Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 312, 2004 г.

А. Соболевский, У. Фриш

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ТРАНСПОРТА К РЕКОНСТРУКЦИИ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

Современное распределение массы во Вселенной, восстанавливаемое по каталогам положений галактик (см., например, [10]), является весьма неоднородным. В соответствии с общепринятой картиной эволюции Вселенной (см., например, [9]), это распределение возникло из малых флуктуаций первоначального, почти равномерного поля плотности, которые росли под воздействием поля своей собственной гравитации. Реконструкции процесса роста крупномасштабной структуры посвящена значительная литература (см., например, библиографию в [4]).

Поставим задачу реконструкции как обратную: по заданной карте современного распределения плотности в конечной, но достаточно большой окрестности наблюдателя восстановить, насколько это возможно, прошлую динамику вещества, находящегося в этой окрестности.

В отсутствие информации о космологическом поле скоростей такая детерминистская реконструкция кажется неосуществимой. Однако на ранней, линейной стадии эволюции растущая мода поля первоначальных флуктуаций плотности связана с потенциальным полем пекулярных скоростей. Поэтому число неизвестных (одно скалярное поле первоначального потенциала скорости) совпадает с числом условий (одно скалярное поле современного распределения плотности), и реконструкция становится принципиально возможной.

Уравнения динамики. Напомним, что Вселенная претерпевает однородное расширение, и истинное положение $\mathbf{r}$ какого-либо

Настоящее исследование проводилось при поддержке Министерства образования Франции и французской Национальной программы по космологии. Работа А.С. поддержана грантом РФФИ 02–01–01062. Авторы приносят благодарность организаторам конференции, посвященной памяти Л. В. Канторовича.

элемента массы связано с его положением $\mathbf{x}$ в системе координат, сопутствующей расширению, соотношением $\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}$. Здесь $a(t)$ — возрастающий масштабный фактор, который можно найти из уравнений Фридмана (подробнее см., например, [4, Приложение A]). Допустим, что элемент массы сохраняет свое положение $\mathbf{x}$ в сопутствующих координатах. Тогда его истинная скорость равна $d\mathbf{r}/dt = (da(t)/dt)\mathbf{x} = H(t)\mathbf{r}$, где $H(t) = (da/dt)/a$ есть параметр Хаббла. Если элемент массы смещается в сопутствующих координатах (например, из-за притяжения соседних элементов), его истинная скорость будет равна $\mathbf{u} = H(t)\mathbf{r} + a(t)\mathbf{v}$, где величина $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ называется пекулярной скоростью этого элемента массы.

В космологии ранней Вселенной важную роль играет также фактор роста линейных возмущений $D(t)$, получаемый путем линеаризации динамики в окрестности первоначального квазиравномерного распределения массы. Этот фактор описывает эволюцию контраста плотности, дивергенции поля скорости, смещений элементов массы из исходных положений и др. Удобно поэтому сделать нелинейную замену временно́й переменной $\tau = D(t)$, выбирая в качестве нового «времени» сам фактор роста.

Большинство массы во Вселенной находится в форме бесстолкновительного скрытого вещества (dark matter). В сопутствующих координатах и новом времени эйлерово уравнение движения этой среды принимает вид

$$\partial_\tau \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{v} = -\frac{3}{2\tau}(\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathrm{g}}), \tag{1}$$

где $\varphi_{\mathrm{g}}(\mathbf{x}, \tau)$ определяется уравнениями неразрывности и Пуассона:

$$\partial_\tau \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \qquad \nabla^2_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathrm{g}} = \tfrac{1}{\tau}(\rho - 1). \tag{2}$$

Слагаемое $-(3/2\tau)\mathbf{v}$ в правой части уравнения (1) описывает «хаббловское трение», возникающее при переходе в сопутствующую систему отсчета, в которой возрастающий масштабный фактор приводит к кажущемуся убыванию пекулярных скоростей.

Заметим, что в уравнениях движения новая переменная времени τ присутствует в знаменателях. Чтобы избежать особенностей в начальный момент времени, следует потребовать, чтобы $\mathbf{v}_{\mathrm{in}}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}\varphi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{g}} = 0$ и $\rho_{\mathrm{in}}(\mathbf{x}) = 1$.

Приближение Зельдовича и уравнение Монжа–Ампера. Задачу реконструкции можно решать непосредственно в терминах уравнений Эйлера–Пуассона [7]. Однако она существенно упрощается при использовании приближения, предложенного Я. Б. Зельдовичем [11], которым мы и ограничимся в данной статье. Поскольку хаббловское трение и гравитационная сила точно уравновешивают друг друга при $\tau = 0$, при малых временах они по-прежнему будут приближенно сокращаться. В приближении Зельдовича принимается, что эти два члена просто отсутствуют. Различные тесты показывают, что это приближение хорошо работает не только при самых малых временах, но и на умеренно нелинейной стадии, так что получаемые результаты сохраняют практическую ценность.

