Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

Е. П. Голубева

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ L-ФУНКЦИЙ ГЕККЕ В ТОЧКЕ 1

§0. Введение и обозначения

Пусть $S_2(\Gamma_0(q))$ – пространство голоморфных $\Gamma_0(q)$-параболических форм веса 2 и уровня q, q – простое число.

Пусть $f(z) \in S_2(\Gamma_0(q))$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e(nz), \quad z = x + iy, \quad y > 0;$$

$$a_f(n) n^{-1/2} = \lambda_f(n);$$

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{-s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

Обозначим через $S_2(q)$ множество новых форм из $S_2(\Gamma_0(q))$,

$$S_2(\leqslant Q) = \bigcup_{q \leqslant Q} S_2(q).$$

Пусть N – размерность $S_2(\Gamma_0(q))$. Как известно,

$$N = \frac{1}{12} q + O(1).$$

Функция $L_f(s)$ продолжается как целая функция на всю комплексную плоскость.

Значение $L_f(1)$ удовлетворяет оценкам (см. [1, 2])

$$\frac{1}{\log q} \ll L_f(1) \ll \log^2 q.$$

Таким образом,

$$\log L_f(1) = O(\log\log q).$$

Если $f \in S_2(q)$, то $L_f(s)$ раскладывается в эйлеровское произведение:

$$L_f(s) = \prod_p \left(1 - \lambda_f(p) p^{-s} + \chi_0^{(q)}(p) p^{-2s}\right)^{-1} \quad (\operatorname{Re} s > 1),$$

где $\chi_0^q(\cdot)$ – главный характер по модулю q.

Из известного результата Делиня вытекает, что $\lambda_f(p) = 2\cos\varphi_f(p)$, где $\varphi_f(p) \in [0,\pi]$. Соответственно,

$$L_f(s) = \prod_{p\neq q}\left(1-\frac{e^{i\varphi_f(p)}}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{e^{-i\varphi_f(p)}}{p^s}\right)^{-1}\cdot\left(1-\frac{\lambda_f(q)}{q^s}\right)^{-1}. \quad (1)$$

В работе [3] было доказано, что $\{L_f(1), f\in S_2(q)\}$ имеет предельную функцию распределения при $q\to\infty$. Для этого вычислялись моменты целого положительного порядка этого предельного распределения. Кроме того, эти моменты были должным образом оценены. Это позволило доказать существование характеристической функции и, как следствие, предельного распределения.

Доказательство в [3] проводится по схеме, предложенной Барбаном [4] для аналогичной задачи о распределении значений $\{L_D(1), D\leqslant x\}$, где $L_D(s)$ – L-функция Дирихле с квадратичным характером по модулю D. Такая схема не позволила доказать, что предельное распределение является непрерывным.

В работе [5] результаты из [4] были уточнены: было доказано, что предельное распределение является непрерывным и оценена скорость сходимости к этому распределению.

В настоящей работе мы, используя подход работы [5], уточняем приведенные выше результаты из [3]. Вместо моментов целого порядка найдена асимптотика при $q\to\infty$ для моментов комплексного порядка для $\{L_f(1), f\in S_2(q)\}$ (см. теорему 2 ниже). Полученная при этом предельная характеристическая функция для $\{\log L_f(1), f\in S_2(q)\}$ имеет эйлеровское произведение. Ниже эта функция обозначена через $\widehat{G}(w)$,

$$\widehat{G}(w) = \prod_p \widehat{G}_p(w).$$

Каждый из p-множители $\widehat{G}_p(w)$, в свою очередь, является характеристической функцией для величины (ср. с (1))

$$\log\left(1-\frac{2\cos\varphi_p}{p}+\frac{1}{p^2}\right)^{-1},$$

где независимые величины μ_p-равномерно распределены на интервале $[0,\pi]$ по мере

$$\mu_p=\frac{2}{\pi}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\frac{\sin^2\varphi_p}{1-\dfrac{2\cos 2\varphi_p}{p}+\dfrac{1}{p^2}}d\varphi_p \tag{2}$$

(см. лемму 6 ниже).

Таким образом, наш результат согласуется с результатом Серра [6] (см. также [7–9]), в силу которого собственные значения операторов Гекке $\lambda_f(p)=2\cos\varphi_p(f)$ независимы при различных p, а $\{\varphi_p(f), f\in S_2(q)\}$ при $q\to\infty$ распределено асимптотически по мере μ_p.

Так же как в [5], мы оцениваем скорость сходимости к предельному распределению.

Мы ограничились рассмотрением новых форм веса 2. В действительности, точно такие же результаты справедливы и для любого четного веса k. При этом предельные распределения для всех $S_k(q)$ совпадают.

