Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 312, 2004 г.

Л. В. Канторович

О ПЕРЕМЕЩЕНИИ МАСС

Мы будем считать R метрическим компактным пространством, хотя некоторые из приведенных определений и результатов могут быть высказаны и для пространств более общего вида.

Пусть $\Phi(e)$ распределение масс, т.е. функция совокупности: 1) определенная для борелевских множеств, 2) неотрицательная: $\Phi(e) \geq 0$, 3) абсолютно-аддитивная: если $e = e_1 + e_2 + \cdots$; $e_i \cap e_k = \emptyset$ $(i \neq k)$, то $\Phi(e) = \Phi(e_1) + \Phi(e_2) + \cdots$. Пусть $\Phi'(e')$ другое распределение масс, причем $\Phi(R) = \Phi'(R)$. Перемещением масс будем называть такую функцию $\Psi(e, e')$, определенную для пар (B)-совокупностей $e, e' \in R$: 1) неотрицательную и абсолютно-аддитивную по каждому из аргументов, 2) такую, что $\Psi(e, R) = \Phi(e)$; $\Psi(R, e') = \Phi'(e')$.

Пусть $r(x, y)$ известная непрерывная неотрицательная функция — работа по перемещению единицы массы из x в y.

Работой по перемещению данных распределений масс будем называть величину

$$W(\Psi, \Phi, \Phi') = \int\limits_R \int\limits_R r(x, x')\Psi(de, de') = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i,k} r(x_i, x'_k)\Psi(e_i, e'_k),$$

где $\{e_i\}$ дизъюнктны и $\sum_1^n e_i = R$, $\{e'_k\}$ дизъюнктны и $\sum_1^m e'_k = R$, $x_i \in e_i$, $x'_k \in e'_k$, и λ наибольшее из чисел $\operatorname{diam} e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\operatorname{diam} e'_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Интеграл, очевидно, существует.

Величину

$$W(\Phi, \Phi') = \inf_{\Psi} W(\Psi, \Phi, \Phi')$$

будем называть минимальной работой по перемещению. Так как множество функций $\{\Psi\}$ компактно, то ясно, что существует функция Ψ_0, осуществляющая этот минимум, т.е. такая, что

$$W(\Phi, \Phi') = W(\Psi_0, \Phi, \Phi'),$$

Л. В. Канторович, *О перемещении масс.* Докл. АН СССР **37**, No. 7–8 (1942), 227–229. Статья воспроизводится без каких-либо изменений.

правда, эта функция не единственна. Такое перемещение Ψ_0 будем называть минимальным перемещением.

Далее будем говорить, что перемещение Ψ от x к y не равно нулю и писать $x \to y$, если для любых окрестностей U_x и U_y точек x и y будет $\Psi(U_x, U_y) > 0$. Назовем перемещение Ψ потенциальным, если существует такая функция $U(x)$, что 1) $|U(x) - U(y)| \le r(x, y)$, 2) $U(y) - U(x) = r(x, y)$, если $x \to y$.

Тогда имеет место теорема.

Теорема. *Чтобы перемещение Ψ_0 было минимально, необходимо и достаточно, чтобы оно было потенциально.*

Достаточность. Пусть Ψ_0 потенциально и U потенциал. Тогда по 2) свойству U:

$$W(\Psi_0, \Phi, \Phi') = \int\limits_R \int\limits_R r(x, y) \Psi_0(de, de') = \int\limits_R \int\limits_R [U(y) - U(x)] \Psi_0(de, de') =$$

$$= \int\limits_R \int\limits_R U(y) \Psi_0(de, de') - \int\limits_R \int\limits_R U(x) \Psi_0(de, de') =$$

$$= \int\limits_R U(y) \Phi'(de') - \int\limits_R U(x) \Phi(de),$$

если же Ψ какая-либо другая функция, то

$$W(\Psi, \Phi, \Phi') = \int\limits_R \int\limits_R r(x, y) \Psi(de, de') \ge \int\limits_R \int\limits_R [U(y) - U(x)] \Psi(de, de') =$$

$$= \int\limits_R U(y) \Phi'(de') - \int\limits_R U(x) \Phi(de),$$

т.е. $W(\Psi, \Phi, \Phi') \ge W(\Psi_0, \Phi, \Phi')$ и Ψ_0 минимально.

