Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 312, 2004 г.

В. И. Данилов, Г. А. Кошевой

ДИСКРЕТНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ

Вопрос, которому посвящен этот доклад, состоит в следующем: что считать "выпуклым" подмножеством в решетке целых чисел $\mathbb{Z}^n$ или что считать "выпуклой" или "вогнутой" функцией на $\mathbb{Z}^n$? Известно, что выпуклые множества и функции играют большую роль в различных областях математики и других наук. Подходящее понятие дискретной выпуклости было бы столь же полезно для различных целочисленных задач (см. [3]).

Из соображений краткости мы будем говорить только про вогнутые функции на $\mathbb{Z}^n$. Три классических факта определяют мощь вогнутого анализа. Сумма и свертка вогнутых функций вогнуты; в каждой точке вогнутая функция имеет супердифференциал. Следствие – теорема о сэндвиче. Эти свойства будут для нас главными ориентирами при определении дискретной выпуклости.

1. Псевдовыпуклость. Итак, пусть $\mathbb{Z}^n$ – решетка целых точек в вещественном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$. Нас будут интересовать функции f, заданные на решетке $\mathbb{Z}^n$ или на некотором подмножестве $D \subset \mathbb{Z}^n$. Вне области определения функция равна $-\infty$.

Аффинная функция a называется *супердифференциалом функции f в точке x*, если $a \geqslant f$ и $a(x) = f(x)$.

Предложение. *Для функции f следующие два свойства эквивалентны:*

(1) *в любой точке из области определения функции f существует супердифференциал;*

(2) *f есть ограничение на $\mathbb{Z}^n$ вогнутой функции, заданной на $\mathbb{R}^n$.*

Определение. *Такие функции мы называем псевдо-вогнутыми.*

Псевдо-вогнутые функции обладают многими достоинствами. Недостаток – они не стабильны относительно операции свертки. Напомним, что *сверткой* (точнее, *супремальной конволюцией*) двух функций f и g называется новая функция $f * g$, заданная формулой

$$(f * g)(z) = \max(f(x) + g(y), x + y = z).$$

Основная задача, которой мы собираемся заняться: найти ситуации, когда свертка все же оказывается псевдо-вогнутой. Почему это важно?

2. Экономическое отступление. Представим себе, что функция f – это функция полезности экономического агента, выраженная в "деньгах". Сталкиваясь с ценой p (линейным функционалом на $\mathbb{Z}^n$), агент выбирает потребительский набор, максимизирующий "чистую полезность" $f - p$. Условие псевдо-вогнутости – это условие "управляемости" агента с помощью цен: выбором подходящей цены мы можем склонить его к потреблению любого наперед заданного потребительского набора.

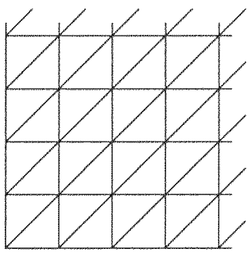
Свертка соответствует агрегированию двух агентов в одного. Спрос этого агрегированного агента равен сумме спросов двух исходных агентов. То обстоятельство, что свертка не псевдо-вогнута, означает, что мы не может полностью управлять спросом с помощью цен. Это скрытая причина всех нарушений существования равновесия на рынке неделимых (целочисленных) товаров. Напротив, имея хорошие условия, гарантирующие псевдо-вогнутость сверток, мы легко можем превратить их в теоремы о существовании экономического равновесия с неделимыми товарами (см. [2]).

3. Размерность 1. Это идеальный случай. Тут свертка псевдо-вогнутых всегда псевдо-вогнута. В экономической ситуации мы получаем существование равновесий, если есть всего один неделимый товар.

Кстати, условие псевдо-вогнутости в случае одной переменной имеет простой смысл: это убывание "предельной" полезности. В математике такие ситуации тоже не редкость: например, сталкиваясь с набором вещественных чисел, часто упорядочивают его по убыванию. Два примера, к которым мы еще вернемся: разбиения целого числа (и диаграммы Юнга) и спектр эрмитова оператора.

4. Размерность 2: гексагональные функции. В размерности 2 свертка двух псевдо-вогнутых функций уже может оказаться не псевдо-вогнутой. Тем не менее существует интересный класс псевдо-вогнутых функций, стабильный относительно сверток. Он состоит из т.н. *гексагонально-вогнутых* (или $\mathcal{H}$-вогнутых) функций.