Действуя аналогично, можно получить такие же результаты и для $L(1,\operatorname{sym}^2 f)$ – симметрических квадратов (см. замечание 2 к теореме 1 ниже).

Кроме уже введенных, мы будем использовать следующие обозначения

$$\sum_f\cdots=\sum_{f\in S_2(q)}\cdots;$$

для комплексного z $d_z(n)$ – коэффициент ряда

$$\zeta^z(s)=\sum_{n=1}^{\infty}d_z(n)n^{-s},\qquad \operatorname{Re}s>1;$$

$d(n)=d_2(n)$;

$c_1,c_2,\dots$ – положительные постоянные.

§1. Формулировка основных результатов

Теорема 1. *Для достаточно больших q имеем*

$$\left|\frac{\#\{\log L_f(1)<x, f\in S_2(q)\}}{\dim S_2(q)}-G(x)\right|\ll\frac{\log^2\log q}{\log q}, \tag{3}$$

где $G(x)$ – функция распределения случайной величины

$$\log \prod_p \left(1 - \frac{2\cos\varphi_p}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Здесь случайные величины φ_p независимы и распределены на промежутке $[0,\pi]$ μ_p-равномерно по мере

$$\mu_p = \frac{2}{\pi}\Big(1 + \frac{1}{p}\Big)\frac{\sin^2\varphi_p}{1 - \dfrac{2\cos 2\varphi_p}{p} + \dfrac{1}{p^2}}\,d\varphi_p.$$

Замечание 1. Случайная величина (4) является суммой независимых слагаемых

$$\sum_p \log\left(1 - \frac{2\cos\varphi_p}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-1}. \tag{5}$$

Обозначим через $G_p(x)$ функцию распределения p-слагаемого, тогда

$$G(x) = G_2(x) * \cdots * G_p(x) * \cdots ,$$

где $*$ означает интегральную свертку. Нетрудно найти каждую из функций $G_p(x)$. Однако хорошего выражения для $G(x)$ получить не удалось.

Замечание 2. Аналогичный результат справедлив и для $\{\log L(1, \mathrm{sym}^2 f), f \in S_2(q)\}$. В этом случае оценка (3) сохраняется, а $G(x)$ является функцией распределения величины

$$\log \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2\cos 2\varphi_p}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-1}.$$

Теорема 2. *При $|w| < \log N/\log^2\log N$ имеем*

$$\widehat{G}_1(w) = \frac{1}{N}\sum_f L_f^{iw}(1) = \widehat{G}(w) + O\Big(\exp\big(-c_1\log N/\log^2\log N\big)\Big),$$

где

$$\widehat{G}(w) = \prod_p \widehat{G}_p(w)$$

и

$$\widehat{G}_p(w) = \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ m\geqslant k+2\\ m\equiv k (\mathrm{mod}\, 2)}} \frac{d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)}{p^{m+k}}\left(\frac{1}{p^{(m-k)/2}} - \frac{1}{p^{(m-k)/2-1}}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{iw}^2(p^k)}{p^{2k}}.$$

Замечание 3. Ниже (лемма 6) мы покажем, что $\widehat{G}_p(w)$ является характеристической функцией для p-слагаемого из (5).

§2. Доказательство теоремы 2. Вспомогательные результаты

Введем следующее обозначение: при $\sigma \geqslant 1/2$

$$N(\sigma, H, f) = \#\{\rho = \beta + i\gamma \mid L_f(\rho) = 0, \beta \geqslant \sigma, |\gamma| \leqslant H\}.$$

Лемма 1 (см. [3]). *Для $\sigma \geqslant 3/4$ и $Q \geqslant c_2$ имеем*

$$\sum_{f\in S_2(\leqslant Q)} N(\sigma, \log^3 Q, f) = O_\varepsilon\left(Q^{c_3(1-\sigma)+\varepsilon}\right).$$

Лемма 2. *Пусть $0 < \eta < 1/2$. Если $L_f(s)$ $(f \in S_2(\leqslant Q), Q \geqslant c_2)$ не имеет нулей в прямоугольнике*

$$1 - \eta \leqslant \sigma < 1, \quad |t| \leqslant \log^3 Q, \tag{6}$$

то в прямоугольнике

$$1 - \eta/2 \leqslant \sigma < 1, \quad |t| < \log^2 Q,$$

справедлива оценка

$$\log L_f(s) = O\left(\log^{c_4(1-\sigma)} Q \log\log Q\right).$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы из работы [4].

