Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 312, 2004 г.

В. Л. Левин

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МОНЖА—КАНТОРОВИЧА

1. Введение. Задача Монжа–Канторовича (ЗМК) состоит в следующем. Заданы польские пространства[1] X, Y с положительными борелевскими мерами на них, σ_1 и σ_2, $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$, и ограниченная непрерывная функция стоимости $c : X \times Y \to \mathbf{R}$. Требуется минимизировать функционал

$$\langle c, \mu \rangle = \int\limits_{X \times Y} c(x,y)\mu(d(x,y))$$

(стоимость перемещения массы) на множестве $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ положительных борелевских мер μ на $X \times Y$, имеющих σ_1 и σ_2 своими маргинальными мерами: $\mu(B_1 \times Y) = \sigma_1 B_1$, $\mu(X \times B_2) = \sigma_2 B_2$ для любых борелевских множеств $B_1 \subset X, B_2 \subset Y$. Это ЗМК с фиксированными маргинальными мерами, обозначаемая далее $MKP(c; \sigma_1, \sigma_2)$. Она является релаксацией задачи Монжа (ЗМ) – нелинейной экстремальной задачи $MP(c; \sigma_1, \sigma_2)$, состоящей в минимизации функционала

$$\mathbf{F}(f) := \int\limits_X c(x, f(x))\, \sigma_1(dx)$$

на множестве $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ борелевских отображений $f : (X, \sigma_1) \to (Y, \sigma_2)$, сохраняющих меру ($f$ называется сохраняющим меру, если $f(\sigma_1) = \sigma_2$, т.е. $\sigma_2 B_2 = \sigma_1 f^{-1}(B_2)$ для любого борелевского множества $B_2 \subset Y$). С каждым $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ свяжем меру $\mu(f; \sigma_1)$ на $X \times Y$, определяемую формулой $\mu(f; \sigma_1) = (\mathrm{id}_X \times f)(\sigma_1)$,

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РГНФ (проект 03-02-00027).

[1]Польское пространство – сепарабельное метризуемое пространство, которое можно метризовать так, что оно станет полным.

так что $\mu(f;\sigma_1)B = \sigma_1\{x \in X : (x, f(x)) \in B\}$ для каждого борелевского множества $B \subset X \times Y$. Легко видеть, что $\mu(f;\sigma_1) \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$, т.е. $\mu(f;\sigma_1)$ является (допустимым) решением ЗМК (далее мы называем его решением Монжа), и имеет место равенство $\langle c, \mu(f;\sigma_1)\rangle = \mathbf{F}(f)$. Отсюда следует, что если мера $\mu(f;\sigma_1)$ есть оптимальное решение $MKP(c;\sigma_1,\sigma_2)$, то f – оптимальное решение соответствующей задачи Монжа $MP(c;\sigma_1,\sigma_2)$ и, стало быть, оптимальные значения обеих задач совпадают. (В то же время, из оптимальности f не следует оптимальность $\mu(f;\sigma_1)$; более того, множество $\Phi(\sigma_1,\sigma_2)$ может оказаться пустым, и тогда вообще нет оптимального f; см. [20, Examples 1.1, 1.2].) Далее основной интерес для нас представляет классическая задача Монжа, в которой X, Y – замкнутые области (= замыкания связных открытых множеств) в $\mathbf{R}^n$, имеющие одинаковый объем, а σ_1, σ_2 – n-мерные меры Лебега на них. Классическую ЗМ с евклидовым расстоянием в качестве функции стоимости (“задачу о выемках и насыпях”) сформулировал в 1781 году Гаспар Монж [23]; постановка ЗМК принадлежит Леониду Витальевичу Канторовичу [6] (см. также [7, 8]), который исследовал случай, когда $X = Y$ – произвольный метрический компакт, а c – его метрика. В этом случае ЗМК с фиксированными маргинальными мерами эквивалентна другому варианту ЗМК, с фиксированной разностью маргинальных мер [7, 8] (т.е. с разрешенными транзитными перевозками). Оба варианта ЗМК являются бесконечномерными задачами линейного программирования; при этом критерий оптимальности Канторовича может быть переформулирован как теорема двойственности; см. [4]. Задачи Монжа–Канторовича с произвольными непрерывными функциями стоимости на (не обязательно метризуемых) компактных пространствах рассматриваются в литературе начиная с 1974 года; см. [10], где доказаны теоремы двойственности для обоих вариантов ЗМК[2]. Дальнейшие обобщения (разрывные функции стоимости, важные в экономических приложениях; некомпактные и нетопологические пространства) см. в [21, 12, 15, 17]. Много внимания уделялось су-

[2]В общем случае две постановки (с фиксированными маргинальными мерами и с фиксированной разностью маргинальных мер) не эквивалентны; для сохранения эквивалентности при всевозможных σ_1, σ_2 необходимо и достаточно, чтобы функция стоимости удовлетворяла неравенству треугольника [12].