Чтобы определить такие функции, рассмотрим стандартную триангуляцию плоскости $\mathbb{R}^2$:



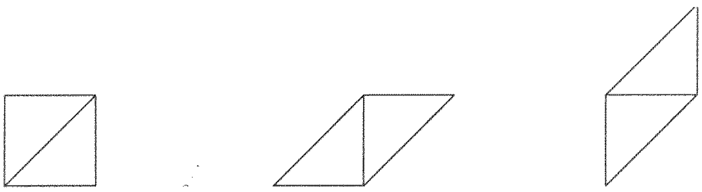
Назовем функцию f на двумерной решетке *$\mathcal{H}$-вогнутой*, если ее конкавизация $co(f)$ аффинна на каждом треугольнике стандартной триангуляции $\mathbb{Z}^2$. Или иначе. Продолжим по аффинности функцию f на каждый симплекс триангуляции; тогда должна получиться вогнутая функция. Это позволяет определить $\mathcal{H}$-вогнутые функции без апелляции к продолжению: должны выполняться неравенства трех типов (связанных с двумя соседними треугольниками), а именно

(1) $f(a_1, a_2) + f(a_1 + 1, a_2 + 1) \geqslant f(a_1 + 1, a_2) + f(a_1, a_2 + 1)$;

(2) $f(a_1, a_2) + f(a_1 + 2, a_2 + 1) \leqslant f(a_1 + 1, a_2) + f(a_1 + 1, a_2 + 1)$;

(2′) $f(a_1, a_2) + f(a_1 + 1, a_2 + 2) \leqslant f(a_1, a_2 + 1) + f(a_1 + 1, a_2 + 1)$.

Наглядно эти неравенства соответствуют трем рисункам, где разделяющее ребро указывает пару вершин с большим (или равным) значением суммы значений f:



1 2 2′

$\mathcal{H}$-вогнутые функции обладают всеми хорошими свойствами классических вогнутых функций: есть теорема о сэндвиче, свертка и сумма коммутируют с операцией конкавизации *co* и т.д. Так что класс таких функций по праву можно называть классом *дискретно-вогнутых функций.*

Как уже отмечалось выше, используя такие функции, можно получать теоремы существования равновесий на рынках с двумя неделимыми товарами. Экономический смысл условий гексагональности тесно связан с такими свойствами товаров, как заменимость и(или) дополнительность.

Однако $\mathcal{H}$-вогнутые функции появляются и в задачах, далеких от математической экономики или целочисленного программирования, таких, как теория представлений, самосопряженные операторы или модули над кольцами дискретного нормирования.

5. Пример: эрмитовы операторы. Пусть A – симметричная матрица. Все ее собственные значения – вещественные числа. Обычно их упорядочивают по убыванию ($\mathrm{Sp}(A)$).

Старый вопрос, еще из 19 века: пусть известны спектры матриц A и B (размера n); каким может быть спектр их суммы $C = A + B$? Здесь много сделали Г. Вейль, Ки Фан, Лидский, Хорн. Решающий шаг сделал Клячко (1998) и затем Кнутсон и Тао (1998). Ответ (в нужной для нас форме) такой: тогда и только тогда, когда на целых точках треугольного грида с вершинами в $(0,0)$, $(n,0)$ и $(0,n)$ существует $\mathcal{H}$-вогнутая функция, ограничения которой на стороны треугольника имеют приращения $\mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Sp}(B)$ и $\mathrm{Sp}(C)$.

Наша гипотеза (см. [6]) состоит в том, что должна существовать некая каноническая конструкция нужной $\mathcal{H}$-вогнутой функции по матрицам A и B.

6. Представления общей линейной группы. Рассмотрим конечномерные комплексные полиномиальные представления группы $GL(n,\mathbb{C})$. Они параметризуются n-частными разбиениями $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0)$; соответствующее представление обозначается $V(\lambda)$. Вопрос: когда $V(\lambda)$ входит в представление $V(\mu)\otimes V(\nu)$? Ответ: тогда и только тогда, когда на том же треугольном гриде существует ЦЕЛОЗНАЧНАЯ $\mathcal{H}$-вогнутая функция с граничными "значениями-приращениями" μ, ν и λ (последнее – на гипотенузе). Более того, КРАТНОСТЬ $c^{\lambda}_{\mu,\nu}$ вхождения $V(\lambda)$ в $V(\mu)\otimes V(\nu)$ равна ЧИСЛУ таких функций с данными граничными значениями. Кстати, это число $c^{\lambda}_{\mu,\nu}$ называется *коэффициентом Литтлвуда–Ричардсона* и встречается во многих комбинаторных задачах (например, в исчислении Шуберта).