Пусть коэффициенты $\nu(n, w, f)$ определяются следующим разложением:

$$L_f^{iw}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n, w, f)}{n^s} \quad (\mathrm{Re}\, s > 1). \tag{7}$$

Лемма 3. *Пусть $L_f(s)$ не имеет нулей в прямоугольнике* (6). *Тогда при* $|w| \ll \log N/\log^2\log N$ *имеем*

$$L_f^{iw}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(n,w,f)}{n}\exp(-n/N^{1/4})+O(\exp(-c_5\log N/\log^2\log N)).$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(n,w,f)}{n}\exp(-n/N^{1/4})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(1)}L_f^{iw}(s+1)\Gamma(s)N^{s/4}ds.$$

По теореме о вычетах,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(1)}L_f^{iw}(s+1)\Gamma(s)N^{s/4}ds=L_f^{iw}(1)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}L_f^{iw}(s+1)\Gamma(s)N^{s/4}ds,$$

где γ – ломаная с вершинами в точках $(\log\log N)^{-1}-i\infty$, $(\log\log N)^{-1}-i\log^2 N$, $-(\log\log N)^{-1}-i\log^2 N$, $-(\log\log N)^{-1}+i\log^2 N$, $(\log\log N)^{-1}+i\log^2 N$, $(\log\log N)^{-1}+i\infty$.

Для оценки последнего интеграла используем лемму 2 и известные оценки для $\Gamma(s)$.

Лемма 4. *При* $|w|<\log N/\log^2\log N$ *имеем*

$$L_f^{iw}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(n,w,f)}{n}\exp(-n/N^{1/4})+O(\exp(c_6\log N/\log^2\log N)).$$

Доказательство. Разобьем последнюю сумму на две:

$$\sum\nolimits_1=\sum_{n\leqslant N^{1/4}\log^3 N}\frac{\nu(n,w,f)}{n}\exp(-n/N^{1/4}),$$

$$\sum\nolimits_2=\sum_{n>N^{1/4}\log^3 N}\frac{\nu(n,w,f)}{n}\exp(-n/N^{1/4}).$$

Так как $|d_{iw}(n)|\leqslant d_{|w|}(n)$, из (1) имеем

$$\sum\nolimits_1\leqslant\sum_{n<N^{1/4}\log^3 N}\frac{\nu(n,|w|,f)}{n}\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{p<N^{1/4}\log^3 N}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2|w|}=O\Big(\exp\left(c_7|w|\log\log N\right)\Big).$$

Аналогично,

$$\sum\nolimits_2 = O\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} \nu(n,|w|,f)\frac{n,|w|,f}{n^2}\biggr) = \\ = O\biggl(\prod_p \Bigl(1-\frac{1}{p^2}\Bigr)^{-2|w|}\biggr) = O\bigl(\exp(c_8|w|)\bigr).$$

Поскольку $L_f^{iw}(1) = O(1)$, лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\delta(n,N) = d(n)(N^{1/2} + n^{3/2}\log^2 n)$. *Тогда*

$$\sum_f \lambda_f(n) = \\ = \begin{cases} N/n^{1/2} + O\bigl(\delta(n,N)\bigr), & \text{если } n \text{ является полным квадратом,} \\ O\bigl(\delta(n,N)\bigr) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Эти соотношения следуют из формулы следа Айхлера–Сельберга (см. [6]).

§3. Доказательство теоремы 2

Вычислим коэффициенты $\nu(n,w,f)$ из (7).

Обозначим $e^{i\varphi_f(p)} = \alpha_f(p)$. При $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$L_f^{iw}(s) = \Bigl(1 - \frac{\lambda_f(q)}{q^s}\Bigr)^{-iw} \prod_{p\ne q} \sum_{\substack{m\geqslant 0\\ k\geqslant 0}} \frac{d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)\alpha_f^m(p)\overline{\alpha}_f^k(p)}{p^{(m+k)s}}.$$

Последнее произведение можно записать в виде

$$\prod_{p\ne q}\biggl(\sum_{m>k\geqslant 0} \frac{d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)\bigl(\alpha_f^{m-k}(p)+\overline{\alpha}_f^{m-k}(p)\bigr)}{p^{(m+k)s}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{iw}^2(p^k)}{p^{2ks}}\biggr).$$

При $m-k\geqslant 2$ имеем

$$\alpha_f^{m-k}(p) + \overline{\alpha}_f^{m-k}(p) = \lambda_f(p^{m-k}) - \lambda_f(p^{m-k-2}),$$

кроме того,

$$\alpha_f(p) + \overline{\alpha}_f(p) = \lambda_f(p).$$

Таким образом,

$$L_f^{iw}(s) =$$

$$= \left(1-\frac{\lambda_f(q)}{q^s}\right)^{-iw} \prod_{p\neq q} \Bigg(\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ m\geqslant k+2}} \frac{d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)}{p^{(m+k)s}} \Big(\lambda_f(p^{m-k}) - \lambda_f(p^{m-k-2})\Big) +$$

$$+ \sum_{k\geqslant 0} \frac{d_{iw}(p^{k+1})d_{iw}(p^k)}{p^{(2k+1)s}} \lambda_f(p) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{iw}^2(p^k)}{p^{2ks}} \Bigg).$$