ществованию и единственности оптимальных решений ЗМК в евклидовых пространствах. Впервые теорема существования оптимального решения Монжа была сформулирована В. Н. Судаковым [28] для ЗМК с функцией стоимости $c(x,y) = \|x-y\|$ (норма не обязательно евклидова) и абсолютно непрерывными мерами σ_1, σ_2 с компактными носителями. (Для таких функций стоимости оптимальное решение не единственно.) Позже обнаружилось, что доказательство [28] содержит пробел, однако основная идея этого доказательства оказалась плодотворной, и с ее помощью было установлено существование оптимального решения Монжа ЗМК с нормой, квадрат которой $\|\cdot\|^2$ принадлежит классу C^2 [9, 29]. Дальнейшие результаты в этом направлении (случай абсолютной непрерывности только одной маргинальной меры; другой класс норм) см. в [1, 2]. Остается открытым вопрос о существовании оптимального решения Монжа для произвольной нормы. Для функций стоимости, отличных от $\|x-y\|$, в настоящее время известно несколько случаев существования и единственности оптимальных решений Монжа при условии абсолютной непрерывности одной из маргинальных мер; см. [3, 5, 16, 26, 27]. В большинстве публикаций рассматриваются функции стоимости вида $c(x,y) = h(x-y)$; по поводу теорем существования и единственности для общих функций стоимости см. [16] и раздел 2 ниже. Остается актуальной проблема нахождения точных (явных) оптимальных решений задач Монжа и Монжа–Канторовича. Точные оптимальные решения одномерной ЗМК получены в явном виде при различных специальных условиях на c и σ_1, σ_2; см. [22, 30, 24, 25]. Примеры явно решаемых многомерных (главным образом, двумерных) классических ЗМ см. в [19, 20]. В настоящей работе получены дальнейшие результаты в этом направлении и, в частности, дан ответ (в примерах 9 и 10) на вопросы, поставленные в [20, p. 120]. Важную роль в дальнейшем играет множество

$$Q_0(\varphi) := \{u \in \mathbf{R}^Z : u(x) - u(z) \leqslant \varphi(x,z) \quad \forall x, z \in Z\}$$

(где Z – произвольное множество, $\varphi : Z \times Z \to \mathbf{R}, \varphi(x,x) = 0$ при любом $x \in Z$), являющееся множеством ограничений двойственной задачи для нетопологического варианта ЗМК с заданной разностью маргинальных мер на Z [15]. Свойства таких множеств и условия их непустоты рассматривались в [12, 13, 14, 16, 20]. В основе нашего подхода к построению точных оптимальных решений задач Монжа и Монжа–Канторовича лежит теорема (см. [19, 20] и теорему 3.1 ниже) о равносильности двух свойств: оптимальности меры $\mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ и непустоты $Q_0(\varphi^\mu)$ для специальной функции φ^μ, определяемой по c и μ.

2. Предварительные сведения (теоремы существования и единственности). Здесь сформулированы две теоремы существования и единственности, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. Далее в этом разделе $X \subset \mathbf{R}^n, Y \subset \mathbf{R}^m, \sigma_1 X = \sigma_2 Y$, символ spt обозначает носитель соответствующей меры, $\operatorname{int} X$ – внутренность X. Нам понадобятся следующие условия на σ_1 и c:
(A_1) Мера σ_1 абсолютно непрерывна относительно n-мерной меры Лебега.
(A_c) Если для $y^1, y^2 \in \operatorname{spt}(\sigma_2)$ функции $c(\cdot, y^1)$ и $c(\cdot, y^2)$ дифференцируемы в некоторой точке $x \in \operatorname{int} X$ и $\nabla_x c(x, y^1) = \nabla_x c(x, y^2)$, то $y^1 = y^2$.

Условие (A_c) выполнено, в частности, когда $m = n$ и $c(x, y) = \pm x \cdot y$ или $c(x, y) = h(x - y)$, где h строго выпукла или строго вогнута. См. также примеры 4 и 5 ниже.

Следующие теоремы являются частными случаями теорем 6.1 и 6.2 в [16] (см. также [20, Theorems 1.2–1.4]).

Теорема 2.1. *Пусть X – замкнутая выпуклая область и выполнены условия (A_1), (A_c). Предположим также, что все функции $c(\cdot, y)$ $(y \in \operatorname{spt}(\sigma_2))$ выпуклы либо все они вогнуты. Тогда существует единственное оптимальное решение задачи Монжа–Канторовича $MKP(c; \sigma_1, \sigma_2)$, это решение является решением Монжа $\mu(f; \sigma_1)$, и f – единственное* $(\mathrm{mod}\, 0)$, *т.е. с точностью до значений на σ_1-пренебрежимом множестве, оптимальное решение задачи Монжа $MP(c; \sigma_1, \sigma_2)$.*

Теорема 2.2. *Пусть X – замкнутая область и выполнены условия (A_1), (A_c). Предположим также, что*

(а) *множество* $\operatorname{int} \operatorname{spt}(\sigma_1)$ *непусто, и его дополнение в* $\operatorname{spt}(\sigma_1)$ *имеет нулевую лебегову меру;*

(б) *функции $c(\cdot, y)$ $(y \in \operatorname{spt}(\sigma_2))$ дифференцируемы на* $\operatorname{int} \operatorname{spt}(\sigma_1)$ *и локально липшицевы на* $\operatorname{spt}(\sigma_1)$ *равномерно по y (т.е. для каждого $x \in \operatorname{spt}(\sigma_1)$ найдутся окрестность V_x и положительная константа $C = C(x)$, такие, что для всех $x^1, x^2 \in V_x$, $y \in \operatorname{spt}(\sigma_2)$ справедливо неравенство $|c(x^1, y) - c(x^2, y)| \leqslant C\|x^1 - x^2\|$).*

Тогда существует единственное оптимальное решение задачи Монжа–Канторовича, это решение является решением Монжа $\mu(f;\sigma_1)$, *причем* f – *единственное* $\pmod 0$ *оптимальное решение задачи Монжа* $MP(c;\sigma_1,\sigma_2)$.

