Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 312, 2004 г.

В. Д. Матвеенко

ТЕОРИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА И ДИНАМИКА РОССИЙСКОЙ ЭКОНОМИКИ

На основе ранее построенной автором модели эндогенного роста изучается взаимосвязь темпа экономического роста и нормы инвестиций, а также связь этих показателей с институтами рынка труда. Исследуется вопрос, при каких условиях имеет место экономический рост, а при каких – спад. Показано, что повышение нормы инвестиций, вообще говоря, не является ни необходимым, ни достаточным условием увеличения темпа роста. Обсуждается динамика российской экономики и, в частности, трансформационный спад 1990-х годов и подъем экономики, последовавший за кризисом 1998 года.

1. В начале 1980-х годов автор построил модель экономической динамики с производственными фондами, различающимися по срокам службы, которая по сути представляла собой вариант с дискретным временем модели Л. В. Канторовича [1–3], но содержала много новых элементов. Также была построена агрегированная модель эндогенного роста, далее она называется fK моделью, в которой более наглядно демонстрировались те же механизмы роста, что и в дезагрегированной модели. Обе модели докладывались на семинаре Л. В. Канторовича, и по его предложению первые результаты были опубликованы автором в сборниках под редакцией Л. В. Канторовича ([4, 5]) и в статье, которую Леонид Витальевич представил в ДАН ([6]). См. также [7, 8].

Актуальность исследования fK модели не только не уменьшилась за последние двадцать лет, но даже возросла, эта модель может рассматриваться как обобщение популярной сейчас в мире AK модели. Последняя, по-видимому, впервые обсуждалась в [9], но привлекла особое внимание в 1990-х годах (см. [10]), что можно объяснить двумя обстоятельствами. Во-первых, AK модель является простой моделью эндогенного роста, а интерес к таким моделям стремительно возрос в последние десятилетия. Во-вторых, она является моделью типа Харрода–Домара. Основной вывод из таких моделей состоит в наличии положительной зависимости между нормой инвестиций и темпом экономического роста. На протяжении полувека подобные модели используются в практике международных финансовых организаций (см. [11]) и служат основой принимаемых решений о размере помощи развивающимся странам. Неудача многих попыток ускорить развитие посредством иностранной помощи вызвала новую волну интереса к теоретическим и эмпирическим исследованиям на основе моделей эндогенного роста.

Отличие в формулировке fK модели от других моделей экономического роста состоит в использовании производственной функции вида $Y = Kf(V)$, где Y – выпуск, K – капитал, V – заработная плата (потребление) на единицу капитала (или, в более общем смысле, оборотный капитал). Эта функция является обобщением функции $Y = AK$, $A = \mathrm{const}$, используемой в AK модели. Обоснование выбранного вида производственной функции на основе простых микроэкономических моделей проводится в разделах 3, 4. Более сложные микроэкономические модели такого рода рассматривались в [12, 13].

Заметим, что такой показатель как потребление на единицу капитала играет ключевую роль и в некоторых других моделях эндогенного роста, в частности, в модели Лукаса (см. [14–16]).

Несмотря на сравнительно небольшое отличие в формулировке, fK модель по своим свойствам существенно отличается как от традиционных неоклассических моделей роста, в которых стационарные траектории не различаются по долгосрочным темпам роста, а максимальный уровень выпуска достигается при минимальной заработной плате, так и от AK модели.

Наше исследование показывает, что fK модель свободна от недостатков AK модели, отмеченных в [10, 11]. Имеет место конвергенция. Оказывается, что положительная зависимость между нормой накопления и темпом роста имеется лишь в определенном диапазоне изменения нормы накопления, тогда как при больших значениях нормы накопления зависимость отрицательная; таким образом эмпирические результаты, ставящие под сомнение AK модель, не противоречат fK модели.

Исследуя целиком семейство траекторий fK модели (среди них, в частности, траектории с постоянной нормой накопления, оптимальные траектории), мы показываем, что экономический рост имеет место лишь при относительно невысокой норме накопления, в противном случае происходит спад. Иными словами, траекториями спада являются те, где заработная плата (оборотный капитал) на единицу основного производственного капитала слишком мала и те, где она "чрезмерно" велика.

Эти результаты показывают, в каких случаях следует ожидать неудачи попыток ускорить развитие путем увеличения инвестиций.

Также fK модель пригодна для объяснения динамики российской экономики, в частности, трансформационного спада 1990-х годов и экономического роста, последовавшего за кризисом 1998 года.

Термин "трансформационный спад" был введен Я. Корнаи для обозначения спада производства, последовавшего за либерализацией цен в Восточной Европе и бывшем СССР. Природа этого явления существенно отличается от циклического спада, который периодически возникает в странах с рыночной экономикой. Выдвигались различные причины трансформационного спада (см. обзор в [12]).

В западной литературе по теории экономического перехода преобладает точка зрения, согласно которой только новый сектор экономики может составить основу для роста экономики. (Под новым сектором понимают новые частные предприятия и индивидуальную занятость, а под старым сектором – государственные предприятия и приватизированные предприятия, не прошедшие реструктуризации, – подробнее см. [12]). Между тем, большой объем государственного сектора в России, очень медленная скорость реструктуризации формально приватизированных крупных предприятий и даже попытки ренационализации делают актуальным рассмотрение модели экономического развития на основе старого сектора.

2. Сформулируем fK модель:

$$\begin{aligned} Y_t &= K_t f(V_t), \quad t = 1, 2, \dots, \\ Y_t &= K_{t+1} V_{t+1} + I_{t+1}, \qquad (1) \\ K_{t+1} &= \nu K_t + I_{t+1}, \qquad (2) \\ I_{t+1} &\geqslant 0, \quad t = 0, 1, \dots . \end{aligned}$$

Здесь Y_t – выпуск в период времени t, K – капитал, V_t – заработная плата на единицу капитала, $C_t = K_t V_t$ – потребление (заработная плата), I_t – инвестиции, $\nu \in (0,1)$ – доля капитала, которая остается после износа. Предполагается, что функция f обладает стандартными свойствами:

$$f(0) = 0, \quad f'(.) > 0, \quad f''(.) < 0, \quad f'(0) > \nu, \quad \lim_{V \to \infty} f'(V) < \nu.$$

Условие неотрицательности $I_{t+1} \geqslant 0$ представляет собой условие необратимости инвестиций: капитал не может быть использован для потребления.