Следовательно,

$$\nu(n, w, f) = \prod_{p^r || n} \nu(p^r, w, f)$$

и при $(n, q) = 1$ мы имеем

$$\nu(p^r, w, f) = 1, \quad \text{если} \quad r = 0;$$

$$\nu(p^r, w, f) = d_{iw}(p)\lambda_f(p), \quad \text{если} \quad r = 1;$$

$$\nu(p^r, w, f) = \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ m\geqslant k+2\\ m+k=r}} d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)\Big(\lambda_f(p^{m-k}) - \lambda_f(p^{m-k-2})\Big) +$$

$$+ d_{iw}^2(p^{r/2}), \quad \text{если} \quad r \text{ – четное}, \ r \geqslant 2;$$

$$\nu(p^r, w, f) = \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ m\geqslant k+2\\ m+k=r}} d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)\Big(\lambda_f(p^{m-k}) - \lambda_f(p^{m-k-2})\Big) +$$

$$+ d_{iw}(p^{(r+1)/2})d_{iw}(p^{(r-1)/2})\lambda_f(p), \quad \text{если} \quad r \text{ – нечетное}, \ r \geqslant 3.$$

По лемме 1 количество $L_f(s)$, имеющих нуль в прямоугольнике (6), оценивается как $O(N^{1-c_7})$, если η – достаточно мало.

Таким образом, по леммам 3 и 4 имеем

$$\sum_f L_f^{iw}(1) = \sum_f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n, w, f)}{n} \exp(-n/N^{1/4}) +$$

$$+O(N\exp(-c_5 \log N/\log^2 \log N)) + O(N^{1-c_7}\exp(c_6 \log N/\log\log N)) =$$

$$= \sum_f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n, w, f)}{n} \exp(-n/N^{1/4}) + O(N\exp(-c_5 \log N/\log^2 \log N)).$$

Подставляя сюда значения коэффициентов $\nu(n,w,f)$ и пользуясь леммой 5, получаем

$$\sum_f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n,w,f)}{n} \exp(-n/N^{1/4}) = N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n^2,w)}{n^2} \exp(-n^2/N^{1/4}) +$$

$$+O\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta(n,N)d(n)}{n} \exp(-n/N^{1/4}) \prod_{p^r||n} \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ m\geqslant k\\ m+k=r}} d_{|w|}(p^m) d_{|w|}(p^k) \Bigg), \quad (8)$$

где

$$A(n^2,w) =$$
$$= \prod_{p^r||n} \Bigg(\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ m\geqslant k+2\\ m+k=2r}} d_{iw}(p^m) d_{iw}(p^k) \bigg(\frac{1}{p^{(m-k)/2}} - \frac{1}{p^{(m-k)/2-1}} \bigg) + d_{iw}^2(p^r),$$

$\delta(n,N)$ то же, что и в лемме 5. Первую из сумм обозначим $\sum_3$, вторую – $\sum_4$.

Преобразуем $\sum_3$:

$$\frac{1}{N}\sum\nolimits_3 = \sum_{n^2\leqslant N^{1/4}\log^2 N} \frac{A(n^2,w)}{n^2} + O\Bigg(N^{-1/4} \sum_{n^2\leqslant N^{1/4}\log^2 N} |A(n^2,w)| \Bigg) +$$

$$+ \sum_{n^2 > N^{1/4}\log^2 N} \frac{A(n^2,w)}{n^2} \exp(-n^2/N^{1/4}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n^2,w)}{n^2} + O\Bigg(\sum_{n^2 > N^{1/4}\log^2 N} \frac{|A(n^2,w)|}{n^2} \Bigg) +$$

$$+O\Bigg(N^{-1/4} \sum_{n^2\leqslant N^{1/4}\log^2 N} |A(n^2,w)| \Bigg) + O\Bigg(\frac{1}{N} \sum_{n^2 > N^{1/4}\log^2 N} \frac{|A(n^2,w)|}{n^2} \Bigg) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n^2,w)}{n^2} + O\Big(\sum\nolimits_5\Big) + O\Big(\sum\nolimits_6\Big).$$

Главный член последнего выражения преобразуется к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A(n^2,w)}{n^2}= \tag{9}$$

$$=\prod_p \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ m\geqslant k+2\\ m\equiv k (\mathrm{mod}\,2)}}\left(\frac{d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)}{p^{m+k}}\left(p^{-(m-k)/2}-p^{-(m-k)/2-1}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{iw}^2(p^k)}{p^{2k}}\right).$$

Остаток $\sum_5$ можно оценить следующим образом:

$$\sum\nolimits_5 \leqslant \frac{1}{x^{2\eta}}\sum_{n\geqslant x}\frac{|A(n^2,w)|}{n^2}, \tag{10}$$

где $x=N^{1/8}\log N$, $\eta=\log^{-1}\log N$.