3. Условия оптимальности. Пусть X, Y – польские пространства. Обозначим через π_1 и π_2 естественные отображения проектирования $X\times Y$ на X и Y. Далее всегда предполагается, что $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$. С каждой $\mu \in \Gamma(\sigma_1,\sigma_2)$ свяжем множество $Z := \pi_1(\mathrm{spt}(\mu))$, и определим на $Z\times Z$ функцию

$$\varphi^\mu(x,z) := \inf_{y:(x,y)\in \mathrm{spt}(\mu)} (c(z,y)-c(x,y)). \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Мера* $\mu\in\Gamma(\sigma_1,\sigma_2)$ *является оптимальным решением* $MKP(c;\sigma_1,\sigma_2)$ *тогда и только тогда, когда множество* $Q_0(\varphi^\mu)$ *непусто.*

Это прямое следствие теорем 5.1 и 2.1 в [16]; см. также [18, теорема 3].

Заметим, что если $\mu=\mu(f;\sigma_1)$, где $f\in\Phi(\sigma_1,\sigma_2)$ и $\mathrm{spt}(\sigma_1)=X$, то носитель меры μ совпадает с замыканием графика отображения f ($\mathrm{spt}(\mu)=\mathrm{cl}\,\mathrm{gr}(f)$) и $Z=X$. Если к тому же f непрерывно, то $\mathrm{spt}(\mu)=\mathrm{gr}(f)$. В последнем случае для любых $x,z\in X$

$$\varphi^\mu(x,z)=c(z,f(x))-c(x,f(x)). \tag{3.2}$$

Следствие 3.1 (ср. [20]). *Предположим, что отображение* $f\in\Phi(\sigma_1,\sigma_2)$ *непрерывно и* $\mathrm{spt}(\sigma_1)=X$. *Следующие утверждения равносильны:*

(а) *мера* $\mu=\mu(f;\sigma_1)$ – *оптимальное решение* $MKP(c;\sigma_1,\sigma_2)$ *и, стало быть,* f – *оптимальное решение* $MP(c;\sigma_1,\sigma_2)$;

(б) *множество* $Q_0(\varphi^\mu)$ *непусто, то есть существует вещественная функция* u *на* X, *такая, что* $u(x)-u(z)\leqslant c(z,f(x))-c(x,f(x))$ *для всех* $x,z\in X$.

Следствие 3.2 (ср. [20, Theorem 5.3]). *Предположим, что* $\mathrm{spt}(\sigma_1)=X$ *и* X *представимо в виде конечного объединения множеств* X_i, *где каждое* X_i *совпадает с замыканием своей внутренности* $\mathrm{int}\,X_i$, *причем множества* $\mathrm{int}\,X_i$ *попарно не пересекаются, а дополнение в* X *их объединения* σ_1*-пренебрежимо. Наконец, предположим, что для каждого* i *определено непрерывное отображение* $f^i: X_i\to Y$ *и*

$\sigma_2 = \sum_i f^i(\sigma_{1i})$, где σ_{1i} – ограничение σ_1 на X_i. Рассмотрим отображение $f : X \to Y$, совпадающее с f^i на $\operatorname{int} X_i$ для каждого i и определенное как угодно на $X \setminus \cup_i \operatorname{int} X_i$. Тогда $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ и равносильны следующие утверждения:

(а) *$\mu(f;\sigma_1)$ – оптимальное решение $MKP(c;\sigma_1,\sigma_2)$ и, стало быть, f – оптимальное решение $MP(c;\sigma_1,\sigma_2)$;*

(б) *найдется непрерывная функция u на X, такая, что*

$$u(x) - u(z) \leqslant \varphi_i(x,z) := c(z, f^i(x)) - c(x, f^i(x)) \tag{3.3}$$

для всех $x \in \operatorname{int} X_i, z \in \cup_i \operatorname{int} X_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Следствие 3.3. *Пусть для каждого $k = 1, \ldots, m$ заданы пространства X_k, Y_k, ограниченная непрерывная вещественная функция c_k на $X_k \times Y_k$ и непрерывное отображение $f_k : X_k \to Y_k$. Предположим, что найдутся положительные борелевские меры σ_{1k} на X_k и σ_{2k} на Y_k, такие, что $\operatorname{spt}(\sigma_{1k}) = X_k$, $\sigma_{2k} = f_k(\sigma_{1k})$ и $\mu(f_k;\sigma_{1k})$ является оптимальным решением $MKP(c_k;\sigma_{1k},\sigma_{2k})$. Положим для $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$*

$$f(x) := (f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m)), \quad c(x,y) := c_1(x_1,y_1) + \cdots + c_m(x_m,y_m).$$

Тогда, каковы бы ни были замкнутое подмножество $X \subset X_1 \times \cdots \times X_m$ и положительная борелевская мера σ_1 на нем, мера $\mu = \mu(f;\sigma_1)$ на $X \times Y$, где $Y = f(X)$, является оптимальным решением $MKP(c;\sigma_1, f(\sigma_1))$.