Лемма 1. *Условие необратимости инвестиций $I_t \geqslant 0$ в период t (где $t = 1, 2, \dots$) эквивалентно неравенству*

$$Y_{t-1} \geqslant \nu K_{t-1} V_t.$$

Доказательство. Поскольку

$$Y_{t-1} - K_t V_t = I_t = K_t - \nu K_{t-1},$$

то либо $I_t \geqslant 0$, $Y_{t-1} \geqslant K_t V_t \geqslant \nu K_{t-1} V_t$, либо $I_t < 0$, $Y_{t-1} < K_t V_t < \nu K_{t-1} V_t$, что и означает справедливость леммы.

Следствие 1. *Условие необратимости инвестиций $I_t \geqslant 0$ в период t (где $t = 2, 3, \dots$) в нетривиальном случае $K_{t-1} \geqslant 0$ эквивалентно неравенству $f(V_{t-1}) \geqslant \nu V_t$.*

3. Сформулируем две простые микроэкономические модели, приводящие к производственной функции вида $Y = Kf(V)$. В этом разделе рассматривается модель, относящаяся к российской экономике, а в следующем разделе – к экономике промышленно развитой страны.

Пусть индивид располагает временем T за период времени (например, месяц), которое он делит на время работы на фирме старого сектора L_1, время вторичной занятости L_2 и свободное время Le:

$$T = L_1 + L_3 + Le.$$

В простой модели оказывается, что все работники старого сектора являются вторично занятыми. В более подробной модели [13] показано, что сама возможность вторичной занятости оказывает существенное влияние на занятость и заработную плату в старом секторе, независимо от того, все ли индивиды используют эту возможность.

Выпуск на фирме старого сектора описывается производственной функцией $AF(K, NL_1)$, которая предполагается обладающей постоянной отдачей от масштаба и другими стандартными свойствами. Здесь N – число занятых на фирме.

В сфере вторичной занятости индивид может получить работу на любое время по почасовой ставке заработной платы W_2. (Заработная плата включает весь трудовой доход во всех разнообразных формах его выплаты, практикуемых в России).

Предпочтения индивида описываются функцией полезности $U(C, Le)$, обладающей стандартными свойствами. Здесь C – суммарная заработная плата, получаемая индивидом за период времени.

Фирма старого сектора предлагает индивиду фактическое время работы L^f (это гибкая величина, которая может не соответствовать рабочему времени, записанному в формальном контракте) и попериодную (помесячную) ставку заработной платы $\overline{W}_1$. Индивид выбирает одну из двух альтернатив: 1) принять предложение фирмы и, если ему это выгодно, совмещать работу на фирме со вторичной занятостью или 2) отклонить предложение фирмы и работать только в сфере вторичной занятости. Таким образом, индивид решает задачу

$$\max\Big\{\max_{L_2+Le=T-L^f} U(\overline{W}_1 + W_2L_2, Le), \max_{L_2+Le=T} U(W_2L_2, Le)\Big\}.$$

Легко видеть, что при $\overline{W}_1 < W_2L^f$ индивид предпочтет второй вариант, т.е. $L_1 = 0$, а при $\overline{W}_1 > W_2L^f$ – первый вариант, т.е. $L_1 = L^f$. В граничном случае мы полагаем, что принимается первый вариант.

Отсюда следует, что если фирма при каждом значении своих зарплатных издержек $KV = \overline{W}_1N$ максимизирует фактически получаемый труд NL^f, то она решает задачу

$$\max NL^f$$

при условии

$$W_2L^f \leqslant \frac{KV}{N}(= \overline{W}_1).$$

Очевидно, что в точке максимума

$$NL^f = \frac{KV}{W_2}.$$

Следовательно, неформально определяемая фактическая почасовая ставка заработная плата на фирме $W^f = \frac{KV}{NL^f}$ составляет W_2, т.е. равна альтернативной почасовой ставке, а выпуск равен

$$F(K, NL^f) = F\left(K, \frac{KV}{W_2}\right) = KF\left(1, \frac{V}{W_2}\right) = Kf(V),$$

где функция $f(V)$, построенная при фиксированном значении параметра W_2, обладает стандартными свойствами: $f(0) = 0$, $f'(.) > 0$, $f''(.) < 0$.

Таким образом, предлагаемая макроэкономическая модель подчеркивает роль, которую играют в российской экономике предложение труда, а в формировании предложения труда – возможности вторичной занятости. Эмпирическому исследованию влияния возможностей вторичной занятости на предложение труда на российских государственных предприятиях посвящена работа [13].

4. К аналогичному виду производственной функции приводит модель заработной платы, приводящей к эффективности (efficiency wages model) (см. [17]).

Пусть производственная функция $F(K, e(W)N)$ зависит от капитала K и эффективного труда $e(W)N$. Здесь $e(W)$ – усилия работника, зависящие от его ставки заработной платы W; N – труд (число работников или человеко-часов). Функция F имеет постоянную отдачу от масштаба и обладает другими стандартными свойствами. Относительно функции e предполагается, что $e(0) = 0$, $e'(.) > 0$, $e''(.) < 0$.

Фирма определяет ставку заработной платы $\widetilde{W}$, максимизируя эффективный труд $e(W)N$ при каждом значении зарплатных издержек $WN = KV$. Эта задача сводится к нахождению безусловного максимума функции $e(W)/W$. Таким образом, $\widetilde{W}$ однозначно определяется условием

$$\frac{e'(W)}{e(W)}W = 1$$

(оно означает, что эластичность функции $e(W)$ в точке $\widetilde{W}$ – единичная). При этом

$$F(K, e(\widetilde{W})N) = F\left(K, e(\widetilde{W})\frac{KV}{\widetilde{W}}\right) = KF\left(1, \frac{e(\widetilde{W})}{\widetilde{W}}V\right) = Kf(V).$$

Функция $f(V)$ обладает стандартными свойствами.

5. Будем рассматривать вектор $S_t = (K_t, Y_t)$ в качестве состояния модели в период t, а число V_t – в качестве управления. Пусть траектория $\{S_t\}$ с началом $S_0 = (K_0, Y_0)$ имеет управляющую последовательность $\{V_t\}_{t=1}^{\infty}$.