Поскольку в эйлеровском произведении (9) отсутствуют члены при p^{-1}, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|A(n^2,w)|}{n^{2-2\eta}}\leqslant\prod_p\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2|w|}-\frac{2|w|}{p^{1-\eta}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{p<|w|\log\log N}\exp\left(c_8|w|/p^{(1-\eta)}\right)\prod_{p\geqslant|w|\log\log N}\left(1+O(|w|^2/p^{2(1-\eta)}\right)=$$

$$=O\left(\exp\left(c_8|w|\sum_{p<|w|\log\log N}\frac{1}{p^{1-\eta}}\right)\right)\exp\left(c_9|w|^2\sum_{p>|w|\log\log N}\frac{1}{p^{2-2\eta}}\right)=$$

$$=O\left(\exp\left(c_8|w|\log\log\log N\right)\exp\left(c_9|w|^{1+2\eta}/\log\log N\right)\right)=$$

$$=O\left(\exp\left(c_{10}\log N/\log^2\log N\right)\right).$$

Возвращаясь к (10), имеем

$$\sum\nolimits_5 = O\left(\exp\left(-c_{11}\log N/\log\log N\right)\right). \tag{11}$$

Оценим теперь $\sum_6$. Имеем

$$|A(n^2,w)|\leqslant A(n^2,|w|)\leqslant\prod_{p^r||n}\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ m\geqslant k+2\\ m+k=2r}} d_{|w|}(p^m)d_{|w|}(p^k)+d_{|w|}^2(p^r)\leqslant$$

$$\prod_{p^r||n} d^2_{|w|}(p^{2r})(2r+1) = d^2_{|w|}(n^2)d^2(n^2) \leqslant d^4_{|w|}(n)d^4(n).$$

Таким образом,

$$\sum\nolimits_6 = O\Big(N^{-1/4} \sum_{n<N^{1/8}\log N} d^4_{|w|}(n)d^4(n)\Big) =$$
$$= O\Big(N^{-1/8}\big(\log N\big)^{\log N/\log^2\log N}\Big) =$$
$$= O\Big(N^{-1/8}\exp(\log N/\log\log N)\Big).$$

В силу (8), (9) и (11),

$$\sum\nolimits_3 = N\prod_p \widehat{G}_p(w) + O\Big(N\exp(-c_{12}\log N/\log^2\log N)\Big). \qquad (12)$$

Нам осталось оценить $\sum_4$ из (8).

Введем обозначение

$$B(n,w) = \prod_{p^r||n} \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ m\geqslant k\\ m+k=r}} d_{|w|}(p^m)d_{|w|}(p^k),$$

тогда

$$\sum\nolimits_4 = O_\varepsilon\left(N^{1/2+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(n,w)}{n}\exp(-n/N^{1/4})\right)+$$
$$+O_\varepsilon\left(N^\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}n^{1/2}B(n,w)\exp\Big(-n/N^{1/4}\Big)\right),$$

где $\varepsilon>0$ – произвольная постоянная.

Легко видеть, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(n,w)}{n}\exp(-n/N^{1/4}) \leqslant \sum_{n\leqslant N^{1/4}\log^2 N}\frac{B(n,w)}{n} + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(n,w)}{n^2} =$$

$$= O\bigg(\prod_{p<N^{1/4}\log^2 N}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2|w|} + \frac{1}{N}c_{12}^{|w|}\bigg) = O\Big(\exp(c_{13}\log N/\log\log N)\Big)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{1/2}B(n,w)\exp\big(-n/N^{1/4}\big) = O\Big(N^{3/8}\exp\big(c_{13}\log N/\log\log N\big)\Big).$$

Вместе с соотношением (12) это доказывает теорему.