Доказательство. Согласно теореме 3.1, оптимальность меры $\mu_k = \mu(f_k, \sigma_{1k})$ влечет за собой существование функции $u_k \in Q_0(\varphi_k)$, где

$$\varphi_k(x_k, z_k) = c_k(z_k, f_k(x_k)) - c_k(x_k, f_k(x_k)), \quad x_k, z_k \in X_k.$$

Положим $u(x) = u_1(x_1) + \cdots + u_m(x_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X$. Получаем для любых $x, z \in Z = \pi_1(\operatorname{spt}(\mu))$

$$u(x) - u(z) = u_1(x_1) - u_1(z_1) + \cdots + u_m(x_m) - u_m(z_m)$$

$$\leqslant \varphi_1(x_1,z_1) + \cdots + \varphi_m(x_m,z_m) = c(z, f(x)) - c(x, f(x)) = \varphi^\mu(x,z),$$

следовательно, $u \in Q_0(\varphi^\mu)$, и остается применить теорему 3.1.

Сочетание следствия 3.1 с результатами автора ([11]; см. также [13, 14]) об условиях непустоты $Q_0(\varphi)$ для $X \subset \mathbf{R}^n$ и произвольной гладкой функции φ на $X \times X$, обращающейся в нуль на диагонали, дает проверяемые условия оптимальности (как необходимые, так и достаточные) для гладких решений ЗМ с различными гладкими функциями стоимости; см. [18, 20]. Достаточные условия позволяют доказывать оптимальность конкретных отображений $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$, а необходимые – отсекать решения, не являющиеся оптимальными. В некоторых случаях необходимые условия смыкаются с достаточными. Общие теоремы такого рода см. в [20, Section 4]. В гладком случае возможно одно из двух: либо множество $Q_0(\varphi^\mu)$ пусто, либо оно состоит из единственной с точностью до постоянного слагаемого гладкой функции u, которая связана с функцией стоимости c и отображением $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ равенством $\nabla u(x) = -\nabla_x c(x, y)|_{y=f(x)}$; см. [20, Theorem 4.1]. Ниже приведены формулировки двух результатов (ср. [20, Theorems 5.1 and 5.2]), которыми мы воспользуемся в дальнейшем.

Теорема 3.2. *Пусть X и Y – ограниченные замкнутые области в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что функция $c(x, y) = \sum_1^n x_j b_j(y)$ и отображение $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ являются гладкими (C^2 и C^1 соответственно). Тогда*

I. *Если $\operatorname{spt}(\sigma_1) = X$ и мера $\mu(f; \sigma_1)$ есть оптимальное решение $MKP\,(c; \sigma_1,\, \sigma_2)$, то матрицы*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial b_i(f(x))}{\partial y_k} \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j} \right)_{ij}, \quad x \in X, \tag{3.4}$$

симметричны и отрицательно полуопределены.

II. *Если X выпукла и матрицы (3.4) симметричны и отрицательно полуопределены, то $\mu(f; \sigma_1)$ – оптимальное решение $MKP(c; \sigma_1, \sigma_2)$.*

Теорема 3.3. *Пусть X и Y – ограниченные замкнутые области в $\mathbf{R}^n$, h – гладкая (C^2) функция на $X - Y := \{x - y : x \in X, y \in Y\}$, $c(x, y) = h(x - y)$ и $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ – гладкое (C^1) отображение. Тогда*

I. *Если $\mu(f; \sigma_1)$ – оптимальное решение $MKP\ (c; \sigma_1, \sigma_2)$ и $\operatorname{spt}(\sigma_1) = X$, то матрицы*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 h(x - f(x))}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j} \right)_{ij}, \quad x \in X, \tag{3.5}$$

симметричны и положительно полуопределены.

II. *Если X выпукла, матрицы (3.5) симметричны и для любых $x, z \in X$ справедливо неравенство*

$$(\nabla h(z - f(z)) - \nabla h(z - f(x))) \cdot (z - x) \leqslant 0, \tag{3.6}$$

то $\mu(f; \sigma_1)$ – оптимальное решение $MKP(c; \sigma_1, \sigma_2)$.

4. Точные решения двумерной ЗМК. Приведенные выше результаты в ряде случаев позволяют находить оптимальные решения задач Монжа–Канторовича и Монжа. Ниже даны примеры точных (явных) оптимальных решений Монжа классической двумерной ЗМК. Во всех примерах X и Y – замкнутые ограниченные множества, σ_1 и σ_2 – меры Лебега на них, $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$, $\mathrm{spt}(\sigma_1) = X$.