Богатством экономики в состоянии S_t назовем число

$$w(S_t) = \nu K_t + Y_t.$$

Видим, что

$$w(S_t) = (\nu + f(V_t))K_t = K_{t+1}(1 + V_{t+1}), \quad t = 1, 2, \ldots,$$

$$w(S_0) = \nu K_0 + Y_0 = K_1(1 + V_1).$$

Темпом роста богатства экономики является величина

$$\alpha(V_{t+1}) = \frac{w(S_{t+1})}{w(S_t)} = \frac{(\nu + f(V_{t+1}))K_{t+1}}{(1 + V_{t+1})K_{t+1}} = \frac{\nu + f(V_{t+1})}{1 + V_{t+1}}.$$

Опишем структуру траектории с началом $S_0 = (K_0, Y_0)$ и управляющей последовательностью $\{V_t\}_{t=1}^{\infty}$. Из (1), (2) следует, что

$$K_t f(V_t) - K_{t+1}V_{t+1} = K_{t+1} - \nu K_t.$$

Отсюда находим темп роста капитала

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{\nu + f(V_t)}{1 + V_{t+1}}$$

и темп роста выпуска

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{\nu + f(V_t)}{1 + V_{t+1}} \; \frac{f(V_{t+1})}{f(V_t)}. \tag{3}$$

Кроме того,

$$K_1 = \frac{w(S_0)}{1 + V_1}, \tag{4}$$

следовательно,

$$K_T = \frac{w(S_0)}{1+V_T}\alpha(V_1)\alpha(V_2)\ldots\alpha(V_{T-1}), \quad T \geqslant 2, \tag{5}$$

$$Y_T = K_T f(V_T), \quad T \geqslant 1.$$

Мы выразили траекторию через ее начальное состояние и управляющую последовательность.

В случае AK модели темпы роста богатства экономики, капитала и выпуска совпадают и равны $\frac{\nu+A}{1+V_{t+1}}$.

6. Укажем стационарные траектории модели. Обозначим через V^ν управление, для которого

$$f(V^\nu) = \nu V^\nu.$$

Предложение 1. *Для каждого управления V, такого, что $V \leqslant V^\nu$, траектория $\{S_t\}$, которая имеет начальное состояние $S_0 = K_0(1, f(V))$ и определяется постоянным управлением $V_t \equiv V$, является стационарной с темпом роста, равным $\alpha(V)$. Других стационарных траекторий в модели нет.*

Доказательство. Проверим, что в состоянии S_0 применимо управление V. Это возможно в том и только в том случае, если $Y_0 \geqslant \nu K_0 V$, что при $Y_0 = K_0(V)$ эквивалентно неравенству $f(V) \geqslant \nu V$, которое, в свою очередь, эквивалентно $V \leqslant V^\nu$.

Поскольку для любого периода t при $V_t = V$ состояние S_{t+1} пропорционально вектору $(1, f(V))$, описанная траектория существует и стационарна.

Докажем единственность. Если $\{S_t\}$ – стационарная траектория с темпом роста α, имеющая управляющую последовательность $\{V_t\}_{t=1}^{\infty}$, то, как видно из выражений для темпов роста капитала и выпуска, $V_t = \mathrm{const}$, $t = 1, 2, \ldots$. Кроме того,

$$\frac{K_1}{K_0} = \frac{Y_1}{Y_0} = \frac{K_1 f(V_1)}{Y_0},$$

отсюда $Y_0 = K_0 f(V_1)$.

Это означает, что все стационарные траектории имеют указанный выше вид. Предложение доказано.

На стационарной траектории с управлением V темпы роста богатства экономики, капитала и выпуска равны $\alpha(V)$. Максимальный темп роста на стационарной траектории достигается при управлении $\widetilde{V}$, которое представляет собой решение уравнения

$$f'(V) = \alpha(V).$$

Будем считать, что $\alpha(\widetilde{V}) > 1$. Нетрудно видеть, что в этом случае уравнение $\alpha(V) = 1$ имеет два корня; обозначим их V_{11} и V_{12} (считаем, что $V_{11} < V_{12}$). Выполняется неравенство $V_{12} < V^{\nu}$.

При $V \in (V_{11}, V_{12})$ справедливо неравенство $\alpha(V) > 1$, и на стационарных траекториях с управлением V имеет место рост. При $V \in (0, V_{11}) \cup (V_{12}, V^{\nu})$ имеет место неравенство $\alpha(V) < 1$, и на стационарных траекториях происходит спад.

Экономический смысл указанных условий состоит в том, что экономический спад имеет место на таких стационарных траекториях, где заработная плата на единице капитала (заработная плата "в цехе") V слишком мала и на таких, где V слишком велика.

Для нестационарных траекторий условие спада в период $t+1 > 1$ состоит в том, что

$$\frac{f(V_{t+1})}{1 + V_{t+1}} < \frac{f(V_t)}{\nu + f(V_t)}.$$

Это условие также имеет тот смысл, что заработная плата на единице капитала V_{t+1} относительно мала или относительно велика.

В частном случае AK модели, когда $f(V) \equiv A$, условие спада принимает вид

$$V_{t+1} > \nu - 1 + A,$$

т.е. спад в AK модели связан либо со слишком большой заработной платой на единицу капитала, либо со слишком малой производительностью капитала ($A < 1 - \nu$). Однако, причиной спада в AK модели, в отличие от fK модели, не может быть слишком малая зарплата на единице капитала.

7. Остановимся на связи темпа роста стационарной траектории и нормы накопления. Будем называть траектории с постоянной нормой накопления $s \in (0, 1)$ траекториями Солоу.

