соотношению (25). Тогда

$$0 = \int_a^b [u_0^{(m)}(s) - u_1^{(m)}(s)]v^{(m)}(s)ds$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \int_a^b p_k(s)[u_0^{(k)}(s) - u_1^{(k)}(s)]v^{(k)}(s)ds.$$

Полагая $v(t) = u_0(t) - u_1(t)$, получим

$$0 \geqslant \left[1 - \sum_{k=0}^{m-1} \int_a^b p^-(s)\omega_k^m(s)ds\right]^2 \|u_0 - u_1\|^2_{H_0^m(a,b)}.$$

Отсюда $u_0(t) = u_1(t)$.

Лемма 7. *Пусть вещественные функции $p_k(t)$ таковы, что*

$$|p_k(t)|(1-t^2)^{2(m-k)} \leqslant c_k, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \quad k = 0, \dots, m-1, \tag{27}$$

$$p_k^-(t)(1-t^2)^{2(m-k)} \leqslant d_k, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \quad k = 0, \dots, m-1, \tag{28}$$

и

$$l_1 \equiv 1 - \sum_{k=0}^{m-1} d_k > 0, \tag{29}$$

$$l_2 \equiv 1 + \sum_{k=0}^{m-1} c_k < +\infty. \tag{30}$$

Тогда на пространстве $H_0^m(-1,1)$ нормы $\|u\|_{H_0^m(-1,1)}$ и

$$|||u|||^2 \equiv \|u\|^2_{H_0^m(-1,1)} + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{-1}^{1} p_k(s)[u^{(k)}(s)]^2 ds \tag{31}$$

равносильны (эквивалентны), а именно

$$l_1 \|u\|^2_{H_0^m(-1,1)} \leqslant |||u|||^2 \leqslant l_2 \|u\|^2_{H_0^m(-1,1)}. \tag{32}$$

Доказательство. Используя лемму 4, получаем

$$|||u|||^2 \geqslant \left[1 - \sum_{k=0}^{m-1} d_k\right] \|u\|^2_{H_0^m(-1,1)}.$$

Аналогично доказывается и правая часть неравенства (32).

Лемма 8. *Пусть выполнены неравенства* (27) *и* (28) *и пусть функция $f(t)$ такова, что*

$$f(t)(1-t^2)^m \in L_2(-1,1). \tag{33}$$

Тогда на пространстве $H_0^m(-1,1)$ определен билинейный функционал

$$\Phi(u,v) \equiv \int_{-1}^{1} u^{(m)}(s) v^{(m)}(s) ds$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \int_{-1}^{1} p_k(s) u^{(k)}(s) v^{(k)}(s) ds - 2 \int_{-1}^{1} f(s) v(s) ds. \tag{34}$$

Доказательство. Учитывая неравенства (27) и (33), получим

$$|\Phi(u,v)| \leqslant \|u\|_{H_0^m(-1,1)}\|v\|_{H_0^m(-1,1)} + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \|u\|_{H_0^m(-1,1)}\|v\|_{H_0^m(-1,1)}$$

$$+2\left(\int_{-1}^{1}[f(s)]^2(1-s^2)^{2m}ds\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{H_0^m(-1,1)} < +\infty.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены соотношения* (27)–(30) *и* (33). *Тогда*

(1) *в пространстве функций* $H_0^m(-1,1)$ *существует одна и только одна функция* $w_0(t)$, *на которой квадратичный функционал* $\Phi(u,u)$ *достигает минимума;*

(2) *соотношение*

$$\int_{-1}^{1} u^{(m)}(t)v^{(m)}(t)dt + \sum_{k=0}^{m-1}\int_{-1}^{1} p_k(t)v^{(k)}(t)u^{(k)}(t)dt = \int_{-1}^{1} f(t)v(t)dt \quad (35)$$

для любых $v(t) \in H_0^m(-1,1)$ *(являющееся уравнением для функции* $u(t)$*) имеет одно и только одно решение в пространстве* $H_0^m(-1,1)$, *и этим решением является функция* $w_0(t)$.

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Пусть функции $p_k(t)$ $(k = 0,\dots,m-1)$ имеют k непрерывных производных в открытом промежутке (a,b), т.е. $p_k(t) \in C^{(k)}(a,b)$. Пусть $f(t) \in C(a,b)$. Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения порядка $2m$

$$(-1)^m u^{(2m)} + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k(p_k(t)u^{(k)})^{(k)} = f(t), \quad a < t < b, \qquad (36)$$

с краевыми условиями

$$u(a) = u'(a) = \dots = u^{(m-1)}(a) = 0, \qquad (37)$$

$$u(b) = u'(b) = \dots = u^{(m-1)}(b) = 0. \qquad (38)$$

Равенство (25) является, как известно, определением обобщенного решения краевой задачи (36)–(38). Теоремы 1 и 2 дают условия существования обобщенного решения сингулярной (с неинтегрируемыми на $[a,b]$ функциями $p_k(t)$) краевой задачи (36)–(38). Обобщенное решение будет обычным (классическим) решением задачи (36)–(38), если это решение будет принадлежать $C^{(2m)}(a,b)$. В следующих теоремах это устанавливается для случая $m=1$ (уравнения второго порядка).