Похожий ответ имеет место для представлений симметрических групп S_n.

7. Базис Гельфанда–Цетлина. Вернемся снова к неприводимому представлению $V(\lambda)$ группы $GL(n)$. Гельфанд и Цетлин предложили некоторый специальный базис пространства $V(\lambda)$. Элементы базиса параметризуются (целозначными) функциями на том же треугольнике с такими условиями:

(a) внизу стоит 0,

(b) приращения на правом катете равны λ,

(c) на каждой горизонтальной полосе функция $\mathcal{H}$-вогнута.

8. Модули над кольцами дискретного нормирования. Пусть M – модуль конечной длины над кольцом $K[[T]]$, то есть фактически конечномерное K-пространство с нильпотентным действием оператора T. И пусть даны два подмодуля N_1 и N_2. Образуем функцию $c = c(M; N_1, N_2) : \mathbb{Z}^2_+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ по формуле

$$c(k_1, k_2) = \dim(M/T^{k_1}N_1 + T^{k_2}N_2).$$

Удобно считать, что $N_1 + N_2 = M$; в этом случае $c(0, 0) = 0$. (Отметим, что на нижнем основании стоит функция "емкости" фактормодуля M/N_2.) Конечно, функция c монотонна, но главное ее свойство дается следующей теоремой (см. [4]).

Теорема 1. *Функция c $\mathcal{H}$-вогнута.*

Верно и обратное:

Теорема 2. *Пусть $c : \mathbb{Z}^2_+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ – монотонная $\mathcal{H}$-вогнутая функция, $c(0) \geqslant 0$. Тогда существуют модуль M и два его подмодуля N_1 и N_2, такие, что $c = c(M; N_1, N_2)$.*

9. Размерность $\geqslant 3$. До сих пор мы имели дело с одним классом $\mathcal{H}$ дискретной выпуклости на "плоскости". Можно показать, что в каком-то смысле это единственный класс дискретно вогнутых функций на двумерной решетке. Что же можно сказать про функции от большего (чем два) числа переменных?

Имеется (и даже два) обобщения на случай $n > 2$.

В первом случае мы рассматриваем стандартную триангуляцию пространства $\mathbb{R}^n$. Выпуклый полиэдр P в $\mathbb{R}^n$ называется

$*\mathbb{A}_n$-*выпуклым*, если он составлен из симплексов нашей триангуляции. Такой полиэдр автоматически целый. Класс таких полиэдров замкнут относительно пересечений, но не относительно сумм (если $n > 2$).

Другой класс $\mathcal{PM}$ состоит из (целых) полиматроидов. Так мы называем полиэдры, у которых все РЕБРА параллельны векторам e_k или $e_i - e_j$. Класс $\mathcal{PM}$ замкнут уже относительно сумм, но не относительно пересечений. Кроме того, для (целых) полиматроидов верно свойство (Add), так что они также образуют класс дискретной выпуклости.

10. Характеризация классов дискретной выпуклости. Можно ли расширить эти два класса (с сохранением свойств дискретной выпуклости)? Какие еще есть классы дискретной выпуклости? Будем вести разговор в терминах целых полиэдров в $\mathbb{R}^n$. Предположим, у нас имеется класс $\mathcal{P}$ таких полиэдров; всюду далее предполагается, что он выдерживает целые сдвиги, отражение и замкнут относительно перехода к граням.

Лемма. *Следующие три свойства класса $\mathcal{P}$ эквивалентны:*

(Add) $(P+Q)(\mathbb{Z}) = P(\mathbb{Z}) + Q(\mathbb{Z})$;

(Edm) $P \cap Q$ – *целый политоп;*

(Sep) *если $P(\mathbb{Z})$ и $Q(\mathbb{Z})$ не пересекаются, их можно разделить гиперплоскостью.*

В этом случае мы говорим, что $\mathcal{P}$ – *класс дискретной выпуклости.*

Отметим, что в общем случае ни $P+Q$, ни $P \cap Q$ не принадлежат $\mathcal{P}$. Если все же класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно сумм (как класс полиматроидов), мы говорим о $+$*классе*; аналогично можно говорить о $\cap$*классе*.