В fK модели

$$s_t = \frac{I_{t+1}}{Y_t} = \frac{K_{t+1} - \nu K_t}{Y_t} = \frac{\frac{K_{t+1}}{K_t} - \nu}{f(V_t)} = \frac{f(V_t) - \nu V_{t+1}}{(1 + V_{t+1}) f(V_t)}.$$

Следовательно, на траектории Солоу

$$V_{t+1} = \frac{f(V_t)(1-s)}{\nu + sf(V_t)} = \frac{1-s}{s + \frac{\nu}{f(V_t)}},$$

таким образом, на траектории Солоу имеет место монотонная сходимость последовательности управлений $\{V_t\}_{t=1}^{\infty}$ к стационарному управлению $V(s)$, которое является решением уравнения

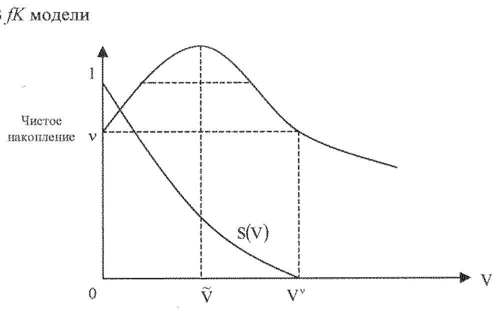
$$V = \frac{1-s}{s + \frac{\nu}{f(V)}}.$$

Легко убедиться, что функция $V(s)$ – убывающая. Обратная функция (норма накопления на стационарной траектории)

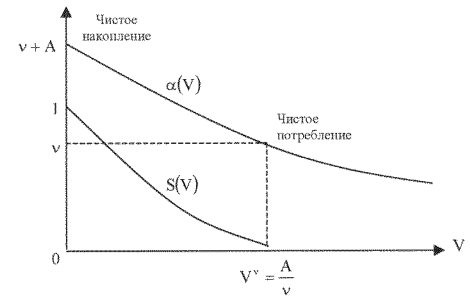
$$s(V) = \frac{f(V) - \nu V}{(1+V)f(V)}$$

также будет убывающей.

Отсюда и из свойств функции $\alpha(V)$ следует, что темп роста стационарной траектории или асимптотический темп роста траектории Солоу возрастает по s при $s \in (0, s(\widetilde{V}))$ и убывает при $s \in (s(\widetilde{V}), 1)$ (см. рис.).



В AK модели



Легко показать, что темп роста выпуска на траектории Солоу равен

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = (1-s)\frac{f(V_{t+1})}{V_{t+1}}.$$

Следовательно, последовательность темпов роста выпуска монотонно сходится к стационарному значению, оно равно $\nu + sf(V(S))$.

В AK модели на траектории Солоу

$$V_{t+1} = \frac{1-s}{s+\frac{\nu}{A}} = \mathrm{const}\,.$$

Следовательно, темп роста на траектории Солоу в AK модели постоянен и равен $sA+\nu$. Таким образом, в AK модели имеется положительная зависимость между нормой накопления и темпом роста. Именно предположение о такого рода зависимости лежит в основе методологии международных финансовых организаций (см. [11]). Отсутствие такой зависимости в fK модели представляется важной ее чертой.

Конвергенция в AK модели отсутствует – Барро и Сала-и-Мартин [10] отмечали это как основной эмпирический недостаток AK модели. fK модель свободна от этого недостатка.

Чтобы проверить выводы из AK модели эмпирически, Джонс [18] рассмотрел 15 стран OECD и пришел к выводу, что хотя нормы инвестиций s выросли в послевоенный период, но темпы роста не выросли. По его мнению, это свидетельствует о несостоятельности AK модели. Этот вывод оспаривала Мак-Греттен [19], рассмотревшая большую выборку стран за больший период времени. Заметим, что ни результаты Джонса, ни результаты

Мак-Греттен не противоречат fK модели, где нет положительной связи между темпом роста и нормой накопления.

8. Важную роль в дальнейшем играют траектории "чистого потребления", т.е. такие, на которых инвестиции равны нулю: $I_t = 0$, $t = 1, 2, \dots$.

Предложение 2. *Всякая траектория чистого потребления* $\{S_t\} = \{(K_t, Y_t)\}$ *сходится к стационарной траектории, определяемой управлением* V^ν, *точнее,*

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} \equiv \nu = \alpha(V^\nu), \quad \frac{Y_t}{K_t} \underset{t\to\infty}{\to} f(V^\nu).$$

Доказательство. Пусть $\{S_t\}$ – траектория чистого потребления, $\{V_t\}_{t=1}^\infty$ – ее управляющая последовательность. Тогда

$$K_{t+1} = \nu K_t, \quad t = 0, 1, \dots,$$

$$Y_t = K_t f(V_t) = K_{t+1} V_{t+1}, \quad t = 1, 2, \dots.$$

Отсюда

$$V_{t+1} = \frac{1}{\nu} f(V_t). \tag{6}$$

Из свойств функции f следует, что если $V < V^\nu$, то $\nu V < f(V) < \nu V^\nu$.

Значит, если $V_1 < V^\nu$ (что имеет место при $Y_0 < \nu K_0 V^\nu$), то по индукции

$$V_t < V_{t+1} < V^\nu, \quad t = 1, 2, \dots.$$

Таким образом, последовательность $\{V_t\}_{t=1}^\infty$ монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно, она имеет предел, который, как следует из (6), равен V^ν.

Аналогично, если $V_1 > V^\nu$, то последовательность $\{V_t\}_{t=1}^\infty$ сходится к V^ν, монотонно убывая.

Отсюда следуют требуемые утверждения. Предложение доказано.

Последовательность темпов роста богатства экономики на траектории чистого потребления сходится к $\alpha(V^\nu) = \nu < 1$; это значит, что всякая траектория чистого потребления сходится к началу координат.

Темп роста выпуска на траектории чистого потребления, как это следует из (3), (6), равен

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{f(V_{t+1})}{V_{t+1}}.$$

Следовательно, если $Y_0 < \nu K_0 V^\nu$, то темп роста выпуска на траектории чистого потребления убывает и сходится к ν.

9. Докажем, что V^ν является наибольшим возможным уровнем заработной платы на единицу капитала, который можно поддерживать на большом промежутке времени.

Предложение 3. *Пусть $\{S_t\}$ – произвольная траектория, $\{V_t\}_{t=1}^\infty$ – ее управляющая последовательность. Тогда если $V_1 < V^\nu$, то $V_t < V^\nu$ при всех $t = 2, 3, \ldots$. Если $V_1 > V^\nu$, то либо найдется такое натуральное число T, что $V_t < V^\nu$ при всех $t = T,\ T+1, \ldots$, либо $\{V_t\}_{t=1}^\infty$ монотонно убывает и $V_t \to V^\nu$ при $t \to +\infty$.*

Доказательство. Пусть $V_1 < V^\nu$. Тогда $f(V_1) < f(V^\nu) = \nu V$ и, следовательно, $Y_1 = K_1 f(V_1) < \nu K_1 V^\nu$. Отсюда $V_2 < V^\nu$. Утверждение следует отсюда по индукции.