В приближении Зельдовича уравнение (1) заменяется на уравнение

$$\partial_\tau \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{v} = 0. \tag{3}$$

Лагранжево отображение из первоначального положения $\mathbf{q}$ элемента массы в сопутствующих координатах (при $\tau = 0$) в современное положение $\mathbf{x}$ (при $\tau = \tau_0$) выражается формулами $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} + \tau_0 \mathbf{v}_{\mathrm{in}}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} - \tau_0 \nabla_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{in}}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} \left(|\mathbf{q}|^2/2 - \tau_0 \varphi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{in}}(\mathbf{q})\right)$, т.е. градиентом потенциала $\Phi(\mathbf{q}) = |\mathbf{q}|^2/2 - \tau_0 \varphi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{in}}(\mathbf{q})$.

Пока потенциал Φ сохраняет выпуклость, отображение $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}$ остается обратимым. Физически выпуклость означает отсутствие многопотоковости (наличия в одной пространственно-временной точке нескольких отдельных потоков вещества). В космологической литературе потенциальность лагранжева отображения была впервые отмечена в работе [1].

Потенциал лагранжева отображения и его преобразование Лежандра должны удовлетворять паре уравнений Монжа–Ампера. Действительно, закон сохранения массы в терминах якобиана отображения можно записать в виде $\det \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{x} = 1/\rho_0(\mathbf{x}(\mathbf{q}))$, поскольку в наших обозначениях первоначальное квазиоднородное распределение массы имеет единичную плотность. С учетом потенциальности это равенство дает

$$\det(\nabla_{q_i} \nabla_{q_j} \Phi(\mathbf{q})) = \left(\rho_0\left(\nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q})\right)\right)^{-1}. \tag{4}$$

Для потенциала обратного лагранжева отображения $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ получается уравнение Монжа–Ампера более простого вида. Действительно, обращение $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ отображения $\mathbf{x}(\mathbf{q})$, имеющего выпуклый потенциал $\Phi(\mathbf{q})$, само имеет выпуклый потенциал $\Theta(\mathbf{x})$, причем оба потенциала сопряжены преобразованием Лежандра, а условие сохранения массы приобретает вид

$$\det(\nabla_{x_i}\nabla_{x_j}\Theta(\mathbf{x})) = \rho_0(\mathbf{x}). \tag{5}$$

Поэтому в рамках приближения Зельдовича реконструкция лагранжева отображения между первоначальными и современными положениями элементов массы сводится к решению уравнения Монжа–Ампера (4) или (5) для заданного поля плотности $\rho_0(\mathbf{x})$.

Вариационная формулировка. В работах [6] и [4] для решения задачи реконструкции предложен метод МАК («Монж, Ампер, Канторович»), основанный на следующей переформулировке условия (5): потенциальное отображение $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}}\Theta(\mathbf{q})$, переводящее распределение массы $\rho_{\mathrm{rmin}} = 1$ в $\rho_0(\mathbf{x})$, минимизирует функционал

$$I = \int\limits_{D_{\mathrm{in}}} \frac{1}{2}|\mathbf{x}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}|^2 \,\mathrm{d}^3\mathbf{q} = \int\limits_{D_0} \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})|^2 \rho_0(\mathbf{x})\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{6}$$

при условии $\rho_0(\mathbf{x}(\mathbf{q}))\,|\det \nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{x}(\mathbf{q})| = \rho_{\mathrm{rmin}} = 1$.

Данной вариационной формулировке, принадлежащей Я. Бренье [3], можно дать следующее эвристическое объяснение. Обозначим поле смещений через $\xi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})$. Первая вариация функционала I имеет вид $\delta I = \int \xi(\mathbf{x}) \cdot (\rho_0(\mathbf{x})\,\delta\xi(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}$ и совершается при условии сохранения современного распределения плотности $\rho_0(\mathbf{x})$: $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho_0(\mathbf{x})\,\delta\xi(\mathbf{x})) = 0$. Обращение в нуль вариации δI тем самым означает, что поле смещений $\xi(\mathbf{x})$ должно быть ортогонально (в смысле функционального скалярного произведения в L_2) любому бездивергентному векторному полю, а значит, обязано быть потенциальным, так что $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \xi(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}\Theta(\mathbf{x})$. Кроме того, если бы потенциал $\Theta(\mathbf{x})$ оказался невыпуклым, возникла бы многопотоковость, нарушающая оптимальность лагранжева отображения $\mathbf{q}(\mathbf{x})$.

Дискретизация и сведение к задаче комбинаторной оптимизации. Поскольку астрономические наблюдения дают поля плотности, состоящие из точечных массивных объектов, естественно полагать, что

$$\rho_0(\mathbf{x}) = \sum\nolimits_{i=1}^{N} m_i\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \tag{7}$$

где $\mathbf{x}_i$ — положение i-го объекта, а m_i — его масса. Начальное поле плотности ρ_{rmin} аналогично можно приблизить регулярной решеткой из M объектов с одинаковой массой m_0. Величину m_0 удобно принять за единицу массы и выбрать столь малой, чтобы все m_i выражались целыми числами.