Пример 1. Пусть X – произвольное замкнутое ограниченное множество положительной лебеговой меры, $Y = X + b$ – его сдвиг на фиксированный вектор b, $c(x, y) = \|x - y\|$. Покажем, что сдвиг $f(x) = x + b$ и мера $\mu = \mu(f; \sigma_1)$, сосредоточенная на его графике, являются оптимальными решениями ЗМ и ЗМК соответственно. Положим $u(x) = -\frac{b \cdot x}{\|b\|}$, $x \in X$. Для любых $x, z \in X$ имеем

$$\varphi^\mu(x, z) - u(x) + u(z) = \|z - x - b\| - \|b\| + \frac{b}{\|b\|} \cdot (z - x)$$

$$= \|z - x - b\| - \frac{(-b)}{\|b\|} \cdot (z - x - b) \geqslant 0,$$

и остается воспользоваться следствием 3.1.

Пример 2. Пусть X – выпуклая ограниченная замкнутая область, $Y = X + b$, $c(x, y) = h(x - y)$, где h – гладкая выпуклая функция на $X - Y := \{z = x - y : x \in X, y \in Y\}$. Из выпуклости h следует, что для сдвига $f(x) = x + b, x \in X$, матрицы (3.5) симметричны и для любых $x, z \in X$ выполнено неравенство (3.6); тогда по теореме 3.3 (II) f является оптимальным решением ЗМ, а мера $\mu = \mu(f; \sigma_1)$ – оптимальным решением ЗМК. Если к тому же h строго выпукла, то $\mu(f; \sigma_1)$ – единственное оптимальное решение ЗМК, а f – единственное $\pmod 0$ оптимальное решение ЗМ. Единственность здесь следует из теоремы 2.1.

Пример 3. Пусть X – выпуклая ограниченная замкнутая область, $Y = -X + b$, $c(x, y) = h(x - y)$, где h – гладкая вогнутая функция на $X - Y$. Тогда отображение $f(x) = -x + b$, $x \in X$, является оптимальным решением ЗМ, а мера $\mu = \mu(f;\sigma_1)$ – оптимальным решением ЗМК. Это вытекает из теоремы 3.3 (II). Если к тому же h строго вогнута, то $\mu(f;\sigma_1)$ – единственное оптимальное решение ЗМК, а f – единственное $\pmod 0$ оптимальное решение ЗМ. Единственность следует из теоремы 2.1.

Пример 4. Пусть X – ограниченная замкнутая область, $\sigma_1(X \setminus \operatorname{int} X) = 0$, $Y = f(X)$, $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ при $x = (x_1, x_2) \in X$, $c(x, y) = (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2$. Тогда мера $\mu = \mu(f;\sigma_1)$ – единственное оптимальное решение ЗМК, а f – единственное $\pmod 0$ оптимальное решение ЗМ. Оптимальность вытекает из следствия 3.3 (в случае выпуклой области X она следует также из теоремы 3.3), а единственность – из теоремы 2.2. При этом $Q_0(\varphi^\mu)$ состоит из единственной с точностью до постоянного слагаемого функции $u(x) = 2x_2^2$.

Пример 5. Пусть X, Y и f – такие же, как в примере 4, $c(x, y) = -x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3$. Тогда мера $\mu = \mu(f;\sigma_1)$ – единственное оптимальное решение ЗМК, а f – единственное $\pmod 0$ оптимальное решение ЗМ. Оптимальность вытекает из следствия 3.3 (в случае выпуклой области X она следует также из теоремы 3.2), а единственность – из теоремы 2.2 (легко видеть, что все предположения этой теоремы, включая условие (A_c), выполнены). При этом $Q_0(\varphi^\mu)$ состоит из единственной с точностью до постоянного слагаемого функции $u(x) = (x_1^4 + x_2^4)/4$.

Пример 6. Пусть X – выпуклая ограниченная замкнутая область, $Y = f(X)$, где $f(x) = Ax + b$, A – положительно определенная матрица с определителем $\det A = 1$, b – фиксированный вектор. Если $c(x, y) = \|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y)$, то $\mu(f;\sigma_1)$ – единственное оптимальное решение ЗМК, а f – единственное $\pmod 0$ оптимальное решение ЗМ. Оптимальность следует из теоремы 3.3, а единственность – из теоремы 2.1.

Пример 7. Пусть X – выпуклая ограниченная замкнутая область, $Y = f(X)$, где $f(x) = Ax + b$, A – отрицательно определенная матрица с определителем $\det A = 1$, b – фиксированный вектор. Если $c(x, y) = -\|x - y\|^2$, то $\mu(f;\sigma_1)$ – единственное оптимальное решение ЗМК, а f – единственное $\pmod 0$ оптимальное решение ЗМ. Оптимальность следует из теоремы 3.3, а единственность – из теоремы 2.1.

В оставшихся примерах 8–11 $c(x,y) = \|x-y\|$ при всех $x \in X$, $y \in Y$.