Пусть $V_1 > V^\nu$; тогда $f(V_1) < \nu V_1$. С другой стороны, $f(V_1) \geqslant \nu V_2$, следовательно, $V_2 < V_1$. По индукции, либо найдется натуральное T, такое, что $V_T < V^\nu$, и мы приходим к уже разобранному случаю, либо последовательность $\{V_t\}_{t=1}^\infty$ монотонно убывает и ограничена снизу числом V^ν, тогда она имеет предел V и $V \geqslant V^\nu$. Поскольку $f(V_t) \geqslant \nu V_{t+1}$, выполняется также неравенство $f(V) \geqslant \nu V$, что эквивалентно $V \leqslant V^\nu$. Следовательно, $V = V^\nu$. Предложение доказано.

Следствие 2. *Если начальное состояние $S_0 = (K_0, Y_0)$ траектории $\{S_t\}$ таково, что $Y_0 < \nu K_0 V^\nu$, то*

$$Y_t < \nu K_t V^\nu, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Поскольку $Y_0 \geqslant \nu K_0 V_1$, выполняется неравенство $V_1 < V^\nu$, и, по предложению 3, $V_t < V^\nu$ при всех $t = 2, 3, \ldots$. Следовательно,

$$f(V_t) < f(V^\nu) = \nu V^\nu, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

откуда следует доказываемое неравенство.

10. Будем при произвольном фиксированном начальном состоянии $S_0 = (K_0, Y_0)$, где $Y_0 > 0$, рассматривать оптимальные траектории для нескольких альтернативных критериев оптимальности. В рассматриваемой модели, так же как и в модели с поколениями капитала, рассмотренной в [6], оказывается, что различные оптимальные траектории могут быть построены по простому общему правилу.

Каждому из рассматриваемых критериев оптимальности соответствует некоторое фиксированное "порождающее" управление, которое не зависит от начального состояния. Пусть V – порождающее управление и модель находится в состоянии $S_0 = (K_0, Y_0)$. Текущее управление V_{t+1} строится как

$$V_{t+1} = \min\left\{V, \frac{Y_1}{\nu K_t}\right\}.$$

Иными словами, если выпуск достаточно велик ($Y_t \geqslant \nu K_t V$), то применяется порождающее управление ($V_{t+1} = V$), а если выпуск недостаточен ($Y_t < \nu K_t V$), то инвестиции отсутствуют ($I_{t+1} = 0$), т.е. имеет место чистое потребление в период $t+1$. Траекторию, построенную таким образом, будем называть траекторией, порождаемой управлением V.

Позднее Ромер [20] рассматривал сходный способ описания отдельных оптимальных траекторий, тогда как у нас речь идет о целом семействе траекторий, соответствующих различным альтернативным критериям оптимальности и различным начальным состояниям. Возможность рассматривать одновременно многие альтернативные критерии оптимальности полезна при изучении переходной экономики, где критерий оптимальности траектории не определен окончательно и может изменяться. В частности, могут быть рассмотрены следующие типы оптимальных траекторий.

A. Траектории с пошагово оптимальным выпуском. Траектория переходит из текущего состояния S_t в состояние S_{t+1} с максимальным возможным выпуском Y_{t+1}. Можно убедиться, что этому критерию оптимальности соответствует порождающее управление $\overline{V}$, которое является точкой максимума функции

$$\frac{f(V)}{1+V}.$$

Б. Траектории с пошагово максимальной прибылью. Траектория переходит из текущего состояния S_t в состояние S_{t+1} с максимальной прибылью $Y_{t+1} - V_{t+1}K_{t+1}$. Соответствующее порождающее управление V^π удовлетворяет условию $f'(V^\pi) = 1$.

В. Эффективная траектория. Критерию эффективности соответствует порождающее управление $\widetilde{V}$, определенное в разделе 3. В разделе 8 будет показано, что эффективная траектория обладает весьма сильным свойством: если $\{\widetilde{S}_t\}$ – эффективная траектория с началом S_0, то для всякой другой траектории $\{S_t\}$ с тем же началом существует такое натуральное число T, что $\widetilde{S}_T \gg S_T$.

Г. Траектория с максимальным суммарным дисконтированным потреблением. При дисконтирующем множителе $\beta \in (0,1)$ отыскивается

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t C_{t+1} \tag{7}$$

по всем траекториям с началом S_0. При $\beta \geqslant 1/\alpha(\widetilde{V})$ ряд (7) расходится. При $\beta \in (0, 1/\alpha(\widetilde{V}))$ порождающее управление, которое будем обозначать $V(\beta)$, может быть найдено как решение уравнения

$$1 - \beta(\nu + f(V)) + \beta V f'(V) = 0 \tag{8}$$

(доказательство проводится в разделе 12). Заметим, что $V(\beta)$ – убывающая функция. При достаточно малых β, когда "общество нетерпеливо", справедливо неравенство $V(\beta) \geqslant V_{12}$, и на стационарной траектории, определяемой управлением $V(\beta)$, имеет место спад.

Траекторию с началом S_0, которая является решением задачи (7), будем называть β-оптимальной.

Пусть траектория порождается некоторым управлением V. Возможны три случая: 1) $V_t = V$ при всех t; траектория становится стационарной; 2) траектория является траекторией чистого потребления, ее характеризует предложение 2; 3) существует период времени $\bar{t}$, такой, что при $t < \bar{t}$ траектория является траекторией чистого потребления, а при $t \geqslant \bar{t}$ применяется управление V и траектория становится стационарной. В зависимости от начального состояния и порождающего управления V, возможна та или иная структура оптимальной траектории. Основные случаи перечислены в следующей таблице.

	$0 < V < V_{11}$	$V_{11} < V < V_{12}$	$V_{12} < V < V^{\nu}$	$V > V^{\nu}$
$Y_0 > \nu V K_0$	Пропорциональный спад	Пропорциональный рост	Пропорциональный спад	Отсутствие инвестиций и спад, начиная с $t = 2$
$Y_0 < \nu V K_0$	Отсутствие инвестиций, затем пропорциональный спад	Отсутствие инвестиций, затем пропорциональный рост	Отсутствие инвестиций, затем пропорциональный спад	Отсутствие инвестиций и спад

11. Проведем исследование структуры эффективных траекторий.