Опишем, как устроены $+$классы дискретной выпуклости. Центральную роль здесь играют направления ребер полиэдров из $\mathcal{P}$. Назовем примитивный вектор $r \in \mathbb{Z}^n$ *корнем*, если некоторая кратность отрезка $[0, r]$ принадлежит нашему классу $\mathcal{P}$. Множество всех корней обозначим $(\mathcal{P})$.

Теорема 3. *Если $\mathcal{P}$ – $+$класс дискретной выпуклости, то $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ – унимодулярная система.*

Определение. *Множество $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z}^n$ (для простоты – порождающее $\mathbb{R}^n$) называется унимодулярной системой, если для любых n линейно независимых элементов $r_1, \dots, r_n$ из $\mathcal{R}$ порождаемая ими подгруппа $\mathbb{Z}r_1 + \dots + \mathbb{Z}r_n$ совпадает с $\mathbb{Z}^n$.*

Неинвариантное определение: запишем вектора из $\mathcal{P}$ в базисе $\mathbb{Z}^n$ как матрицу из $\mathcal{R}$ столбцов; тогда любой n-минор должен равняться 0 или ± 1.

Теорема (обратная, см. [1]). *Пусть $\mathcal{R}$ – унимодулярная система и $\mathcal{P}(\mathcal{R}, \mathbb{Z})$ – класс целых полиэдров в $\mathbb{R}^n$, все ребра которых параллельны векторам из $\mathcal{R}$. Тогда $\mathcal{P}(\mathcal{R}, \mathbb{Z})$ - +класс дискретной выпуклости.*

Например, класс $\mathcal{PM}$ целых полиматроидов соответствует системе $\mathbb{A}_n$, состоящей из векторов вида $\pm e_k$ и $e_i - e_j$.

Дуальным образом описываются $\cap$классы дискретной выпуклости (см. [1]). Тем самым вопрос переносится в область унимодулярных систем. Достаточно полное описание унимодулярных систем приведено в [5].

Литература

1. V. I. Danilov, G. A. Koshevoy, *Discrete convexity and unimodularity*. I. — Adv. Math. **189** (2004), 301–324. E-print: `http://arXiv.org/math.CO/0304291`.
2. V. Danilov, G. Koshevoy, K. Murota, *Discrete convexity and equilibria in economies with indivisible goods and money.* — Math. Soc. Sci. **41** (2001), 251–273.
3. K. Murota, *Discrete Convex Analysis.* SIAM, Philadelphia (2003).
4. В. И. Данилов, Г. А. Кошевой, *Дискретная выпуклость и нильпотентные операторы.* — Изв. РАН, Сер. мат. **67** (2003), 3–20.
5. V. I. Danilov, V. P. Grishukhin, *Maximal unimodular systems of vectors.* — Europ. J. Combin. **20** (1999), 509–526.
6. В. И. Данилов, Г. А. Кошевой, *Дискретная выпуклость и эрмитовы матрицы.* — Труды МИАН **241** (2003), 68–90.

Danilov V. I., Koshevoy G. A. Discrete convexity.

In the paper we explain what sets and functions on the lattice $\mathbb{Z}^n$ could be called convex. The basis of our theory is the following three main postulates of the classic convex analysis: concave functions are stable under summation, they are also stable under convolution, and the superdifferential of a concave function is nonempty at each point of the domain. Interesting classes of discrete concave functions (and even dual) arise if we require either the existence of superdifferentials and stability under convolution or the existence of superdifferentials and stability

under summation. The corresponding classes of convex sets are obtained as the affinity domains of such discretely concave functions. The first type classes are stable under summation and the second type classes are stable under intersection. In both type classes the separation theorem holds true. Unimodular sets play an important role in the classification of such classes. The so-called polymatroidal discretely concave functions, the most widespread among applications, are related to the unimodular system $\mathbb{A}_n := \{\pm e_i, e_i - e_j\}$. Such functions naturally appear in mathematical economics, play an important role for solution the Horn problem, for describing submodule invariants over rings with discrete valuation, in Gelfand–Tzetlin patterns and so on.

Центральный
экономико-математический
институт РАН
E-mail: danilov@cemi.rssi.ru
koshevoy@cemi.rssi.ru

Поступило 12 апреля 2004 г.