Замечание 4. В процессе доказательства мы нигде не использовали то, что iw – мнимое число. Точно так же можно записать моменты целого порядка для $\{L_f(1), f \in S_2(q)\}$ при $m < \log N/\log^2\log N$:

$$\sum_f L_f^m(1) = B_m N + O\Big(N \exp\big(-c_{14}\log N/\log^2\log N\big)\Big),$$

где

$$B_m = \prod_p \widehat{G}_p(m),$$

$$\widehat{G}_p(w) =$$
$$= \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ n\geqslant k+2\\ n\equiv k(\mathrm{mod}\, 2)}} \frac{d_m(p^n)d_m(p^k)}{p^{n+k}}\left(\frac{1}{p^{(m-k)/2}} - \frac{1}{p^{(m-k)/2-1}}\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_m^2(p^k)}{p^{2k}}. \quad (13)$$

§4. Доказательство теоремы 1

Для доказательства нам понадобится еще ряд лемм. В первой из них мы показываем, что множитель $\widehat{G}_p(w)$ из теоремы 2 является характеристической функцией для $\log\left(1 - \dfrac{2\cos\varphi_p}{p} + \dfrac{1}{p^2}\right)^{-1}$, $0 \leqslant \varphi_p \leqslant \pi$, φ_p распределено по мере μ_p (см. (2)).

Лемма 6. *Имеем*

$$\widehat{G}_p(w) = \int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2\cos\varphi}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-iw}\mu_p(\varphi).$$

Доказательство. Обозначим интеграл через $I_p(w)$ и перепишем его в виде

$$\frac{1+p^{-1}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos 2\varphi)d\varphi}{\left(1 - \dfrac{2\cos 2\varphi}{p} + \dfrac{1}{p^2}\right)\left(1 - \dfrac{2\cos\varphi}{p} + \dfrac{1}{p^2}\right)^{iw}}.$$

Разложим на множители знаменатель, тогда

$$
\begin{gathered}
I_p(w)=\frac{1+p^{-1}}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\exp(2ij\varphi)}{p^j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp(-2ij\varphi)}{p^n}\times\\
\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{iw}(p^k)\exp(-ik\varphi)}{p^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d_{iw}(p^m)\exp(im\varphi)}{p^m}d\varphi.
\end{gathered}\tag{14}
$$

Вычислим коэффициент при $d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)$ $(m>k)$. Он равен

$$
\frac{2(1+p^{-1})}{\pi p^{m+k}}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)\cos((m-k)\varphi)\times
$$

$$
\times\left(2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{p^r}\sum_{\substack{j>n\geqslant 0\\ j+n=r}}\cos(2(j-n)\varphi)+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{p^{2r}}\right)d\varphi.
$$

Учитывая, что при целом t

$$
\int\limits_0^{\pi}\cos t\varphi d\varphi=\begin{cases}\pi, & \text{если} \quad t=0,\\ 0, & \text{если} \quad t\neq 0,\end{cases}
$$

имеем

$$
\frac{2(1+p^{-1})}{\pi p^{m+k}}\int\limits_0^{\pi}\cos((m-k)\varphi)\times
$$

$$
\times\left(2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{p^r}\sum_{\substack{j>n\geqslant 0\\ j+n=r}}\cos(2(j-n)\varphi)+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{p^{2r}}\right)d\varphi=0,
$$

если $(m-k)$ – нечетное число. Если $(m-k)$ – четно, то левая часть последнего выражения равна

$$
\begin{gathered}
\frac{2(1+p^{-1})}{p^{m+k}}\sum_{r=0}^{\infty}p^{-r}\sum_{\substack{j>n\geqslant 0\\ n+j=r\\ j-n=(m-k)/2}}1=\frac{2(1+p^{-1})}{p^{m+k}}\,\frac{1}{p^{(m-k)/2}}\,\frac{1}{1-p^{-2}}=\\
=\frac{2}{(p^{m+k+(m-k)/2})(1-p^{-1})}.
\end{gathered}\tag{15}
$$

Аналогично,

$$-\frac{2(1+p^{-1})}{\pi p^{m+k}}\int\limits_0^\pi \cos 2\varphi\cos((m-k)\varphi)\times$$

$$\times\left(2\sum_{r=0}^\infty\frac{1}{p^r}\sum_{\substack{j>n\geqslant 0\\ j+n=r}}\cos(2(j-n)\varphi)+\sum_{r=0}^\infty\frac{1}{p^{2r}}\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{1+p^{-1}}{\pi p^{m+k}}\int\limits_0^\pi\big(\cos((m-k+2)\varphi)+\cos((m-k-2)\varphi)\big)\times$$

$$\times\left(2\sum_{r=0}^\infty\frac{1}{p^r}\sum_{\substack{j>n\geqslant 0\\ j+n=r}}\cos(2(j-n)\varphi)+\sum_{r=0}^\infty\frac{1}{p^{2r}}\right)d\varphi.$$

Последнее выражение равно 0, если $(m-k)$ – нечетное число. Если $(m-k)$ является четным, то оно равно

$$-\left(\frac{1}{p^{m+k+(m-k)/2+1}}+\frac{1}{p^{m+k+(m-k)/2-1}}\right)\frac{1}{1-p^{-1}}. \tag{16}$$

Складывая (15) и (16), получаем

$$\frac{1}{p^{m+k}}\left(\frac{1}{p^{(m-k)/2}}-\frac{1}{p^{(m-k)/2-1}}\right).$$

Это значение совпадает с коэффициентом при $d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)$ $(m>k)$ в (9).