Подставляя дискретные плотности в функционал I, мы приходим к следующей оптимизационной задаче: найти соответствие $i \mapsto j(i)$, минимизирующее величину

$$\bar{I} = \sum\nolimits_{i=1}^{M} \frac{m_0}{2} |\mathbf{x}_{j(i)} - \mathbf{q}_i|^2. \tag{8}$$

Это соответствие порождает отображение $\mathbf{q}_i \mapsto \mathbf{x}_{j(i)}$, определенное только в точках $\mathbf{q}_i$, которое можно продолжить тем или иным способом на все $\mathbf{q}$.

Частным случаем этой дискретной задачи является случай, когда $m_i = m_0$ для всех объектов. В этом случае возникает задача найти взаимно однозначное соответствие между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{q}$, минимизирующее сумму квадратов расстояний между соответственными точками. Это пример классической оптимизационной задачи о назначениях (см., например, [5]).

Тесты и применения. При обработке реальных каталогов галактик необходимо проводить минимизацию величины (8) с неединичными массами. Такая реконструкция дает информацию о современных пекулярных скоростях галактик, которые в приближении Зельдовича пропорциональны смещениям.

С другой стороны, задача о назначениях возникает при применении метода МАК к данным численного моделирования космологической эволюции методом N тел — частиц одинаковой массы m_0, траектории которых вычисляются в соответствии с обычной ньютоновской динамикой. Задача реконструкции при этом сводится к восстановлению соответствия между положениями частиц в начале и конце моделирования.

Вместе с M. Hénon и R. Mohayaee мы разработали программу минимизации величины (8), основанную на применении «аукционного алгоритма» [2]. Программа применялась для тестирования метода МАК на данных моделирования движения 128^3 частиц, первоначально расположенных на кубической решетке с длиной стороны 200 Мпк [4]. Для выборки из 17178 частиц, исходно расположенных на подрешетке с шагом 6,25 Мпк, метод

МАК точно восстанавливает исходные положения 62% частиц, а для 75% ошибка составляет не более одного шага подрешетки. На выборках из более плотных подрешеток качество реконструкции ухудшается, поскольку точность приближения Зельдовича убывает с уменьшением масштаба.

В настоящее время метод МАК также применяется к определению пекулярных скоростей галактик в скоплении созвездия Девы ([8]). Одним из результатов этой работы является значительная коррекция значения отношения массы к светимости для данного скопления.

Литература

1. E. Bertschinger, A. Dekel, *Recovering the full velocity and density fields from large-scale redshift-distance samples.* — Astrophys. J. **336** (1989), L5–L8.
2. D. Bertsekas, *Auction algorithms for network flow problems: a tutorial introduction.* — Comput. Optim. Appl. **1** (1992), 7–66.
3. Y. Brenier, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions.* — Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 375–417.
4. Y. Brenier, U. Frisch, M. Hénon, G. Loeper, S. Matarrese, R. Mohayaee, A. Sobolevskiĭ, *Reconstruction of the early universe as a convex optimization problem.* — Mon. Not. R. Astron. Soc. **346** (2003), 501–524.
5. R. E. Burkard, *Selected topics on assignment problems.* — Discrete Appl. Math. **123**, Nos. 1–3 (2002), 257–302.
6. U. Frisch, S. Matarrese, R. Mohayaee, A. Sobolevski, *A reconstruction of the initial conditions of the Universe by optimal mass transportation.* — Nature **417** (2002), 260–262.
7. G. Loeper, *The inverse problem for the Euler–Poisson system in cosmology.* — Arch. Rat. Mech. Anal. (2004), to appear.
8. R. Mohayaee, R. Brent Tully, U. Frisch, *Reconstruction of large-scale peculiar velocity fields.* — In: J. V. Narlikar, J.-C. Pecker (eds.), Cosmology: Facts and Problems. College de France, Paris, 8–11 June 2004; `arXiv:astro-ph/0410063`.
9. P. Peebles, *The Large-Scale Structure of the Universe.* Princeton University Press, Princeton, NJ (1980).
10. R. Brent Tully, *Nearby Galaxies Catalog.* Cambridge University Press, Cambridge and New York (1988).
11. Y. Zel'dovich, *Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations.* — Astron. & Astrophys. **5** (1970), 84–89.

Sobolevski A., Frisch U. Application of optimal transport theory to reconstruction of the early Universe.

The problem of deterministic reconstruction of the past kinetic history of the Universe is shown to be reduced, within the Zel'dovich approximation, to solving a Monge–Ampère equation. A variational representation, due to Y. Brenier, is then employed to devise a “Monge–Ampère–

Kantorovich" numerical method of cosmological reconstruction. Results of testing and application of this method are discussed.

МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: ansobol@obs-nice.fr

Поступило 4 октября 2004 г.

Observatoire
de la Côte d'Azur
France