Необходимость. Пусть Ψ_0 минимальное перемещение. Возьмем множество точек $\xi_0, \xi_1, \ldots$ плотное в R. Обозначим через D_n наименьшее множество точек, содержащее ξ_n и такое, что если $x \in D_n$ и $x \to y$ или $y \to x$, то $y \in D_n$. Очевидно, что если $y \in D_n$, то найдется такая система точек x_i, y_i, что $\xi_0 = x_0 \to y_1$, $x_1 \to y_1$, $x_2 \to y_2$, $\ldots$, $x_{n-1} \to y_n$, $x_n \to y_n$ $(y_n = y)$ (или сходная цепь с иным направлением стрелок в начале или в конце). В приведенном случае положим

$$U(y) = \sum_1^n r(x_{i-1}, y_{i-1}) - \sum_1^n r(x_i, y_i).$$

Нетрудно проверить, что значение U не зависит от выбора соединяющей цепи, а также, что для U будут удовлетворены свойства 1) и 2) потенциала, если x, $y \in D_0$. Именно, можно показать, что несоблюдение какого-либо из этих обстоятельств позволило бы заменить Ψ_0 на другое перемещение с еще меньшей работой, что противоречит минимальности Ψ_0.

Предположим, что в областях D_0, D_1, $\ldots$, D_{n-1} функция U уже определена.

Если точка ξ_n вошла в $D_0 + D_1 + \ldots + D_{n-1}$, то для нее и для всей области D_n функция U уже определена. В противном случае определим $V(x)$ на D_n так же, как мы определяли U в D_0, только роль ξ_0 будет играть ξ_n. Далее подбираем число μ, заключенное в пределах

$$\inf_{\substack{x \in D_0 + D_1 + \ldots + D_{n-1} \\ y \in D_n}} \{U(x) - V(y) - r(x, y)\} \le \mu$$
$$\le \inf_{\substack{x \in D_0 + D_1 + \ldots + D_{n-1} \\ y \in D_n}} \{U(x) - V(y) + r(x, y)\}.$$

Существование μ опять устанавливается на основании минимальности Ψ_0. Далее полагаем для $x \in D_n$: $U(x) = V(x) + \mu$. Итак, функция U определена в $D_0 + D_1 + \ldots$, а так как эта совокупность в R везде плотна, то U распространяется благодаря условию 2) на все R и обладает свойствами 1) и 2), т.е. перемещение потенциально.

Доказанная теорема дает удобный способ проверки того, что данное перемещение масс минимальное. Именно, для проверки достаточно попытаться строить потенциал для него тем способом, который приведен в доказательстве необходимости. При этом, если такое построение окажется невозможным, т.е. если перемещение не минимальное, то одновременно обнаружится способ уменьшения работы при перемещении, позволяющий постепенно подойти к минимальному перемещению.

Представляет интерес изучение пространства распределений масс, если в качестве расстояния принять величину $W(\Phi, \Phi')$ (для случая $r(x, y) = \rho(x, y)$ — расстоянию). Этот способ нам кажется в некотором отношении наиболее естественным для введения метрики в данном пространстве.

В заключение отметим две практических задачи, при решении которых данная теорема находит себе применение.

Задача 1. О прикреплении пунктов потребления к пунктам производства. На железнодорожной сети имеется ряд пунктов производства $A_1, A_2, \ldots, A_m$, в которых производится соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ вагонов данного массового груза в сутки, и ряд пунктов потребления $B_1, B_2, \ldots, B_n$, в которых потребляется соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ вагонов в сутки $(\sum a_i = \sum b_k)$. Требуется так прикрепить пункты потребления к пунктам производства, чтобы суммарные затраты по перевозке оказались наименьшими. Затраты $r_{i,k}$ по перевозке одного вагона из пункта A_i в каждый пункт B_k считаются заданными.

Подробное изложение данной, а также более сложных задач, относящихся к этому же вопросу, дано в работе Л. В. Канторовича и М. К. Говурина,[1] которая находится в печати.[2]

Задача 2. О планировке участка. Считаются заданными рельеф местности — уравнение земной поверхности $z = f(x, y)$ до планировки и после планировки $z = f_1(x, y)$ (при этом $\int\int f(x, y)dx\,dy = \int\int f_1(x, y)dx\,dy$), а также затраты по перемещению 1 м^3 земли из пункта (x, y) в пункт (x_1, y_1). Требуется указать такой план перемещения земляных масс, при котором суммарные затраты по перемещению оказались бы минимальными.

Ярославское высшее
инженерно-техническое училище

(Представлено академиком
С. Л. Соболевым 29 IX 1942)

[1] До войны М. К. Гавурин писал свою фамилию через “о”. – *Прим. ред.*

[2] Статья Л. В. Канторовича и М. К. Гавурина была опубликована в 1949 г. – *Прим. ред.*