Нам осталось вычислить коэффициент при $d_{iw}^2(p^k)$ в (14). Он равен

$$\frac{1+p^{-1}}{\pi p^{2k}}\int\limits_0^\pi(1-\cos 2\varphi)\left(2\sum_{r=0}^\infty\frac{1}{p^r}\left(\sum_{\substack{j>n\geqslant 0\\ j+n=r}}\cos(2(j-n)\varphi)+\sum_{r=0}^\infty\frac{1}{p^{2r}}\right)\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1+p^{-1}}{p^{2k}}\left(\sum_{r=0}^\infty\frac{1}{p^{2r}}-\sum_{r=0}^\infty\frac{1}{p^{2r+1}}\right)=\frac{1}{p^{2k}}.$$

Замечание 5. Из этой леммы и предыдущего замечания вытекает, что коэффициент B_m из (13) можно записать в виде

$$B_m = \prod_p \int_0^\pi \frac{1}{\left(1 - \frac{2\cos\varphi_p}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^m} \mu_p(\varphi_p).$$

Таким образом, предельная характеристическая функция для $\{L_f(1), f \in S_2(q)\}$ из работы [3] имеет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m (iw)^m}{m!} = \int_0^\pi \exp\left(iwL_{\overline{\varphi}}(1)\right) \mu(\overline{\varphi}),$$

где $\overline{\varphi} = (\varphi_2, \dots, \varphi_p, \dots)$,

$$L_{\overline{\varphi}}(s) = \prod_p \left(1 - \frac{2\cos\varphi_p}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1},$$

$$\mu(\overline{\varphi}) = \prod_p \mu_p.$$

Лемма 7. *При* $|w| > 1$ *справедлива оценка*

$$\widehat{G}_p(w) = \exp(-w^2/2p^2) + O\left(\frac{|w|^3}{p^3} + \frac{1}{p^2}\right).$$

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением для $\widehat{G}_p(w)$ из леммы 6:

$$\widehat{G}_p(w) = \frac{1 + p^{-1}}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos 2\varphi) \left(1 + \frac{2\cos 2\varphi}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{2iw\cos\varphi}{p} - \frac{2w^2\cos^2\varphi}{p^2} + O\left(\frac{|w|^3}{p^3}\right)\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1 + p^{-1}}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos 2\varphi) \left(1 + \frac{2\cos 2\varphi}{p}\right) \left(1 - \frac{w^2}{p^2} - \frac{w^2\cos 2\varphi}{p^2}\right) d\varphi +$$

$$+ O\left(\frac{1}{p^2} + \frac{|w|^3}{p^3}\right) = \frac{1 + p^{-1}}{\pi} \int_0^\pi \left(1 - \frac{1}{p} - \left(1 - \frac{2}{p}\right)\cos 2\varphi\right) \times$$

$$\times\biggl(1-\frac{w^2}{p^2}-\frac{w^2\cos 2\varphi}{p^2}\biggr)d\varphi+O\biggl(\frac{1}{p^2}+\frac{|w|^3}{p^3}\biggr)=$$

$$=(1-p^{-2})\biggl(1-\frac{w^2}{p^2}\biggr)+\frac{w^2}{2p^2}+O\biggl(\frac{|w|^3}{p^3}+\frac{1}{p^2}\biggr)=$$

$$=\exp\biggl(-\frac{w^2}{2p^2}+O\biggl(\frac{|w|^3}{p^3}+\frac{1}{p^2}\biggr)\biggr).$$

Следствие. *При* $|w|>c_{15}$ *имеем*

$$\widehat{G}(w)=O\Bigl(\exp\bigl(-c_{16}|w|/\log^2|w|\bigr)\Bigr).$$

Доказательство. Имеем

$$|\widehat{G}(w)|=\Bigl|\prod_p \widehat{G}_p(w)\Bigr|=\Bigl|\prod_{p\leqslant|w|\log|w|}\widehat{G}_p(w)\Bigr|\,\Bigl|\prod_{p>|w|\log|w|}\widehat{G}_p(w)\Bigr|\leqslant$$

$$\leqslant\Bigl|\prod_{p>|w|\log|w|}\widehat{G}_p(w)\Bigr|.$$

По лемме 7,

$$\prod_{p>|w|\log|w|}\widehat{G}_p(w)=O\biggl(\exp\biggl(-w^2/2\sum_{p>|w|\log|w|}\frac{1}{p^2}\biggr)\biggr)\times$$

$$\times\exp\biggl(|w|^3\sum_{p>|w|\log|w|}\frac{1}{p^3}\biggr)=O\Bigl(\exp\bigl(-c_{16}|w|/\log^2|w|\bigr)\Bigr).$$

Лемма 8. *При малых* $|w|$ *имеем*

$$\widehat{G}_1(w)=\frac{1}{N}\sum_f L_f^{iw}(1)=1+O\bigl(|w|\log\log N\bigr),$$

$$\widehat{G}(w)=1+O(|w|^2).$$

Доказательство. Первое равенство следует из известной оценки $\log L_f(1)=O(\log\log N)$.