Теорема 1. *Для любого начального состояния S_0 существует единственная эффективная траектория. Она порождается управлением $\widetilde{V}$ и доминирует любую другую траекторию с тем же начальным состоянием S_0.*

Доказательство. 1. Пусть $Y_0 \geqslant v\widetilde{V}K_0$. Пусть $\{\widetilde{S}_t\}$ – траектория с началом S_0 и управляющей последовательностью $\{V_t \equiv \widetilde{V}\}_{t=1}^{\infty}$. (Такая траектория существует, поскольку $f(\widetilde{V}) > \nu\widetilde{V}$.) Пусть $\{S_t\}$ – другая траектория с тем же началом, $\{V_t\}$ – ее управляющая последовательность. Согласно (5),

$$\frac{K_T}{\widetilde{K}_T} = \frac{1+\widetilde{V}}{1+V_T}\,\frac{\alpha(V_1)}{\alpha(\widetilde{V})}\cdots\frac{\alpha(V_{T-1})}{\alpha(\widetilde{V})}, \tag{9}$$

$$\frac{Y_T}{\widetilde{Y}_T} = \frac{1+\widetilde{V}}{f(\widetilde{V})}\,\frac{\alpha(V_1)}{\alpha(\widetilde{V})}\cdots\frac{\alpha(V_{T-1})}{\alpha(\widetilde{V})}\,\frac{f(V_T)}{1+V_T}. \tag{10}$$

Возможны следующие подслучаи.

1.1. Последовательность $\{V_t\}$ содержит подпоследовательность $\{V_{ts}\}$, расходящуюся к $+\infty$.

1.2. Последовательность $\{V_t\}$ содержит подпоследовательность $\{V_{ts}\}$, сходящуюся к некоторому положительному числу V, где

1.2.1. $V \neq \widetilde{V}$;

1.2.2. $V = \widetilde{V}$.

В случаях 1.1 и 1.2.1 найдется натуральное $\overline{T}$, такое, что

$$\alpha(V_{ts}) < \text{const} < \alpha(\widetilde{V}) \quad \text{при} \quad t_s > \overline{T}.$$

Из (9), (10) следует, что

$$\frac{K_t}{\widetilde{K}_t} \to 0, \quad \frac{Y_t}{\widetilde{Y}_t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

В случае 1.2.2 $\alpha(V_t)/\alpha(\widetilde{V}) \leqslant 1$ при всех t и это неравенство строгое по меньшей мере для одного индекса t. Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K_t}{\widetilde{K}_t} < 1, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{Y_t}{\widetilde{Y}_t} < 1.$$

Во всех этих случаях $S_t \ll \widetilde{S}_t$ для достаточно больших номеров t, значит, $\{\widetilde{S}_t\}$ эффективна.

2. Пусть теперь $Y_0 < \nu\widetilde{V}K_0$. Воспользуемся следующим вспомогательным утверждением.

Лемма 2. *Пусть состояние $S_0 = (K_0, Y_0)$ таково, что $Y_0 \leqslant \nu\widetilde{V}K_0$. Тогда в период t максимальное потребление C_1 и максимальное богатство экономики $w(S_1)$ достигаются при $I_1 = 0$ (т.е. при управлении $\overline{V}_1 = Y_0/\nu K_0$).*

Доказательство. Очевидно, что максимум C_1 достигается при $I_1 = 0$.

При $I_1 \geqslant 0$ богатство экономики составляет

$$\nu K_1 + Y_1 = \nu^2 K_0 + \nu I_1 + (\nu K_0 + I_1) f\left(\frac{Y_0 - I_1}{\nu K_0 + I_1}\right).$$

Максимум этой функции достигается в точке $I_1 = 0$ в том и только в том случае, если в этой точке производная по I_1 неположительна, т.е. если

$$\nu + f\left(\frac{Y_0}{\nu K_0}\right) - f'\left(\frac{Y_0}{\nu K_0}\right)\frac{\nu K_0 + Y_0}{\nu K_0} \leqslant 0,$$

или, что то же самое,

$$f'(\overline{V}_1) \geqslant \alpha(\overline{V}_1).$$

С учетом свойств функции f, последнее неравенство эквивалентно неравенству $\overline{V}_1 \leqslant \widetilde{V}$, совпадающему с условием леммы. Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что при $Y_0 \leqslant \nu\widetilde{V}K_0$ эффективная траектория совпадает на своем начальном участке с траекторией чистого потребления. Поскольку, в силу предложения 2, на траектории чистого потребления $Y_1/K_t \underset{t\to\infty}{\to} \nu V^\nu$ и $V^\nu > \widetilde{V}$, эффективная траектория в некоторый период времени T удовлетворяет неравенству $Y_T \geqslant \nu K_T \widetilde{V}$. Далее реализуется случай 1, рассмотренный выше. Теорема доказана.

12. Проведем исследование структуры β-оптимальных траекторий. Будем считать, что

$$\beta < \frac{1}{\alpha(\widetilde{V})} \tag{11}$$

(при этом предположении задача (7) корректно поставлена).

Пусть $V(\beta)$ – решение уравнения (8).

Лемма 3. *При условии* (11) *имеет место неравенство*

$$V(\beta) > \widetilde{V}. \tag{12}$$

Доказательство. Предположим противное: $V(\beta) \leqslant \widetilde{V}$. Тогда $f'(V(\beta)) \geqslant \alpha(V(\beta))$, и из (8) следует, что

$$1 - \beta\alpha(V(\beta))(1 + V(\beta)) + \beta V(\beta)\alpha(V(\beta)) \leqslant 0,$$

т.е. $\beta\alpha(V(\beta)) > 1$. Но, с другой стороны, $\beta\alpha(V(\beta)) \leqslant \beta\alpha(\widetilde{V}) < 1$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Будем также считать, что дисконтирующий множитель не слишком мал, а именно, выполняется неравенство

$$f(\widetilde{V}) > \nu V(\beta), \tag{13}$$

которое эквивалентно следующему:

$$\beta > \frac{1}{\nu + f\Big(\frac{f(\widetilde{V})}{\nu}\Big) - \frac{f(\widetilde{V})}{\nu} f'\Big(\frac{f(\widetilde{V})}{\nu}\Big)}. \tag{14}$$

(Действительно, уравнение (8) можно записать в виде

$$\beta = \frac{1}{\nu + f(V(\beta)) - V(\beta)f'(V(\beta))}.$$

Поскольку $\nu + f(V) - Vf'(V)$ – возрастающая функция, неравенства (13) и (14) эквивалентны.)