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$-u'' + p_0(t)u = f(t), \quad a < t < b, \tag{39}$$

с краевыми условиями

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{40}$$

Теорема 3. *Пусть*

$$p_0(t) \in C(a,b), \quad f(t) \in C(a,b), \tag{41}$$

$$p_0(t)(b-t)(t-a) \in L(a,b), \qquad f(t)\sqrt{(b-t)(t-a)} \in L(a,b), \tag{42}$$

$$1 - \int\limits_a^b p_0^-(t)(b-t)(t-a)\,dt > 0. \tag{43}$$

Тогда краевая задача (39), (46) *имеет единственное решение* $u_0(t) \in C^{(2)}(a,b)$.

Доказательство. Условия (42), (43) обеспечивают выполнение условий теоремы 1 при $m=1$. По теореме 1 существует единственная функция $u_0(t) \in H_0^1(a,b)$ такая, что

$$\int\limits_a^b u_0'(t)v'(t)dt + \int\limits_a^b p_0(t)u_0(t)v(t)dt = \int\limits_a^b f(t)v(t)dt \tag{44}$$

при любых функциях $v(t) \in H_0'(a,b)$. Равенство (44) показывает, что функция $p_0(t)u_0(t) - f(t)$, принадлежащая $C(a,b)$ и тем самым локально-суммируемая в (a,b), является обобщенной производной функции $u_0'(t)$. По теореме об эквивалентности классической и обобщенной производных (см. [1, с. 127]), $u_0'(t) \in C^{(1)}(a,b)$, и ее обобщенная производная является классической производной функции $u_0'(t)$. Кроме того, так как $u_0'(t) \in C^{(1)}(a,b)$, она является классической производной функции $u_0(t)$, причем $u_0'(t)$ непрерывна в (a,b).

Тем самым $u_0(t) \in C^{(2)}(a,b)$ и

$$u_0''(t) = p_0(t)u_0(t) - f(t), \quad 0 < t < b,$$

что и доказывает теорему, поскольку $u_0(a) = u_0(b) = 0$.

Теорема 4. *Пусть*

$$p_0(t) \in C(-1,1), \quad f(t) \in C(-1,1), \tag{45}$$

$$|p_0(t)|(1-t^2)^2 \leqslant c_0, \quad p_0^-(t)(1-t^2)^2 \leqslant d_0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{46}$$

$$|f(t)|(1-t^2) \leqslant e < +\infty, \tag{47}$$

$$1 - d_0 > 0. \tag{48}$$

Тогда краевая задача

$$-u'' + p_0(t)u = f(t), \quad -1 < t < 1, \tag{49}$$

$$u(-1) = u(1) \tag{50}$$

имеет и при том единственное решение $u_0(t) \in C^{(2)}(-1,1)$.

Доказательство. Условия настоящей теоремы обеспечивают выполнение условий теоремы 2 при $m = 1$. Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как при доказательстве теоремы 3.

Рассмотрим следующую краевую задачу для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения порядка $2m$

$$(-1)^m u^{(2m)} + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k (p_k(t)u^{(k)})^{(k)} + f(t,u) = 0, \quad a < t < b, \tag{51}$$

с краевыми условиями

$$u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(m-1)}(a) = u(b) = u'(b) = \cdots = u^{(m-1)}(b) = 0. \tag{52}$$

Обобщенным решением краевой задачи (51), (52) называется функция $u_0(t) \in H_0^m(a,b)$, удовлетворяющая равенству

$$\Phi(u_0, v) \equiv \int_a^b u_0^{(m)}(t) v^{(m)} dt + \sum_{k=0}^{m-1} \int_a^b p_k(t) u_0^{(k)}(t) v^{(k)}(t) dt + \int_a^b f(t, u_0(t) v(t)) dt = 0 \tag{53}$$

при любых $v(t) \in H_0^m(a,b)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены соотношения* (17)–(19) *и пусть*

$$f(t,u(t))[(b-t)(t-a)]^{m-\frac{1}{2}} \in L(a,b) \text{ при любых } u(t) \in H_0^m(a,b); \quad (54)$$

$$[f(t,u)-f(t,w)](u-w) \geqslant 0,\ a<t<b,\ -\infty<u,\ v<+\infty; \quad (55)$$

$$\int\limits_a^b |f(t,w_n,(t))-f(t,w(t))|[(b-t)(t-a)]^{m-\frac{1}{2}}dt \to 0 \quad (56)$$

$$\text{при } \|w_n-w\|_{H_0^m(a,b)} \to 0.$$

Тогда существует одно и только одно обобщенное решение $u_0(t) \in H_0^m(a,b)$ *краевой задачи* (51), (52), *и метод Галеркина по полной в* $H_0^m(a,b)$ *системе* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* $u_o(t)$ *по норме пространства* $H_0^m(a,b)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 5 применим теорию монотонных операторов (см. [2, с. 411–423]).