Для $\widehat{G}(w)$ имеем

$$\widehat{G}(w)=\prod_p\int_0^\pi\biggl(1+\frac{2iw\cos\varphi}{p}+O\biggl(\frac{|w|^2}{p^2}\biggr)\biggr)\mu_p=$$

$$= \prod_p \left(1 + O\Big(\frac{|w|^2}{p^2}\Big)\right) = 1 + O(|w|^2).$$

Лемма 9. *Пусть $G(x)$ и $G_1(x)$ – функции распределения двух случайных величин и $\widehat{G}(w)$ и $\widehat{G}_1(w)$ – характеристические функции этих величин. Тогда*

$$\sup_x |G_1(x) - G(x)| = O\left(\sup_{\xi \geqslant T} \frac{1}{\xi} \int\limits_0^{\xi} |\widehat{G}(w)| dw + \int\limits_0^T \frac{|\widehat{G}_1(w) - \widehat{G}(w)|}{w}\, dw\right).$$

Доказательство этой тауберовой теоремы см в работе [5].

Доказательство теоремы 1. Из леммы 9 следует, что

$$G_1(x) = G(x) + O\left(\sup_{\xi \geqslant T} \frac{1}{\xi} \int\limits_0^{\xi} |\widehat{G}(w)| dw\right) + O\left(\int\limits_0^T \frac{|\widehat{G}(w) - \widehat{G}_1(w)|}{w}\, dw\right),$$

где мы обозначили

$$G_1(x) = \frac{1}{N} \# \Big\{ \log L_f(1) < x, f \in S_2(q) \Big\}.$$

Положим $T = c_{17} \log N / \log^2 \log N$. Из леммы 7 вытекает, что

$$\sup_{\xi \geqslant T} \frac{1}{\xi} \int\limits_0^{\xi} |\widehat{G}(w)| dw = O\Big(\frac{1}{T}\Big).$$

Далее,

$$\int\limits_0^T \frac{|\widehat{G}(w) - \widehat{G}_1(w)|}{w}\, dw =$$

$$= \int\limits_0^{(\log N)^{-1}} \frac{|\widehat{G}(w) - \widehat{G}_1(w)|}{w}\, dw + \int\limits_{(\log N)^{-1}}^T \frac{|\widehat{G}(w) - \widehat{G}_1(w)|}{w}\, dw.$$

Для первого из интегралов из леммы 8 следует оценка $O(\log\log N / \log N)$. Для второго интеграла из теоремы 2 имеем

$$\int\limits_{(\log N)^{-1}}^T \frac{|\widehat{G}(w) - \widehat{G}_1(w)|}{w}\, dw = O\Big(\exp\big(-c_{18} \log N / \log^2 \log N\big)\Big)$$

и теорема доказана.

Литература

1. J. Hoffstein and D. Ramakrishnan, *Siegel zeros ans cusp forms,* Internat. Math. Research Notices No. 6 (1995), 279–308.
2. H. Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms,* 1997.
3. О. М. Фоменко, *О распределении значений* $L(1, f)$*,* Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 135–148.
4. М. Б. Барбан, *Метод "большого решета" и его применения в теории чисел,* Успехи мат. наук **21**, No. 1 (1966), 51–102.
5. А. С. Файнлейб, *О распределении числа классов положительных квадратичных форм,* Труды ТашГУ, "Вопросы математики" **418** (1972), 272–279.
6. J.-P. Serre, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke* T_p*,* J. Amer. Math. Soc. **10**, No. 1 (1997), 75–102.
7. J. B. Conrey, W. Duke, and D. W. Farmer, *The distribution of the eigenvalues of Hecke operators,* Acta Arithm. **78**, No. 4 (1997), 405–409.
8. P. Sarnak, *Statistical properties of eigenvalues of the Hecke operators,* in: Analytic Number Theory and Diophantine Problems (Stillwater, OK, 1984), Progr. Math. **70**, Birkhäuser, Boston, 1987, 321–331.
9. Е. П. Голубева, *Распределение собственных чисел операторов Гекке,* Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), 33–40.

Государственный
университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича
E-mail:elena_golubeva@mail.ru

Поступило 10 сентября 2004 г.