Пример 8. Рассмотрим два равных прямоугольника X и Y с вершинами $(2,1)$, $(2,-1)$, $(-2,-1)$, $(-2,1)$ и $(-1,2)$, $(1,2)$, $(1,-2)$, $(-1,-2)$ соответственно. Каждый из них разбивается на пять квадратов: $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5$, $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4 \cup Y_5$; см. рис. 1. Обозначим $e^1 = (1,0)$, $e^2 = (0,1)$ и определим отображения $f^i : X_i \to Y_i$, полагая $f^1(x) = x$, $f^2(x) = x - e^1 + e^2$, $f^3(x) = x - e^1 - e^2$, $f^4(x) = x + e^1 - e^2$, $f^5(x) = x + e^1 + e^2$. Таким образом, f^1 оставляет большой квадрат X_1 на месте, а каждое из остальных f^i перемещает соответствующий квадрат X_i как единое целое на расстояние $\sqrt{2}$ в одном из четырех диагональных направлений: X_2 на северо-запад, X_3 на юго-запад, X_4 на юго-восток, и X_5 на северо-восток. Получаем

$$\varphi_1(x,z) = \|z-x\| \quad \text{для} \quad x \in X_1 = X \cap Y,\ z \in X,$$

$$\varphi_2(x,z) = \|z - x + e^1 - e^2\| - \sqrt{2} \quad \text{для} \quad x \in X_2,\ z \in X,$$

$$\varphi_3(x,z) = \|z - x + e^1 + e^2\| - \sqrt{2} \quad \text{для} \quad x \in X_3,\ z \in X,$$

$$\varphi_4(x,z) = \|z - x - e^1 + e^2\| - \sqrt{2} \quad \text{для} \quad x \in X_4,\ z \in X,$$

$$\varphi_5(x,z) = \|z - x - e^1 - e^2\| - \sqrt{2} \quad \text{для} \quad x \in X_5,\ z \in X.$$

Положим $u(x) = (|x_2| - |x_1|)/\sqrt{2}$. Непосредственная, хотя и несколько громоздкая, проверка показывает, что $u(x) - u(z) \leqslant \varphi_i(x,z)$ для всех $x \in X_i$, $z \in X$, $i = 1,\dots,5$. (Подробности см. в [20, Example 6.6].) Тогда, согласно следствию 3.2, отображение $f : X \to Y$, совпадающее с f^i во внутренних точках множества X_i, $i = 1,\dots,5$, и определенное произвольно на $X \setminus (\operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2 \cup \operatorname{int} X_3 \cup \operatorname{int} X_4 \cup \operatorname{int} X_5)$, есть оптимальное решение задачи Монжа $MP(c;\sigma_1,\sigma_2)$, а мера $\mu(f;\sigma_1)$ – оптимальное решение задачи Монжа–Канторовича $MKP(c;\sigma_1,\sigma_2)$.

Пример 9. Рассмотрим два равносторонних треугольника с центром в нуле, X и $Y = -X$, с вершинами $(-1,-1/\sqrt{3})$, $(1,-1/\sqrt{3})$, $(0,2/\sqrt{3})$ и $(1,1/\sqrt{3})$, $(-1,1/\sqrt{3})$, $(0,-2/\sqrt{3})$ соответственно. Каждый из них разбивается на семь частей: $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5 \cup X_6 \cup X_7$, $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4 \cup Y_5 \cup Y_6 \cup Y_7$; см. рис. 2.

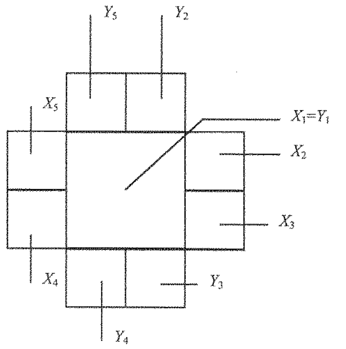

Рис. 1.

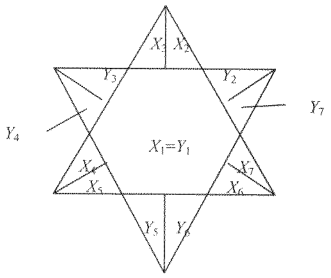

Рис. 2.

Определим отображения $f^i : X_i \to Y_i$, где f^1 – тождественное отображение, а все остальные f^i суть зеркальные отражения относительно одной из трех прямых, проходящих через начало координат и точки $(1/3, 1/\sqrt{3})$, $(2/3, 0)$, $(-1/3, 1/\sqrt{3})$ соответственно; для $x = (x_1, x_2) \in X_i$ имеем $f^1(x) = x$, $f^2(x_1, x_2) = f^5(x_1, x_2) = (-x_1/2+\sqrt{3}x_2/2, \sqrt{3}x_1/2+x_2/2)$, $f^3(x_1, x_2) = f^6(x_1, x_2) = (-x_1/2 - \sqrt{3}x_2/2, \sqrt{3}x_1/2 + x_2/2)$, $f^4(x_1, x_2) = f^7(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Используя следствие 3.2, а также теорему 1.1 из [20] и различные симметрии этого примера, легко показать, что отображение $f : X \to Y$, совпадающее с f^i во внутренних точках множества X_i и определенное произвольно на дополнении объединения множеств $\operatorname{int} X_i$, является оптимальным решением задачи Монжа $MP(c; \sigma_1, \sigma_2)$, а мера $\mu(f; \sigma_1)$ – оптимальным решением задачи Монжа–Канторовича $MKP(c; \sigma_1, \sigma_2)$. При этом соответствующая непрерывная функция $u(x)$ удовлетворяет в каждой из областей $\operatorname{int} X_i, i = 2, \ldots 7$, равенству $\nabla u(x) = -(x - f^i(x))/\|x - f^i(x)\|$.