По теореме Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве для каждого $u(t) \in H_0^m(a,b)$ и каждого $v(t) \in H_0^m(a,b)$ имеем

$$\Phi(u,v) = (T(u),v)_{H_0^m(a,b)}. \quad (57)$$

Здесь нелинейный оператор $T(u)$ действует из $H_0^m(a,b)$ в $H_0^m(a,b)$. Оператор $T(u)$ сильно монотонный. В самом деле, учитывая (18) и (55), для $z,w \in H_0^m(a,b)$ получаем

$$\big(T(z)-T(w),z-w\big) = \Phi(z,z-w)-\Phi(w,z-w)$$

$$= \int\limits_a^b \left[z^{(m)}(t)-w^{(m)}(t)\right]^2 dt + \int\limits_a^b \sum_{k=0}^{m-1} p_k(t)\left[z^{(k)}(t)-w^{(k)}(t)\right]^2 dt$$

$$+\int\limits_a^b \left[f(t,z(t))-f(t,w(t))\right](z(t)-w(t))\,dt \geqslant k_1\|z-w\|^2_{H_0^m(a,b)}. \quad (58)$$

Оператор $T(u)$ деминепрерывен. В самом деле,

$$(T(w_n)-T(w),z) \leqslant \Bigg[k_2\|w_n-w\|_{H_0^m(a,b)}$$

$$+\int\limits_a^b |f(t,w_n(t))-f(t,w(t))|\sqrt{\omega_0^m(t)}\,dt\Bigg]\|z\|_{H_0^m(a,b)} \to 0$$

при $\|w_n-w\|_{H_0^m(a,b)} \to 0$.

Остается применить теорему о монотонном операторе.

Аналогично доказывается следующая теорема. Здесь $a = -1$, $b = -1$.

Теорема 6. *Пусть выполнены соотношения* (27)–(29) *и пусть*

$$f(t, u(t))(1-t^2)^m \in L^2(-1,1) \quad \textit{для любой} \quad u(t) \in H_0^m(-1,1); \tag{59}$$

$$[f(t,u)-f(t,v)](u-v) \geqslant 0 \quad \textit{при} \quad -1 < t < 1, \;\; -\infty < u, \; v < +\infty; \tag{60}$$

$$\int_{-1}^{1} |f(t,w_n(t))-f(t,w(t))|^2(1-t^2)^{2m}\,dt \to 0 \;\; \textit{при} \;\; \|w_n-w\|_{H_0^m(-1,1)} \to 0. \tag{61}$$

Тогда существует одно и только одно обобщенное решение $u_0(t) \in H_0^m(-1,1)$ *краевой задачи* (51), (52), *и метод Галеркина по полной в* $H_0^m(-1,1)$ *системе* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* $u_0(t)$ *по норме пространства* $H_0^m(-1,1)$.

Теорема 7. *Пусть*

(1) *верны соотношения* (41)–(43), (55);

(2) $f(t,u(t))\sqrt{(b-t)(t-a)} \in L(a,b)$ *для любой функции* $u(t) \in H_0^1(a,b)$;

(3) $\displaystyle\int_a^b |f(t,w_n(t)) - f(t,w(t))|\sqrt{(b-t)(t-a)}\,dt \to 0$ *при* $\|w_n - w\|_{H_0^1(a,b)} \to 0$;

(4) $f(t,u(t)) \in C(a,b)$ *при любой* $u(t) \in H_0^1(a,b)$, $p_0(t) \in C(a,b)$.

Тогда краевая задача

$$-u''(t) + p_0(t)u(t) + f(t,u(t)) = 0, \quad a < t < b,$$
$$u(a) = u(b) = 0$$

имеет и при том единственное решение $u_0(t) \in C^{(2)}(a,b)$.

Теорема 8. *Пусть*

(1) *верны соотношения* (60), (45), (46), (48);

(2) $f(t,u(t))(1-t^2) \in L^2(-1,1)$ *при любой* $u(t) \in H_0^1(-1,1)$;

$$(3) \int\limits_{-1}^{1} |f(t, w_n(t)) - f(t, w(t))|^2 (1-t^2)dt \to 0$$

при $\|w_n - w\|_{H_0^1(-1,1)} \to 0.$

Тогда краевая задача

$$-u''(t) + p_0(t)u(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad -1 < t < 1,$$
$$u(1) = u(-1) = 0$$

имеет и при том единственное решение $u_0(t) \in C^{(2)}(-1,1)$.

Литература

1. Э. Либ, М. Лосс, *Анализ*. Научная книга, Новосибирск (1998).
2. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*. Наука, М. (1993).

Yakovlev M. N. Solvability of singular boundary-value problems for ordinary differential equations of order $2m$.

Theorems on the existence and uniqueness of generalized and classical solutions of the first boundary-value problem for an ordinary differential equation of order $2m$ in the case where the functions involved are nonintegrable at the points at which boundary conditions are imposed (singular problems) are established. The results obtained justify the applicability of the Ritz and Galerkin methods to the problems considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 июня 2004 г.