Из (12), (13) следует, что

$$f(V(\beta)) > \nu V(\beta), \tag{15}$$

т.е.

$$V(\beta) < V^{\nu}.$$

Предложение 4. *При условиях* (11), (13), *если начальное состояние* $S_0 = (K_0, Y_0)$ *таково, что* $Y_0 \geqslant \nu K_0 V(\beta)$, *то* β*-оптимальная траектория с началом* S_0 *определяется управлением* $V(\beta)$ *(т.е.* $V_t \equiv V(\beta)$, $t = 1, 2, \ldots$*).*

Доказательство. Согласно (4), (5),

$$C_1 = K_1 V_1 = w(S_0) \frac{V_1}{1 + V_1},$$

$$C_t = K_t V_t = w(S_0) \alpha(V_1) \ldots \alpha(V_{t-1}) \frac{V_t}{1 + V_t}, \quad t > 1.$$

Задача (7) сводится к нахождению

$$\sigma(\beta) = \max \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{V_1}{1 + V_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{V_k}{1 + V_k} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \beta \alpha(V_i) \right) \right\}$$

при условии

$$f(V_t) \geqslant \nu V_{t+1}, \quad t \geqslant 1.$$

Ясно, что

$$\sigma(\beta) \leqslant \max_{0 \leqslant V \leqslant V^{\nu}} g_{\beta}(V), \tag{16}$$

где

$$g_{\beta}(V) = \frac{V}{1 + V} \sum_{i=0}^{\infty} (\beta \alpha(V))^i = \frac{V}{(1 + V)(1 - \beta \alpha(V))}.$$

При фиксированном β функция $g_{\beta}(V)$ определена при $V \in [0, +\infty)$ и строго вогнута. Она имеет единственную точку максимума $V(\beta)$; последняя удовлетворяет уравнению (8).

В силу (15), неравенство (16) выполняется как равенство.

Если начальное состояние $S_0 = (K_0, Y_0)$ таково, что $Y_0 \geqslant \nu K_0 V(\beta)$, то применимо управление $V(\beta)$, и β-оптимальная траектория определяется управляющей последовательностью $\{V_t \equiv V(\beta)\}_{t=1}^{\infty}$. Предложение доказано.

Пусть теперь начальное состояние $S_0 = (K_0, Y_0)$ таково, что

$$\widetilde{V} \leqslant \frac{Y_0}{\nu K_0} < V(\beta). \tag{17}$$

В этом случае невозможно использовать непосредственно управление $V(\beta)$ на первом шаге, но это можно сделать на втором шаге, поскольку, с учетом (13),

$$f\left(\frac{Y_0}{\nu K_0}\right) > \nu V(\beta).$$

Предложение 5. *В случае* (17) *на β-оптимальной траектории* $I_1 = 0$.

Доказательство. Управление $V_1 < \widetilde{V}$ невозможно на β-оптимальной траектории. Действительно, в противном случае, уменьшая I_1, можно увеличить как потребление, так и богатство экономики, поскольку

$$\frac{dw}{dI_1}(S_1) = (1 + V_1)[\alpha(V_1) - f'(V_1)] < 0$$

при $V_1 < \widetilde{V}$.

Таким образом, $V_1 \geqslant \widetilde{V}$. Отсюда и из (13) вытекает, что $f(V_1) > \nu V(\beta)$, и, значит, по предложению 4, $V_2 = V(\beta)$. Следовательно, значение задачи (7) равно

$$\mathbf{V}_\beta(S_0) = C_1 + \beta \mathbf{V}_\beta(S_1) =$$
$$= Y_0 - I_1 + \beta(\nu K_0 + I_1)\left(\nu + f\left(\frac{Y_0 - I_1}{\nu K_0 + I_1}\right)\right)\frac{1}{1 - \beta f'(V(\beta))}.$$

Убеждаемся, что при $V_1 < V(\beta)$ выполняется неравенство $d\mathbf{V}_\beta(S_0)/dI_1 < 0$. Следовательно, максимум значения достигается при $I_1 = 0$. Предложение доказано.

Теорема 2. *При условиях* (11), (13) *всякая β-оптимальная траектория порождается, а начиная с некоторого периода времени, определяется управлением $V(\beta)$.*

Доказательство. Если на β-оптимальной траектории в некоторый период времени t выполняется неравенство $Y_t < \nu K_t V(\beta)$, то, как следует из леммы 2 и предложения 5, $I_{t+1} = 0$.

Значит, с учетом предложения 2, для любой β-оптимальной траектории $\{S_t\}$ найдется такой период T, что $Y_T \geqslant \nu K_T V(\beta)$. Тогда, по предложению 4, управляющая последовательность $\{V_t\}$ траектории $\{S_t\}$ такова, что $V_t = V(\beta)$ при всех $t \geqslant T+1$. Теорема доказана.

Из (8) следует, что $V(\beta) > \widetilde{V}$, так что эффективная траектория не является решением никакой корректно поставленной задачи (7). Каждому управлению V, где $V > \widetilde{V}$, соответствует дисконтирующий множитель

$$\beta(V) = \frac{1}{\nu + f(V) - Vf'(V)},$$

при котором V является порождающим управлением для задачи (7). Функция $\beta(V)$ при $V \in (\widetilde{V}, +\infty)$ убывает.

Легко проверить, что если последовательность дисконтирующих множителей $\{\beta_k\}$ такова, что $\beta_k \in (0, 1/\alpha(\widetilde{V}))$ и $\beta_k \to 1/\alpha(\widetilde{V})$ при $k \to \infty$, то $V(\beta_k) \to \widetilde{V}$ при $k \to \infty$.

13. Посмотрим, какое влияние оказывают изменения в эндогенных параметрах W_2 (см. раздел 3) и β на порождающее управление $V(\beta)$ и на характер β-оптимальных траекторий.

Пусть увеличивается альтернативная ставка заработной платы W_2. В таком случае, как видно из раздела 10, $f(V)$ уменьшается для каждого значения V, и соответствующий темп роста $\alpha(V)$ падает.

В частности, если порождающее управление V не изменяется и темп роста $\alpha(V)$ до повышения W_2 был больше единицы, он, при достаточно большом W_2, становится меньше единицы, т.е. экономический рост сменяется спадом. Наоборот, уменьшение W_2 приводит к увеличению темпа роста $\alpha(V)$ для каждого значения V.