Пример 10. Рассмотрим два квадрата с центром в нуле: X с вершинами $(1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1)$ и Y с вершинами $(0, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 0)$, полученный из X поворотом на угол $\pi/4$. Каждый из них разбивается на 9 частей: восьмиугольник $X_0 = Y_0 = X \cap Y$ и 8 треугольников (соответственно X_i и Y_i); см. рис. 3.

Рассмотрим отображения $f^i : X_i \to Y_i$, где f^0 – тождественное отображение, а все остальные f^i суть зеркальные отражения относительно одной из четырех прямых, проходящих через начало координат и точки пересечения сторон квадратов X и Y. Используя следствие 3.2, а также теорему 1.1 из [20] и симметрии, существующие в этом примере, легко показать, что отображение $f : X \to Y$, совпадающее с f^i на $\operatorname{int} X_i$ и определенное произвольно в остальных точках квадрата X, является оптимальным решением $MP(c; \sigma_1, \sigma_2)$, а мера $\mu(f; \sigma_1)$ – оптимальным решением $MKP(c; \sigma_1, \sigma_2)$. При этом соответствующая непрерывная функция $u(x)$ удовлетворяет в каждой из областей $\operatorname{int} X_i, i = 1, \ldots, 8$, равенству $\nabla u(x) = -(x - f^i(x))/\|x - f^i(x)\|$.

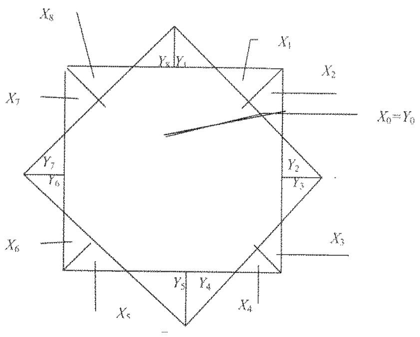

Рис. 3.

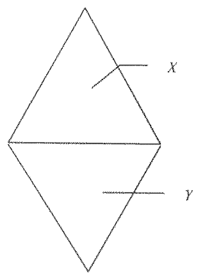

Рис. 4.

Пример 11. Рассмотрим два треугольника: X с вершинами $(-1, 0), (1, 0), (0, \sqrt{3})$ и $Y = -X$ с вершинами $(1, 0), (-1, 0), (0, -\sqrt{3})$; см. рис. 4. Определим отображение $f : X \to Y$, $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ для любого $x = (x_1, x_2) \in X$. Очевидно, $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$. Рассмотрим меру $\mu = \mu(f; \sigma_1)$. Получаем для $x = (x_1, x_2)$, $z = (z_1, z_2) \in X$

$$\varphi^\mu(x, z) = \|z - f(x)\| - \|x - f(x)\| = \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 + x_2)^2} - 2x_2.$$

Легко видеть, что функция $u(x) = -x_2$ принадлежит $Q_0(\varphi^\mu)$; тогда, в силу следствия 3.1, μ – оптимальное решение ЗМК, f – оптимальное решение ЗМ.

Замечания 1. Примеры 1–3 и 6 переносятся без изменений на множества в евклидовом пространстве произвольной размерности. Это относится и к примеру 7 с очевидной заменой равенства $\det A = 1$ равенством $\det A = (-1)^n$, где $n = \dim X$, которое, ввиду отрицательной определенности матрицы A, является необходимым условием сохранения меры.

2. Для функции стоимости $c(x,y) = \|x-y\|^2$ и прямоугольников X, Y из примера 8 единственное оптимальное решение ЗМК $\mu = \mu(f;\sigma_1)$ порождается единственным $\pmod 0$ оптимальным решением ЗМ $f(x_1,x_2) = (x_1/2, 2x_2)$. Это следует из примера 6. Аналогично, из примера 7 видно, что для $c(x,y) = -\|x-y\|^2$ и тех же X, Y единственное оптимальное решение ЗМК $\mu(f;\sigma_1)$ порождается единственным $\pmod 0$ оптимальным решением ЗМ $f(x_1,x_2) = (-x_1/2, -2x_2)$. Заметим также, что для $c(x,y) = -\|x-y\|^2$ и X, Y из примера 9 или 11 единственное оптимальное решение ЗМК $\mu = \mu(f;\sigma_1)$ порождается единственным $\pmod 0$ оптимальным решением ЗМ $f(x) = -x$. Это следует из примера 7.

3. Для функции стоимости $c(x,y) = \|x-y\|$ условие (A_c) не выполняется. В этом случае теоремы 2.1 и 2.2 неприменимы, и отображения f в примерах 1 и 8–11 – не единственные оптимальные решения ЗМ; ср. [20, Examples 6.2, 6.7].