Пусть уменьшается дисконтирующий множитель β. Тогда, как отмечалось в разделе 7, управление $V(\beta)$, порождающее β-оптимальные траектории, увеличивается. В частности, неравенство $V(\beta) < V_{12}$ может смениться на $V(\beta) > V_{12}$; в таком случае долгосрочный экономический рост сменяется спадом.

В России, начиная с 1960-х годов, при росте средней реальной заработной платы (медленном до 1987 г., а затем – резком) происходило снижение фондоотдачи, которое было загадкой для советских экономистов. Используя fK модель, можно объяснить снижение темпа роста выпуска, происходившее до 1987 года, медленным увеличением параметра W^f (см. раздел 3) в результате роста требований работников, а с 1987 г. – ростом W^f в результате появления и развития нового сектора (сначала в форме кооперативов); с этого момента параметр $W^f = W_2$ стал альтернативной ставкой заработной платы (reservation wage) в прямом смысле слова. Модель допускает различные темпы роста в зависимости от величины параметра W^f.

Динамика российской экономики последних 15 лет может быть объяснена на основе этой модели следующим образом. Появление с конца 1980-х годов кооперативов, а затем частных фирм, и возможностей индивидуального предпринимательства означало увеличение альтернативной ставки заработной платы W_2. Это привело к уменьшению темпа роста в старом секторе $\alpha(V)$: экономический рост сменился спадом. Развитие нового сектора не компенсировало спад в старом секторе, поскольку новый сектор оказался в целом низкопродуктивным: целью многих фирм в новом секторе было только текущее благосостояние их владельцев, кроме того, большинство фирм функционировало в очень неблагоприятной среде.

Кризис 1998 года привел к снижению альтернативной ставки заработной платы W_2, что и было, с точки зрения модели, основной причиной увеличения темпа роста.

Литература

1. Л. В. Канторович, Л. И. Горьков, *О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели.* — ДАН **129**, No. 4 (1959), 732–735.
2. Л. В. Канторович, В. И. Жиянов, *Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса.* — ДАН **211**, No. 6 (1973), 1280–1283.
3. Л. В. Канторович, В. И. Жиянов, А. Г. Хованский, *Анализ динамики экономических показателей на основе однопродуктовых динамических моделей.* — В кн.: Сб. трудов ВНИИСИ, вып. 9 (1978), сс. 5–25.
4. В. Д. Матвеенко, *Бесконечно-оптимальные траектории в дискретных однопродуктовых моделях экономической динамики.* — В кн.: Математические модели и статистический анализ научно-технического прогресса (отв. ред. Л. В. Канторович). Сб. трудов ВНИИСИ, вып. 8 (1982), сс. 37–43.
5. В. Д. Матвеенко, *Оптимальные значения макроэкономических показателей в однопродуктовых динамических моделях.* — В кн.: Оптимальные

модели в системном анализе (отв. ред. Л. В. Канторович). Сб. трудов ВНИИСИ, вып. 9 (1983), сс. 58–65.
6. В. Д. Матвеенко, *Оптимальные траектории в дискретной однопродуктовой модели экономической динамики.* — ДАН **277**, No. 3 (1984), 534–537.
7. В. Д. Матвеенко, *Порождающие управления в однопродуктовой модели экономической динамики.* — В кн.: Моделирование и оптимизация в задачах планирования и управления. Математические исследования, вып. 87, Штиинца, Кишинев (1986), 111–115.
8. А. М. Рубинов, К. Ю. Борисов, В. Н. Десницкая, В. Д. Матвеенко, *Оптимальное управление в агрегированных моделях экономики.* Наука, Ленинград (1991).
9. M. Frankel, *The production function in allocation and growth: a synthesis.* — American Economic Review **52**, No. 5 (1962), 995–1022.
10. R. J. Barro, X. Sala-i-Martin, *Economic Growth.* McGraw-Hill, New York (1995).
11. W. Easterley, *The Elusive Quest for Growth: Economist's Adventures and Misadventures in the Tropics.* MIT Press, Cambridge, London (2002).
12. В. Д. Матвеенко, Е. Вострокнутова, М. Буев, *Трансформационный спад и перспективы роста в России.* — Научные доклады, No. 3, Российская программа экономических исследований EERC, Москва (1998).
13. В. Д. Матвеенко, П. А. Савельев, *Влияние сторонних возможностей занятых на предложение труда в России.* — В кн.: Экономические исследования: теория и приложения, вып. 2, Европейский университет в С.-Петербурге, Санкт-Петербург (2002), сс. 193–228.
14. R. Lucas, *On the mechanics of economic development.* — J. of Monetary Economics **22** (1988), 3–42.
15. D. Xie, *Divergence in economic performance: transitional dynamics with multiple equilibria.* — J. of Economic Theory **63** (1994), 97–112.
16. В. Д. Матвеенко, А. М. Гуревич, *Модели эндогенного роста, их развитие и перспективы.* — В кн.: Экономические исследования: теория и приложения, вып. 1, Европейский университет в Санкт-Петербурге, Санкт-Петербург (2000), сс. 260–295.
17. O. J. Blanchard, S. Fisher, *Lectures on macroeconomics.* MIT Press, Cambridge (Mass.), London (1989).
18. C. J. Jones, *Time series tests of endogenous growth models.* — Quarterly J. of Economics **110**, No. 2 (1995), 495–525.
19. E. R. McGrattan, *A defense of AK growth models.* — Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review **22**, No. 4 (1998), 13–27.
20. P. Romer, *Increasing returns and long-run growth.* J. of Political Economy **94** (1986), 1002–1037.

Matveenko V. D. Growth theory and dynamics of the Russian economy.

Using the endogenous growth model earlier proposed by the author, we study the interrelation between the growth rate and the investment rate as well as the connection of these variables with labor market institutions of the economy. The conditions leading to economic growth and to recession are found. It is shown that an increase in the investment rate is, generally speaking, neither necessary nor sufficient condition for an increase of the growth rate. Using the model, we discuss the dynamics of the Russian economy, in particular, the transformational recession of the 1990s and the economic recovery that followed the 1998 crisis.

Санкт-Петербургский
экономико-математический
институт РАН,
Европейский университет
в С.-Петербурге
E-mail: matve@eu.spb.ru

Поступило 28 апреля 2004 г.