Литература

1. L. Ambrosio, *Lecture notes on optimal transport problems.* — In: Mathematical Aspects of Evolving Interfaces, P. Colli and J. F. Rodrigues (eds.), Lecture Notes in Math. **1812** (2003), pp. 1–52.
2. L. Ambrosio, B. Kirchheim, A. Pratelli, *Existence of optimal transport maps for crystalline norms*, to appear.
3. Y. Brenier, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions.* — Comm. Pure. Appl. Math. **44** (1991), 375–417.
4. А. М. Вершик, *Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования.* — УМН **25**, вып. 5 (1970), 117–124.
5. W. Gangbo, R. J. McCann, *The geometry of optimal transportation.* — Acta Math. **177** (1966), 113–161.
6. Л. В. Канторович, *О перемещении масс.* — ДАН СССР **37**, вып. 7–8 (1942), 199–201.
7. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* Наука, М. (1984).
8. Л. В. Канторович, Г. Ш. Рубинштейн, *Об одном пространстве вполне аддитивных функций.* — Вестник ЛГУ. Сер. матем., мех. и астр. **13** (1958), вып. 7, 52–59.
9. L. Caffarelli, M. Feldman, R. J. McCann, *Constructing optimal maps for Monge's transport problem as a limit of strictly convex costs.* — J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 1–26.
10. В. Л. Левин, *Двойственность и аппроксимация в задаче о перемещении масс.* — В кн.: "Математическая экономика и функциональный анализ", Наука, М. (1974), сс. 94–108.

11. В. Л. Левин, *Формула для оптимального значения задачи Монжа–Канторовича с гладкой функцией стоимости и характеризация циклически монотонных отображений.* — Матем. сб. **181**, вып. 12 (1990), 1694–1709.
12. V. L. Levin, *General Monge–Kantorovich problem and its applications in measure theory and mathematical economics.* — In: Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics. A Collection of Papers Dedicated to the Memory of L. V. Kantorovich, Leifman L. J. (ed.), Oxford Univ. Press, New York–Oxford (1990), pp. 141–176.
13. V. L. Levin, *A superlinear multifunction arising in connection with mass transfer problems.* — Set-Valued Analysis **4** (1996), 41–65.
14. V. L. Levin, *Reduced cost functions and their applications.* — J. Math. Econ. **28** (1997), 155–186.
15. В. Л. Левин, *К теории двойственности для нетопологических вариантов задачи о перемещении масс.* — Матем. сб. **188**, вып. 4 (1997), 95–126.
16. V. L. Levin, *Abstract cyclical monotonicity and Monge solutions for the general Monge–Kantorovich problem.* — Set-Valued Analysis **7** (1999), 7–32.
17. V. L. Levin, *The Monge–Kantorovich problems and stochastic preference relations.* — Adv. Math. Econ. **3** (2001), 97–124.
18. В. Л. Левин, *Условия оптимальности для гладких решений Монжа задачи Монжа–Канторовича.* — Функц. анализ и его прил. **36**, вып. 2 (2002), 38–44.
19. В. Л. Левин, *Решение задач Монжа и Монжа–Канторовича. Теория и примеры.* — ДАН **388**, вып. 1 (2003), 7–10.
20. V. L. Levin, *Optimal solutions of the Monge problem.* — Adv. Math. Econ. **6** (2004), 85–122.
21. В. Л. Левин, А. А. Милютин, *Задача о перемещении масс с разрывной функцией стоимости и массовая постановка проблемы двойственности выпуклых экстремальных задач.* — УМН **34**, вып. 3 (1979), 3–68.
22. R. J. McCann, *Exact solutions to the transportation problem on the line.* — Proc. Royal Soc. London A **455** (1999), 1341–1380.
23. G. Monge, *Mémoire sur la théorie des déblais et de remblais.* — In: Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année (1781), pp. 666–704.
24. А. Ю. Плахов, *Задача Ньютона о теле наименьшего усредненного сопротивления.* — Матем. сб. **195**, вып. 7 (2004), 105–126.
25. А. Ю. Плахов, *Точные решения одномерной задачи Монжа–Канторовича.* — Матем. сб. **195**, вып. 9 (2004).
26. S. T. Rachev, L. Rüschendorf, *Mass Transportation Problems.* Vol. 1: *Theory*, Vol. 2: *Applications.* Springer, Berlin (1998).
27. L. Rüschendorf, S. T. Rachev, *A characterization of random variables with minimum L^2-distance.* — J. Multivariate Anal. **32** (1990), 48–54.
28. В. Н. Судаков, *Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений.* Труды МИАН **141** (1976).
29. N. S. Trudinger, X. J. Wang, *On the Monge mass transfer problem.* — Calc. Var. PDE **13** (2001), 19–31.
30. L. Uckelmann, *Optimal couplings between one-dimensional distributions.* — In: Distributions with Given Marginals and Moment Problems, V. Beneš, J. Štěpán

(eds.), Kluwer, Dordrecht (1997), pp. 275–281.

Levin V. L. Optimality conditions and exact solutions to the two-dimensional Monge–Kantorovich problem.

Optimality conditions are given in the Monge–Kantorovich and Monge problems, and exact solutions to several classic two-dimensional problems are obtained.

Центральный экономико-математический
институт РАН
Москва

Поступило 23 марта 2004 г.

E-mail: vllevin@mail.ru